計算数理工学論文集 Vol. 15 (2015 年 12 月), 論文 No. 12-151204 JASCOME

時空間方向に高速化された3次元音響波動問題に対するCQ-BEM

SPATIOTEMPORALLY ACCELERATED CQ-BEM FOR 3-D ACOUSTIC WAVE PROBLEMS

丸山 泰蔵 [1)]，斎藤 隆泰 [2)]，廣瀬 壮一 [3)]

Taizo MARUYAMA, Takahiro SAITOH, and Sohichi HIROSE

1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: maruyama.t.ag@m.titech.ac.jp)
2) 群馬大学大学院理工学府 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail: t-saitoh@gunma-u.ac.jp)
3) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp)

A new time-domain fast multipole boundary element method (TD-FMBEM) for three-dimensional acoustic wave problems is proposed in this paper. Convolution integrals with respect to time in boundary integral equations are discretized by the implicit Runge-Kutta based convolution quadrature method, which produces accurate and stable numerical solutions. However, the computational cost for a number of time steps is expensive even if the fast multipole method (FMM) or $\mathcal{H}$-matrix is applied to a matrix-vector product with respect to spatial components. Therefore, the proposed TD-FMBEM is further accelerated for a number of time steps using the rapid convolution algorithm with fast Fourier transform. Considering arrival time of influence waves, the computational time is also reduced by truncation of M2L moments. The computational complexity and accuracy of proposed method are discussed through some numerical examples.

Key Words: Convolution Quadrature Method, Time-domain BEM, Fast Multipole Method, Acoustic Wave

1. はじめに

非定常な波動問題を取り扱う場合, 時間領域境界要素法 (TD-BEM) は, 放射条件を満足する基本解の特性によって吸収境界条件等の特別な処理を用いることなく開領域を取り扱えるため, 有効な数値解法であると考えられる. しかしながら, 時間方向の離散化に関して線形などの近似基底を用いる (従来型) TD-BEM は, 時間ステップ解析における数値不安定性の問題がある. また, 波動が分散性を有する多孔質弾性体や粘弾性体等の領域に対する波動問題への適用は, 時間領域基本解が閉じた形式で得られないため困難である. 一方, 演算子積分時間領域境界要素法 (CQ-BEM) はラプラス変換領域の基本解を用いて時間領域の影響関数を数値的に構成するため, 特別な工夫を行うことなく, このような問題への適用が可能である [(1)]. また, 比較的安定に時間ステップ解析を行えるため, 様々な問題に対して適用可能である [(2, 3)].

しかしながら, 高速化を全く施さない状態では, 計算量のオーダーは等しいものの, 従来型 TD-BEM と比較して CQ-BEM の方が計算コストを要する. その理由は, 線形多段法を用いた CQ-BEM では時間増分を比較的小さくする必要があり, 陰的 Runge-Kutta (IRK) 法を用いた CQ-BEM では, IRK 法の段数に依存して計算量が増大するためである. そのため, 高速多重極法 (FMM)[(4)] や ACA[(5)] による CQ-BEM の空間方向に対する高速化が行われ [(3, 6, 7, 8)], 要素数が大きい問題に対するアプローチが行われてきた. さらに, Hairer ら [(9)] によって提案された時間に関する畳込み積分の高速演算アルゴリズム (以下では, 高速畳込み演算と呼ぶ) を用いた時間方向の高速化も提案され [(10)], 比較的大きい総時間ステップ数を用いることも可能になってきた.

近年, Banjai と Kachanovska[(11)] によって高速畳込み演算と ACA を組み合わせ, さらなる時間方向の高速化を行った手法が 3 次元音響波動問題に対して提案されており, N を総時間ステップ数, M を要素数とすると, 計算量のオーダーが $O(NM\log N\log M)$ 程度であることを数値解析例から示している. しかしながら, 階層構造行列を保存する必要があるため, オーダーは $O(NM\log M)$ であるものの, 比較的大きなメモリ量を要している.

本研究では, 高速畳込み演算を 3 次元音響波動問題に対する演算子積分時間領域高速多重極境界要素法 (CQ-FMBEM) に適用し, 時空間方向に高速な数値解法の開発を行う. 本手法では, 遅延ポテンシャル計算において格納する必要がある係数は少ないため, 必要メモリ量は $O(NM)$ と比較的小さく抑えられる. また, 高速畳込み演算の適用に伴い, FMM における M2L の新しい切り捨てが可能となる.

2015 年 9 月 21 日受付，2015 年 10 月 23 日受理

以下では, 3 次元音響波動問題に対する IRK 法を用いた CQ-BEM の定式化を示し, CQ-BEM における高速畳込み演算を用いた計算手順を説明する. その際, FMM の詳細に関しては省略し, 高速畳込み演算の適用に伴う新しい M2L の切り捨てのみ説明を行う. その後, いくつかの数値解析例を示し, 本手法の有効性を示す.

