

境界要素法を用いたクロッキングデバイスの レベルセット法に基づくトポロジー最適化

A TOPOLOGY OPTIMISATION OF CLOAKING DEVICES

BASED ON THE LEVEL SET METHOD USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

中本 謙太¹⁾, 飯盛 浩司²⁾, 高橋 徹³⁾, 松本 敏郎⁴⁾

Kenta NAKAMOTO, Hiroshi ISAKARI, Toru TAKAHASHI and Toshiro MATSUMOTO

- 1) 名古屋大学工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: k_nakamoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)
2) 名古屋大学工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: isakari@nuem.nagoya-u.ac.jp)
3) 名古屋大学工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)
4) 名古屋大学工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

These days, cloaking is attracting attention because of the rapid progress of researches on metamaterial. Cloaking is a technology to make an object invisible by arrangements of dielectric materials. In order to design the cloaking device, it is possible to employ the topology optimisation. The topology optimisation makes it possible to determine an optimal allocation of dielectric materials for cloak based on mathematical verification. Generally, finite element method (FEM) is involved in the algorithm of the optimisation. FEM is, however, not the best choice for the optimisation of wave devices due to its meshing cost. In this study, we employ the boundary element method (BEM), which needs less numerical cost to generate mesh. We develop a topology optimisation to design cloaking devices using BEM and confirmed the effectiveness of the proposed method for both TE and TM polarised problems. Furthermore, in order to deal with the modes simultaneously, we have employed the KS function as the objective function.

Key Words : Cloak, Topology optimisation, Boundary Element Method, Level set method

1. 緒言

近年, 電磁メタマテリアル研究の急速な進展により, 従来の技術では実現困難であったデバイスの実現に注目が集まっている. その中でも, 最も有名な例の一つにクロッキングデバイスが挙げられる. クロッキングとは対象物の周囲に誘電体などの物質を配置することにより光の軌道を対象物を迂回するように制御し, あたかも対象物が透明化したかのように見せかける技術のことである. 一般にクロッキングデバイスは電磁メタマテリアルを周期的に配置することにより設計される⁽¹⁾. しかしながらこの方法では, 電磁波の共振現象を利用するためエネルギーの損失が生じるという欠点を有している. また, メタマテリアルの配置は試行錯誤的であって, 必ずしも最適な形状とは限らないという問題点がある.

一方で, コンピュータシミュレーションを用いた構造設計手法としてトポロジー最適化が注目を集めている. この方法

は, トポロジーの変化を許容した最適設計が可能な最も設計自由度の高い構造最適化手法である. この方法を用いることにより数学的根拠に基づいて最適形状を決定することができる. これまでに弾性波デバイス, 音響デバイス, 電磁デバイス, 熱デバイスなど様々な分野においてトポロジー最適化に関する研究が成されている^(2, 3, 4, 5, 6).

クロッキングデバイスの設計に対しては, Fujii らが有限要素法を用いたトポロジー最適化により, 2次元平面内において TM モードの電磁波の入射に対するクロッキングデバイスの設計が可能であることを示した⁽⁷⁾. しかしながら, 有限要素法では, 解析領域全体にわたってメッシュを生成する必要がある. 波動問題におけるトポロジー最適化においては, 形状を正確に表現しておくことが解析精度の観点から重要であり, 形状を更新するたびにメッシュを再生成することが望ましい. 有限要素法を用いる場合, それにかかるコストが大きくなる問題となる. また, 有限要素法では波動問題で扱う必要

のある無限領域を有限領域として近似して扱うため、十分な解析精度を得るには広い解析領域を必要とし、大規模な構造の最適化に対しては不向きであると言える。一方、境界要素法の場合、メッシュの生成は境界のみでよいことに加え、無限領域を近似を用いずに厳密に評価可能であるという利点から波動問題におけるトポロジー最適化に適していると言える。しかしながら、境界要素法を用いたトポロジー最適化によりクロウキングデバイスを設計した例はない。これは、境界要素法が有限要素法に比べて定式化が難しく、コーディングが煩雑となることや、高速化手法を用いない場合に計算時間が膨大となることが理由であると推測される。