2. IRK 法を用いた CQ-BEM の定式化

以下では, 3 次元直交座標系を用い, $(\dot{\ })$ は時間微分を表す. Fig. 1 のような無限領域 D に存在する境界 S を有する散乱体によって入射波 p^{in} が散乱される外部散乱問題を考える. 図中の $\boldsymbol{n}$ は法線方向ベクトルである. 本研究において, D 内で時刻 t における圧力 p が満足する支配方程式, 及び初期条件は以下である.

$$c^2\nabla^2 p(\boldsymbol{x},t) - \ddot{p}(\boldsymbol{x},t) = 0 \quad \boldsymbol{x}\in D \tag{1}$$

$$p^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{x},0) = \dot{p}^{\mathrm{sc}}(\boldsymbol{x},0) = 0 \quad \boldsymbol{x}\in D \tag{2}$$

ここで, 上付き添字の sc は散乱波を表しており, c は領域中を伝搬する波動の速度である. p^{sc} に対する遠方での放射条件を考慮すれば, 式 (1) に対する積分方程式を導き, S に対して極限移行することによって, 次の時間領域境界積分方程式を導出できる.

$$\begin{aligned}C(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x},t) &= p^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t) + \int_0^t\int_S G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t-\tau)q(\boldsymbol{y},\tau)dS_y d\tau \\ &\quad - \int_0^t \mathrm{p.v.}\int_S H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t-\tau)p(\boldsymbol{y},\tau)dS_y d\tau \quad \boldsymbol{x}\in S\end{aligned} \tag{3}$$

ここで, G, H は 3 次元音響波動問題に対する時間領域基本解, 及びその法線方向勾配であり, q は p の法線方向勾配である. また, $C(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ における境界形状に依存する自由項 [12] であり, p.v. は積分をコーシーの主値の意味で評価することを表している.

境界積分方程式 (3) に対して, 境界 S を M 個の区分一定要素, 時間に関する畳込み積分を m 段の IRK 法を用いた CQM[13] による離散化を行うと, 次の表現が得られる.

$$\frac{1}{2}p_\gamma^{i;n} = p_\gamma^{\mathrm{in};i;n} + \sum_{k=0}^{n}\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{j=1}^{m}\left[A_{\gamma\alpha}^{ij;n-k}q_\alpha^{j;k} - B_{\gamma\alpha}^{ij;n-k}p_\alpha^{j;k}\right], \quad (i=1,...,m),\ \ (n=0,...,N-1) \tag{4}$$

ここで, N は総時間ステップ数である. また, α,γ は要素番号を表しており, 離散化された境界値, 入射波は次のように表される.

$$\phi_\alpha^{i;n} = \phi(\boldsymbol{x}_\alpha,(n+c_i)\Delta t) \quad (\phi = p^{\mathrm{in}}, p, \ \ \mathrm{or}\ \ q)$$

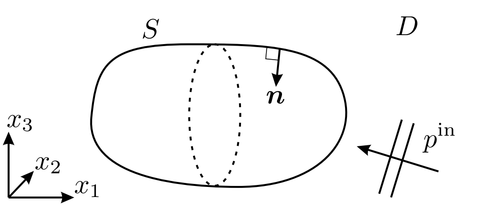

Fig. 1　Analysis model of acoustic wave scattering.

ここで, $\boldsymbol{x}_\alpha$ は要素の重心, Δt は時間増分であり, c_i は IRK 法における Butcher の係数パラメータ [14] である. また, 式 (4) 中の $A_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$, $B_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$ は基本解に対応する影響関数であり, 次のように表される.

$$\left(\mathbf{A}_{\gamma\alpha}^{\kappa}\right)_{ij} = A_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}, \quad \left(\mathbf{B}_{\gamma\alpha}^{\kappa}\right)_{ij} = B_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$$

$$\mathbf{A}_{\gamma\alpha}^{\kappa} = \tilde{\mathcal{F}}_{l\kappa}^{-1}\left[\sum_{\beta=1}^{m}\boldsymbol{E}_\beta(\zeta_l)\int_{S_\alpha}\hat{G}(\boldsymbol{x}_\gamma,\boldsymbol{y},\lambda_\beta^l)dS_y\right] \tag{5}$$

$$\mathbf{B}_{\gamma\alpha}^{\kappa} = \tilde{\mathcal{F}}_{l\kappa}^{-1}\left[\sum_{\beta=1}^{m}\boldsymbol{E}_\beta(\zeta_l)\ \mathrm{p.v.}\int_{S_\alpha}\hat{H}(\boldsymbol{x}_\gamma,\boldsymbol{y},\lambda_\beta^l)dS_y\right] \tag{6}$$

ここで, S_α は要素領域であり, $\hat{G}$, $\hat{H}$ は 3 次元音響波動問題に対するラプラス変換領域基本解, 及びその法線方向勾配である. また, $\tilde{\mathcal{F}}_{l\kappa}^{-1}$ は次で定義される離散逆フーリエ変換である.

$$\tilde{\mathcal{F}}_{l\kappa}^{-1}[\phi_l] = \frac{\mathcal{R}^{-\kappa}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\phi_l \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}\kappa l}{L}} \tag{7}$$

式 (5)–(7) に含まれる $\boldsymbol{E}_\beta, \zeta_l, \lambda_\beta^l, \mathcal{R}, L$ は IRK 法を用いた CQM のパラメータであり, 詳細は文献 [7] を参照されたい.

式 (4) は第 n ステップ目の境界値に関する項のみ左辺, その他を右辺に移行すると, 次のように書くことができる.

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{j=1}^{m}\left[-A_{\gamma\alpha}^{ij;0}q_\alpha^{j;n} + \left(\frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{\alpha\gamma} + B_{\gamma\alpha}^{ij;0}\right)p_\alpha^{j;n}\right] \\ &\quad = p_\gamma^{\mathrm{in};i;n} + \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{j=1}^{m}\left[A_{\gamma\alpha}^{ij;n-k}q_\alpha^{j;k} - B_{\gamma\alpha}^{ij;n-k}p_\alpha^{j;k}\right]\end{aligned} \tag{8}$$

ここで, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである. 左辺に含まれるゼロステップ目の影響関数 $A_{\gamma\alpha}^{ij;0}$, $B_{\gamma\alpha}^{ij;0}$ は式 (5), (6) に含まれている逆フーリエ変換を行うことなく直接計算できることが知られている [7]. さらに, ゼロステップ目の影響関数は波動が数ステップで到達する範囲以外切り捨てることが可能であるため, バンド行列となり, 計算量, 必要メモリ量, 共に $O(M)$ となる. そのため, 式 (8) 右辺の遅延ポテンシャル項の計算に CQ-BEM の計算コストは依存する. 以下では, FMM, 及び高速畳込み演算 [9] を用いた遅延ポテンシャル計算の高速化について説明する.

3. 時間ステップ解析

式 (8) 右辺の行列-ベクトル積の計算手順を説明するため, 例として, $A_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$ に関する項を取り上げる. なお, $B_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$ に関する項も計算手順は全く同様である. $A_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$ に関する行列-ベクトル積は, 空間に関しては正方行列と境界値ベクトルの演算である. しかしながら, 時間方向に関しては Fig. 2 に示すような左下三角形 Toeplitz 行列と過去の時刻ステップにおける境界値ベクトルとの演算である. そのため, 高速畳込み演算 [9] による高速化が可能である. 以下では, 時間方向に関する計算手順の説明を行うため, 空間に関する添字 α, γ, 及びその総和記号を適宜省略する.

式 (8) 右辺の $A_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$ に関する項は次のように書ける.

$$\mathbf{u}^n = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-k}\mathbf{q}^k \tag{9}$$

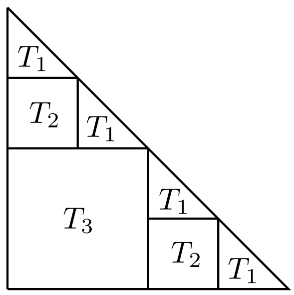

Fig. 2　Matrix structure for time.

ここで, $(\mathbf{q}^k_\alpha)_j = q^{j;k}_\alpha$ である. 高速畳込み演算によって畳込み積分を評価することを考えると, 第 n ステップ目に計算する必要がある行列-ベクトル積は, Fig. 2 中のあるブロック行列と過去のステップにおける境界値ベクトルとの積であり, 具体的には次式である.

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{v}^n\\ \mathbf{v}^{n+1}\\ \vdots\\ \mathbf{v}^{n+h-1}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccc}\mathbf{A}^h & \mathbf{A}^{h-1} & \cdots & \mathbf{A}^1\\ \mathbf{A}^{h+1} & \mathbf{A}^h & \cdots & \mathbf{A}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{A}^{2h-1} & \mathbf{A}^{2h-2} & \cdots & \mathbf{A}^h\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\mathbf{q}^{n-h}\\ \mathbf{q}^{n-h+1}\\ \vdots\\ \mathbf{q}^{n-1}\end{array}\right\} \tag{10}$$

そのため, 毎ステップ, h を適切に変化させ, 式 (10) の行列-ベクトル積を計算し, 式 (9) の $\mathbf{u}^\kappa$ を $\mathbf{u}^\kappa + \mathbf{v}^\kappa \Rightarrow \mathbf{u}^\kappa$ $(\kappa = n, ..., n+h-1)$ として更新すれば時間ステップ解析を行える. 高速畳込み演算を用いるため, 式 (10) の計算をフーリエ像空間で行うことを考える. このとき必要な離散逆フーリエ変換 (7) に対応する離散フーリエ変換は次で与えられる.