そこで本研究では、境界要素法を用いたトポロジー最適化による2次元電磁波動問題におけるクロウキングデバイスの設計手法を開発した。いくつかの数値例によりTEモード、TMモードそれぞれの電磁波の入射に対するクロウキングデバイスの設計に対して本手法が有効であることを実証する。また、TEモード、TMモードそれぞれの散乱波の大きさを引数とするKS関数を新たな目的関数として定義することにより、いずれのモードの入射波に対してもクロウキングの効果を有する構造を設計することが可能であることを示す。

2. 2次元電磁場波動問題の定式化

本研究では、二次元平面内に真空領域 Ω_1 、誘電体領域 Ω_2 そして完全導体領域 Ω_p が存在する状況を考える (Fig. 1)。TEモードにおける磁場を変数 u で表すと、 u は以下のHelmholtz方程式および境界条件を満足する。

$$\Delta u + k_1^2 u = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad (1)$$

$$\Delta u + k_2^2 u = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_2, \quad (2)$$

$$u^1 = u^2 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_d, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^1 = \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_d, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p, \quad (5)$$

$$\text{放射条件} \quad \mathbf{x} \rightarrow \infty \quad (6)$$

また、TMモードにおける電場を変数 u で表すと、 u は以下のHelmholtz方程式および境界条件を満たす。

$$\Delta u + k_1^2 u = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad (7)$$

$$\Delta u + k_2^2 u = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_2, \quad (8)$$

$$u^1 = u^2 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_d, \quad (9)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^1 = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_d, \quad (10)$$

$$u = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p, \quad (11)$$

$$\text{放射条件} \quad \mathbf{x} \rightarrow \infty \quad (12)$$

ここに、右肩の数字 i は領域 Ω_i から境界への極限值を表し、 Γ_d は誘電体の境界、 Γ_p は完全導体の境界を表す。 $\partial/\partial n$ は境界 Γ_d, Γ_p 上における法線方向微分を表す。また、 k_i は領域 i における波数であり、透磁率 μ_i 、誘電率 ε_i を用いて以下で表

される。

$$k_i = \omega \sqrt{\mu_i \varepsilon_i} \quad (13)$$

本研究では、境界要素法を用いることにより、これらの問題を離散化して解く。その際、見かけの固有値問題に対処するために、PMCHWT定式化を用いる(8)。

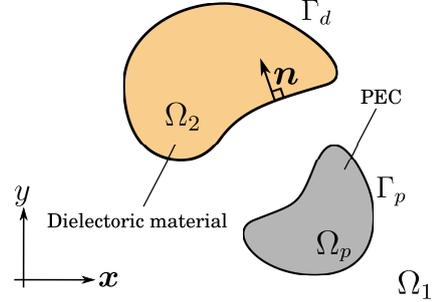


Fig. 1 Definition of symbols.

3. クロウキングデバイスのトポロジー最適化

本研究では、真空領域 Ω_1 内に置かれた完全導体の周囲に設計領域を設け、設計領域内に誘電体を配置することにより完全導体を不可視化するような誘電体の形状を求める (Fig. 2)。誘電体の形状表現には次節で述べるレベルセット関数 ϕ を用いる。クロウキングデバイスの構造最適化においては、目的関数は領域積分により定義する場合が多いが、境界要素法との相性を鑑み、本研究では波長に対して十分に配置した観測点 \mathbf{x}^{obs} における散乱場の大きさの和として定義する。すなわち本研究で扱う最適化問題は以下のようなものである。

$$\begin{aligned} & \text{find } \phi \\ & \text{such that } \min J \\ & J = \sum_{p=1}^P |u(\mathbf{x}_p^{\text{obs}}) - u^{\text{inc}}(\mathbf{x}_p^{\text{obs}})|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

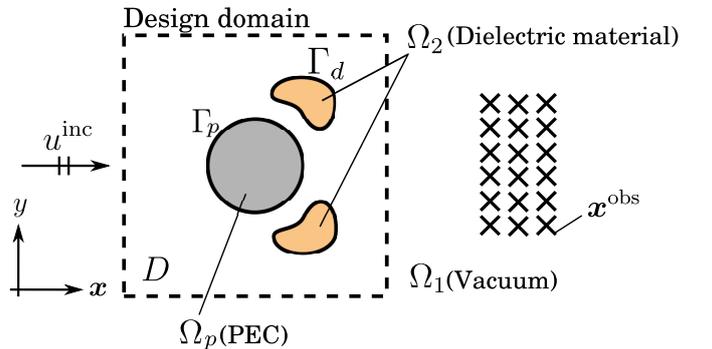


Fig. 2 Topology optimisation of cloaking devices.