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\kappa l}[\phi_\kappa] = \mathcal{R}^l \sum_{\kappa=0}^{L-1} \phi_\kappa \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}\kappa l}{L}} \tag{11}$$

また, フーリエ像空間における影響関数は次のように表される.

$$\tilde{\mathbf{A}}^l_{\gamma\alpha} = \tilde{\mathcal{F}}_{\kappa l}\left[\mathbf{A}^\kappa_{\gamma\alpha}\right] = \sum_{\beta=1}^{m} \boldsymbol{E}_\beta(\zeta_l)\int_{S_\alpha} \hat{G}(\boldsymbol{x}_\gamma, \boldsymbol{y}, \lambda^l_\beta) dS_y \tag{12}$$

以上を考慮すると, 式 (10) 右辺の行列-ベクトル積は次のような手順で計算することができる.

1. $2h$ 個の成分を持つベクトル $\{\mathbf{q}^{n-h}, ..., \mathbf{q}^{n-1}, 0, ..., 0\}^T$ を式 (11) によってフーリエ変換する.

$$\{\tilde{\mathbf{q}}^0, ..., \tilde{\mathbf{q}}^{2h-1}\}^T = \tilde{\mathcal{F}}\left[\{\mathbf{q}^{n-h}, ..., \mathbf{q}^{n-1}, 0, ..., 0\}^T\right] \tag{13}$$

2. フーリエ像空間における影響関数 (12) と式 (13) 左辺のベクトルを掛けあわせ, 式 (7) によって逆フーリエ変換する.

$$\{\mathbf{w}^0, ..., \mathbf{w}^{2h-1}\}^T = \tilde{\mathcal{F}}^{-1}\left[\{\tilde{\mathbf{A}}^0\tilde{\mathbf{q}}^0, ..., \tilde{\mathbf{A}}^{2h-1}\tilde{\mathbf{q}}^{2h-1}\}^T\right] \tag{14}$$

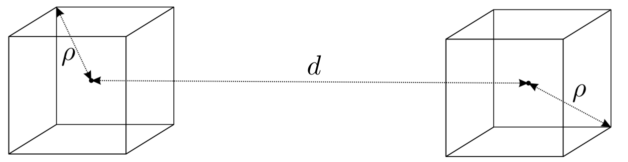

Fig. 3　FMM cells for M2L translation.

このとき, 空間に関する行列-ベクトル積を FMM によって高速に計算する. また, $\overline{(\ )}$ を複素共役とすると, 次の関係が成り立つ.

$$\tilde{\mathbf{A}}^{2h-l}\tilde{\mathbf{q}}^{2h-l} = \overline{\tilde{\mathbf{A}}^l\tilde{\mathbf{q}}^l} \quad (l = 1, ..., h-1) \tag{15}$$

そのため, 式 (14) 右辺の計算は実質 $h+1$ 個である.

3. 式 (10) 左辺と式 (14) 左辺には次の関係が成り立つ.

$$\left\{\mathbf{v}^n, ..., \mathbf{v}^{n+h-1}\right\}^T = \left\{\mathbf{w}^h, ..., \mathbf{w}^{2h-1}\right\}^T \tag{16}$$

そのため, 対応する $\mathbf{w}^\kappa$ を用いて $\mathbf{u}^\kappa$ を更新する.

以上の計算に含まれる全てのフーリエ変換, 逆変換に対して FFT を用いるには, $L = 2h$ とすればよい. また, $\mathcal{R}$ は CQM の誤差パラメータ ϵ を用いて, $\mathcal{R} = \epsilon^{\frac{1}{2L}}$ とした [13].

ここで, 全体の計算量についてまとめておく. 主要な計算量は, FMM による行列-ベクトル積計算が $O(NM\log N)$〜$O(NM\log N\log M)$, FFT による計算が $O(NM\log^2 N)$ である. しかしながら, 一般的に FFT の計算量よりも FMM の計算量が大きくなると考えられるため, 実質的には $O(NM\log N)$〜$O(NM\log N\log M)$ と考えて良いと思われる. 一方, 主要な必要メモリ量はバンド行列に $O(M)$, 境界値ベクトルに $O(NM)$ であり, 合計 $O(NM)$ である.

4. 新しい M2L の切り捨てについて

本論文では FMM の詳細については省略するが, 高速畳込み演算を用いることによって可能となる新しい M2L の切り捨てに関して説明する. これまでに, 著者ら [7] はラプラス変換領域基本解の減衰特性を利用し, ラプラスパラメータ, 及びセル同士の距離を用いた M2L の切り捨てを行ってきた. 本提案手法では, この従来の切り捨てに加え, 新しい判定条件によっても切り捨てを行い, 計算のさらなる高速化を図る.

本研究では, FMM に立方体セル構造を用いるため, Fig. 3 のように, 二つのセルの中心間距離が d, それぞれのセルの対角長の半分が ρ であるセル同士に対する M2L を考える. 式 (10) より, 第 n ステップ目の遅延ポテンシャル計算には, 第 1 ステップから第 $2h-1$ ステップまでの影響関数を用いることがわかる. そのため, 影響波動の到達時刻を考慮すると, 次の条件が成り立つセル同士の M2L は切り捨てることができる.

$$c\Delta t(2h-1+c_m) < d - 2\rho \tag{17}$$

このとき, セル間最小距離を $d-2\rho$ で代用している. この切り捨ては Fig. 2 に示すブロック行列が小さいほど多くの係数を切り捨てられるため, 対角付近のブロック行列の計算に対して効果的であると考えられる.

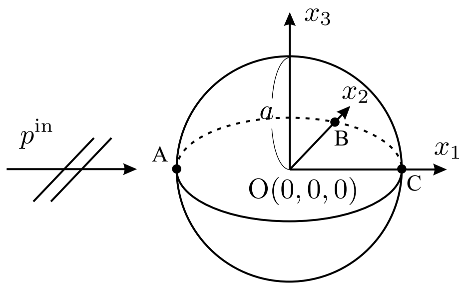

Fig. 4　Plane acoustic wave scattering by a rigid sphere.

5. 数値解析例

本提案手法の有効性を示すために, 本節ではいくつかの数値解析例を示す. 本論文の全ての解析において, 入射波は次で表される x_1 方向に伝搬する平面波とした.

$$p^{\rm in}(\boldsymbol{x}, t) = p_0 \left(1 - \cos 2\pi\Lambda\right) H(\Lambda) H(1 - \Lambda) \tag{18}$$

$$\Lambda = \frac{ct - (x_1 - \chi)}{\lambda^{\rm in}} \tag{19}$$

ここで, p_0 は入射波の振幅, $\lambda^{\rm in}$ は中心周波数に対応する波長である. また, χ は $t = 0$ における波面の位置ベクトルの x_1 方向成分であり, H は Heaviside のステップ関数である. 計算パラメータは全ての解析において, $\lambda^{\rm in}/a = 1.0$, $c\Delta t/a = 0.069$, $\epsilon = 10^{-12}$ とし, 3 段 5 次の Radau ⅡA 法 (14) を IRK 法として CQM に用いた.

5.1. 計算コスト, 精度の検証

まず, 計算コスト, 精度の検証のために, Fig. 4 に示すような半径 a の球形の散乱体に平面波を入射したときの初期値・境界値問題の解析結果を示す. 散乱体表面における境界条件は $q = 0$ とし, $\chi = -a$ とした.

要素数 M, 及び総時間ステップ数 N, それぞれを変化させたときの計算時間を Fig. 5, 6 に示す. これらの計算は全て, 何の並列化処理も施さずに計算を実行した. また, 図中の Conv. は従来の高速畳込み演算を用いていない CQ-FMBEM(7) の計算時間であり, 黒の実線はそれぞれの回帰直線である. Fig. 5 は総時間ステップ数を $N = 128$ で固定し, 要素数 M を変化させたときの結果である. Fig. 5 より, 計算量は要素数 M に対して, $O(M \log M)$ 程度であることがわかる. 一方, Fig. 6 は要素数を $M = 3176$ で固定し, 総時間ステップ数を変化させたときの結果であり, 計算量は総時間ステップ数 N に対して, $O(N \log N)$ 程度になっていることがわかる. そのため, 全体の計算量は概ね $O(NM \log N \log M)$ 程度であると考えられる. なお, 必要メモリ量は Fig. 5, 6 の計算では, $N = 128$, $M = 24{,}912$ のとき最大であり, 1.4GB 程度要した.