ここに、 J は目的関数であり、 p は観測点の番号、 P は観測点の総数を表す。また、制約条件として、境界値問題(1)-(6)あるいは(7)-(12)を要求する。本節ではレベルセット関数 ϕ を用いた設計対象の形状表現方法および形状更新方法について述べた後、形状の更新の際に必要なトポロジー導関数について述べる。

3.1. レベルセット法による形状表現

本研究では、設計対象の形状表現にレベルセット法を用いる (6, 9)。この方法では、設計領域内の各点においてレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ を定義し、 $\phi(\mathbf{x})$ の値に応じて、以下のように設計対象の内部、境界、外部を区別する。

$$\Omega_1 = \{\mathbf{x} \mid 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1\} \quad (15)$$

$$\Gamma_d = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}) = 0\} \quad (16)$$

$$\Omega_2 = \{\mathbf{x} \mid -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0\} \quad (17)$$

この方法を用いることにより、設計対象の形状を決定する問題は、レベルセット関数の分布を求める問題に帰着する。なお、本問題における ϕ の定義域は $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_p}$ である。

3.2. 形状の更新

設計対象の形状更新は以下の反応拡散方程式を見かけの時間 t について解き、レベルセット関数を更新することによって表現する。

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -CT(\mathbf{x}) + \tau L^2 \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) \quad (18)$$

ただし、設計領域の境界上および Γ_p 上では境界条件として $\phi = 1$ を課す。式 (18) の右辺第一項はレベルセット関数更新の方向と大きさを決定する項である。 C はレベルセット関数更新の幅を調節する定数、 $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ は設計領域内の点 \mathbf{x} に微小な円形の領域が発生した際の目的関数の変化量を表すもので、トポロジー導関数と呼ばれる。また、式 (18) の右辺第二項は更新の結果得られる形状の複雑さを調節する項である。 τ は定数、 L は設計領域の代表長さを表す。

3.3. トポロジー導関数

トポロジー導関数は以下の式で定義される。

$$\delta J = \mathcal{T}(\mathbf{x})s(\varepsilon) + o(s(\varepsilon)) \quad (19)$$

ここに、 δJ は目的関数の変分、 $s(\varepsilon)$ は微小円の面積を表す。TE モード、TM モードにおけるトポロジー導関数をそれぞれ $\mathcal{T}_e, \mathcal{T}_m$ とおくと、領域 Ω_i に Ω_j が発生する際に、これらは以下のように求められる (10)。

$$\mathcal{T}_e = \Re \left[\frac{2(\varepsilon_j - \varepsilon_i)}{\varepsilon_i(\varepsilon_i + \varepsilon_j)} \nabla u \cdot \nabla \tilde{u} \right] \quad (20)$$

$$\mathcal{T}_m = \Re [k^2(\varepsilon_i - \varepsilon_j)u\tilde{u}] \quad (21)$$

\tilde{u} は以下で定義される随伴問題の解である。

$$\alpha_1 \Delta \tilde{u} + \beta_1 \tilde{u} + \sum_{p=1}^P \frac{\partial J}{\partial u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p^{\text{obs}}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad (22)$$

$$\alpha_2 \Delta \tilde{u} + \beta_2 \tilde{u} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Omega_2 \quad (23)$$