次に, 本論文で導入した M2L 切り捨ての状況を示す. Fig. 7 (a) に従来の M2L 切り捨てのみ (7) の場合, (b) には新旧両方の切り捨てを用いた場合, それぞれの Toeplitz 行列中のブロック行列における M2L 切り捨て状況を示す. Fig. 7 には, $N = 128$, $M = 3176$ の場合の M2L 全体の数に対する切り捨て数の割合をプロットしている. ここで, 同サイズのブロック行列における切り捨て状況は同じになるため, それぞれのサ

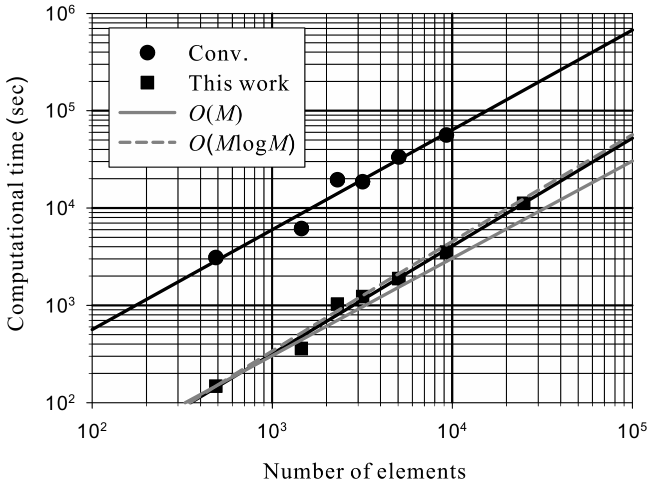

Fig. 5　Computational time varying number of elements M when $N = 128$.

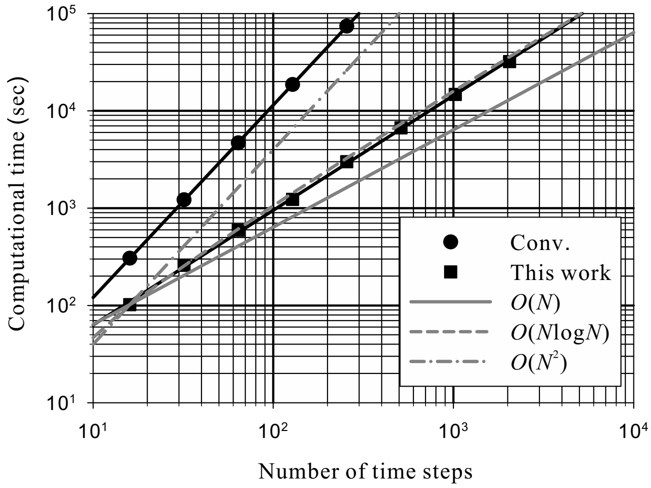

Fig. 6　Computational time varying number of time steps N when $M = 3176$.

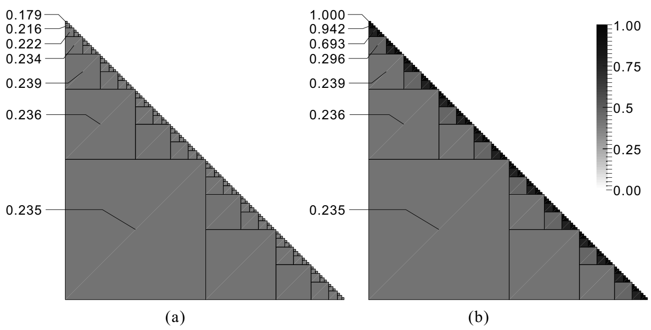

Fig. 7　Truncation ratio of M2L moments for each block matrices in triangular Toeplitz system using (a) only conventional truncation condition and (b) both conventional and presented truncation conditions when $N = 128$ and $M = 3176$.

イズに対して具体的な数値を図示している. Fig. 7 より, 本手法では, 対角付近のブロック行列において, 多くの M2L が切り捨てられている様子がわかる. 前述したとおり, これは対角付近の小さなブロック行列には早い時刻までの影響関数しか含まれていないためである. このときの全体の計算時間は (a) 1,365sec, (b) 1,231sec であり, 新たな M2L 切り捨てによる

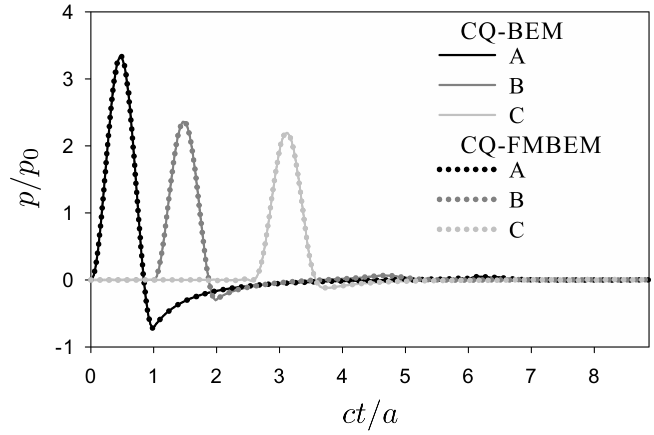

Fig. 8　Time histories of pressure at points A, B, and C obtained by CQ-BEM[15] and proposed CQ-FMBEM.