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_d \quad (24)$$

$$\alpha_1 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right)^1 = \alpha_2 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right)^2 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_d \quad (25)$$

$$\text{放射条件} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (26)$$

ただし、 α_i, β_i は TE モードにおいて

$$\alpha_i = \frac{1}{\varepsilon_i} \quad (27)$$

$$\beta_i = \omega^2 \mu_i \quad (28)$$

TM モードにおいて

$$\alpha_i = \frac{1}{\mu_i} \quad (29)$$

$$\beta_i = \omega^2 \varepsilon_i \quad (30)$$

と定義する。

トポロジー最適化では、電磁場解析および随伴解析により求めた u, \tilde{u} を用いてトポロジー導関数 (20), (21) を計算し、それをもとに式 (18) を境界条件のもとで有限要素法により解くことにより、レベルセット関数を更新するというプロセスを繰り返すことにより最適形状を得る。

4. 数値シミュレーション

4.1. 問題設定

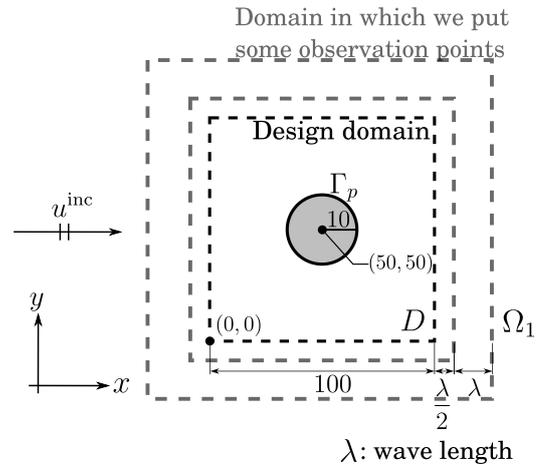


Fig. 3 Problem statement.

真空領域 Ω_1 内に、中心座標 $(50, 50)$ 、半径 10 の円形完全導体が置かれた状況を考え、この領域に x 軸の正方向に進行する平面波を入射する。入射波の波長 λ は 20 とした。設計領域 $D = [0, 100] \times [0, 100]$ を設け、観測点は設計領域の周囲を囲うように配置した。観測点を配置する領域と設計領域との距離は $\lambda/2$ 、観測点を配置する領域の幅は λ とした。また隣合う観測点同士の距離は波長の 10 分の 1 とし、合計 2290 点配置した。領域 Ω_1 における誘電率は $\varepsilon_1 = 1.0$ とした。観測点において目的関数を最小化するような誘電体の形状を決定する問題を考える。誘電体の誘電率は $\varepsilon_2 = 2.0$ とした。連立一次方程式のソルバは GMRES を用い、その許容誤差は 10^{-10} とした。

4.2. TE モード、TM モードそれぞれの散乱波を目的関数とする場合

各モードにおいて式 (14) で定義される目的関数をそれぞれ J_e, J_m とおき、これらを最小化する問題を考える。まず、領域 Ω_1 に完全導体のみが置かれた状況において、 $y = 10$ 上で式 (20), (21) によりトポロジー導関数を計算し、以下の式で表されるトポロジー差分と比較を行った。

$$\Delta \mathcal{T}_e = \frac{(J_e + \delta J_e) - J_e}{s(\varepsilon)} \quad (31)$$

$$\Delta \mathcal{T}_m = \frac{(J_m + \delta J_m) - J_m}{s(\varepsilon)} \quad (32)$$

ここに、 $\delta J_e, \delta J_m$ は半径 $\varepsilon = 0.005$ の円形誘電体を配置したときの目的関数の変化量である。Fig. 4, 5 に結果を示す。図からトポロジー導関数とトポロジー差分はよく一致しており、トポロジー導関数が正しく計算されていることがわかる。

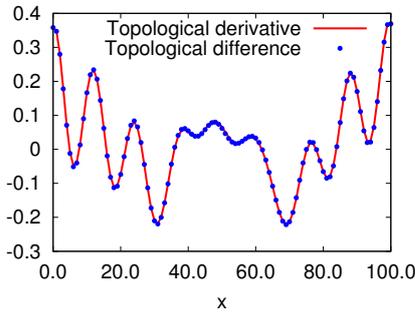


Fig. 4 Topological derivative (TE mode, $y=10$).