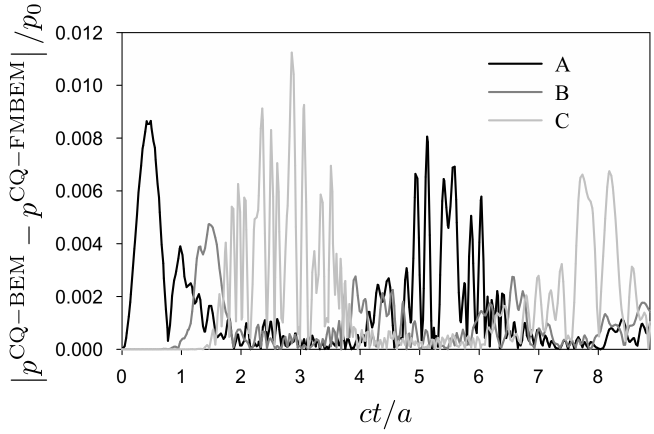

Fig. 9　Absolute errors of pressure at points A, B, and C caused by acceleration techniques, FMM and rapid convolution algorithm[9].

削減は全体の 1 割程度であった. しかしながら, M2L 切り捨て条件 (17) からわかるように, 波動が到達しないセル間の M2L が増えれば, M2L 切り捨ての効果は大きくなる. そのため, 時間増分と波速に対して解析領域が大きくなれば, 切り捨てされる M2L が増加し, 計算効率は向上すると考えられる.

高速化における計算精度の検証を行うために, 何の高速化も施していない CQ-BEM[15] との数値解の比較を行う. Fig. 8 に高速化を施していない CQ-BEM, 及び本手法 (CQ-FMBEM) の点 A, B, C (Fig. 4 参照) における圧力の時刻歴波形を示す. Fig. 8 より, 全ての点において両波形は良く一致しており, 違いがほぼ読み取れないことがわかる. 一方, Fig. 9 には, 各時刻における高速化を施していない場合の解 $p^{\text{CQ-BEM}}$ と本手法による解 $p^{\text{CQ-FMBEM}}$ の絶対誤差を示す. Fig. 9 より, 本手法による解は良好であり, 高速化に起因する誤差は小さいことがわかる.

本研究で適用を行った高速畳込み演算に起因する誤差は, ほぼ FFT による丸め誤差のみである. また, 新しい M2L の切り捨てに依存する誤差は小さいと考えられる. 一方, FMM では, 多重極展開し無限和で表される基本解を有限和で打ち切っているため, その展開項数に依存して誤差が発生する. そのため, Fig. 9 中の誤差の大部分は FMM に起因するものであると考えられる.

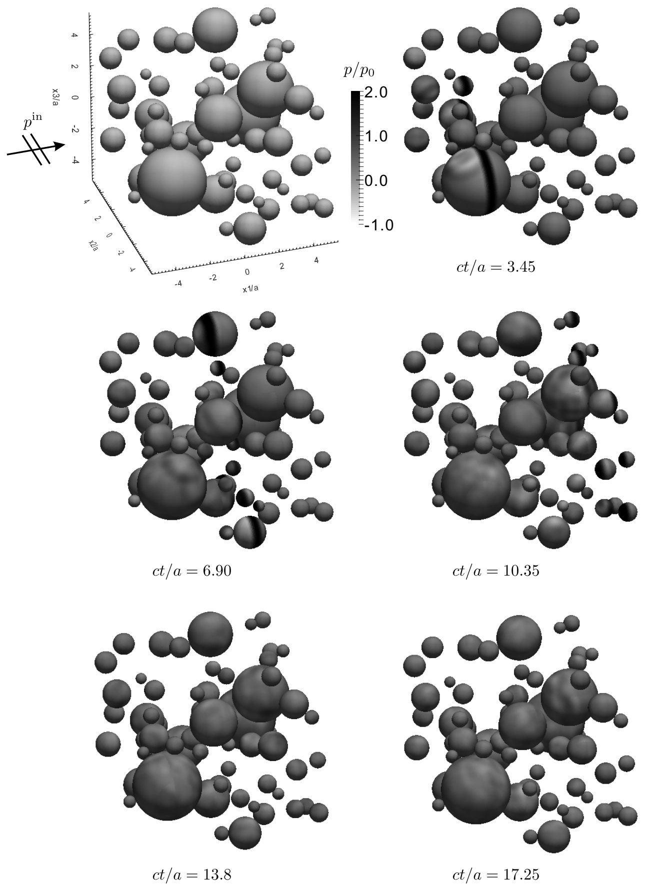

Fig. 10　Geometry of scatterers and pressure p/p_0 on scatterers at several time steps.

5.2. 大規模解析例

最後に, 大規模解析例として, Fig. 10 左上に示すような 64 個のサイズ, 配置共にランダムな球形の散乱体による散乱問題の解析結果を示す. 散乱体の半径は $0.3a$ から $2.0a$ であり, 原点を中心とする一辺が $11.0a$ の立方体の内部に配置されている. なお, 散乱体表面における境界条件は $q = 0$, 式 (19) 中の χ は $\chi = -5.5a$ とした. また, 総時間ステップ数は $N = 256$ とし, 散乱体表面は合計 166,304 個の三角形平面要素によって分割した. Fig. 10 には散乱体表面の圧力 p/p_0 をプロットしている. Fig. 10 より, 入射平面波が散乱体によって多重散乱されながら伝搬していく様子が見て取れる. また, 解が発散せずに安定に計算を行えていることがわかる. 本計算は OpenMP による並列化を施し, 24 スレッドで計算を実行した. このとき要した計算時間は 33,686sec, 必要メモリ量は 8.3GB であった.

6. まとめ

本論文では, 高速畳込み演算を 3 次元音響波動問題に対する CQ-FMBEM に適用し, 時間方向に対する高速化を行った. また, 適用に伴い, 新たな M2L 切り捨ての判定条件を導入し, さらなる計算の高速化を図った. 数値解析例からは, 全体の計算量が $O(NM \log N \log M)$ 程度であること, 及び計算精度が良好であることを示した. 本研究で用いた高速多重極法は積

分核に依存するが, 高速畳込み演算は依存しないため, 様々な問題への拡張は比較的容易である.

今後は, 本手法を境界非線形問題である接触条件を考慮したき裂による散乱問題 [16] に適用し, 長時間の過渡応答解析を実行する予定である.

謝辞： 本研究は JSPS 特別研究員奨励費 26010235 の助成を受けたものです. この場をお借りして感謝申し上げます.

参考文献

(1) T. Saitoh, F. Chikazawa, and S. Hirose: Convolution quadrature time-domain boundary element method for 2-D fluid-saturated porous media, *Appl. Math. Model.*, **38** (2014), pp.3724–3740.

(2) M. Schanz and H. Antes: Application of 'operational quadrature method' in time domain boundary element methods, *Meccanica*, **32** (1997), pp.176–186.

(3) 斎藤隆泰, 石田貴之, 福井卓雄, 廣瀬壮一: 演算子積分法および高速多重極法を用いた新しい二次元時間領域動弾性境界要素法について, 応用力学論文集, **11** (2008), pp.193–200.

(4) N. Nishimura: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, *Appl. Mech. Rev.*, **55** (2002), pp.299–324.

(5) M. Bebendorf: Hierarchical matrices, (2008), Springer.

(6) 吉川仁, 松浦亮介, 西村直志 : Lubich の CQM を用いた時間域境界積分方程式法の ACA による高速化について, 土木学会論文集 A2 (応用力学), **69** (2013), pp.I_187–I_193.

(7) 丸山泰蔵, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: 3 次元スカラー波動問題に対する陰的 Runge-Kutta 法を用いた演算子積分時間領域高速多重極境界要素法, 土木学会論文集 A2(応用力学), **69** (2013), pp.I_175–I_185.

(8) 伊海田明宏, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: ACA を用いた, 演算子積分時間領域境界要素法の効率化, 計算数理工学論文集 (JASCOME), **13** (2013), pp.127–132.

(9) E. Hairer, C. Lubich, and M. Schlichte: Fast numerical solution of nonlinear Volterra convolution equations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **6** (1985), pp.532–541.

(10) L. Banjai and M. Schantz: Wave propagation problems treated with convolution quadrature and BEM, *Lect. Notes Appl. Comput. Mech.*, **63** (2012), pp.145–184.

(11) L. Banjai and M. Kachanovska: Fast convolution quadrature for the wave equation in three dimensions, *J. Comput. Phys.*, **279** (2014), pp.103–126.

(12) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, (2000) 京都大学学術出版会.

(13) C. Lubich and A. Ostermann: Runge-Kutta methods for parabolic equations and convolution quadrature, *Math. Comp.*, **60** (1993), pp.105–131.

(14) E. Hairer and G. Wanner 著, 三井斌友監訳: 常微分方程式の数値解法 II, (2002), Springer.

(15) 丸山泰蔵, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: 陰的 Runge-Kutta 法を用いた演算子積分時間領域境界要素法及び 3 次元スカラー波動問題への応用, 計算数理工学論文集 (JASCOME), **12** (2012), pp.91–96.

(16) 丸山泰蔵, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: CQ-BEM を用いた非線形超音波法の 3 次元数値シミュレーション, 土木学会論文集 A2(応用力学), **70** (2014), pp.I_235–I_246.