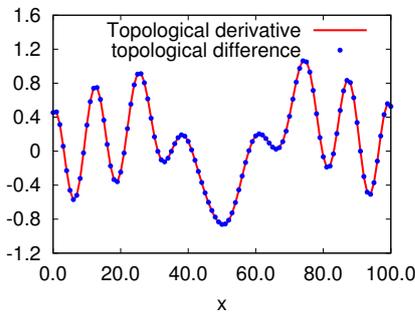


Fig. 5 Topological derivative (TM mode, $y=10$).

つづいてトポロジー最適化を行った結果を示す。初期形状は、誘電体の置かれていない状態におけるトポロジー導関数の値が負となり、かつ完全導体の中心からの距離が 50 以下となる領域に誘電体を配置したものとした。目的関数の推移を Fig. 6 に示す。図から最適化ステップの増加とともに目的関数が減少し、ステップ 60 付近では目的関数の変動がほとんどなくなり、収束していることが確認できる。

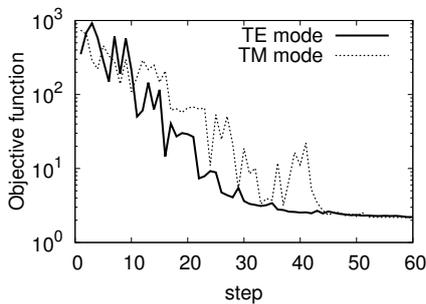


Fig. 6 History of objective function of each mode against the optimisation step.

各モードにおける、誘電体の初期形状およびステップ 60 における形状を Fig. 7, 8 に示す。また、これらの形状の誘電体を配置した際の磁場 (TE モード) および電場 (TM モード) の様子を Fig. 9, 10 に示す。Fig. 9, 10 から最適形状の誘電体を配置した場合、各モードの入射波に対して電場および磁

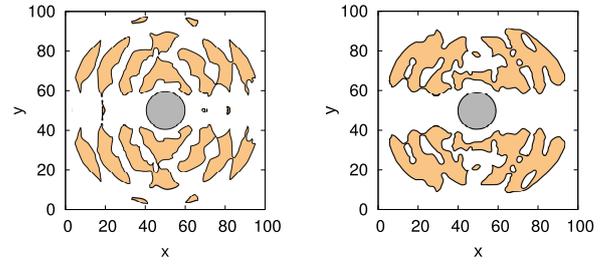


Fig. 7 Shape of dielectric in the case of TE mode (left : initial shape, right : optimal shape(step 60)).

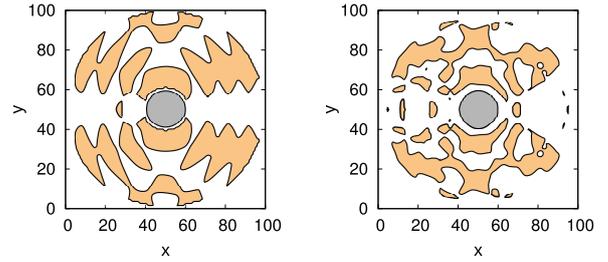


Fig. 8 Shape of dielectric in the case of TM mode (left : initial shape, right : optimal shape(step 60)).

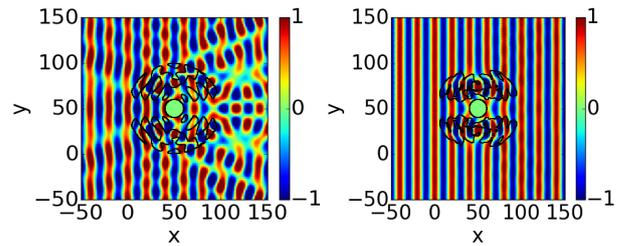


Fig. 9 Magnetic field in the case of TE mode (left : step 0, right : step 60).

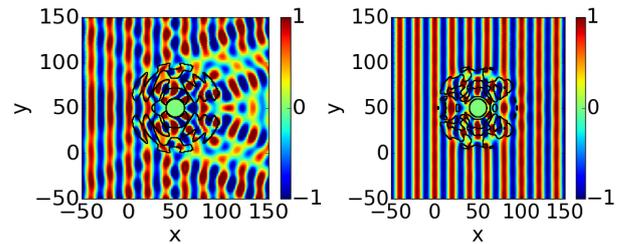


Fig. 10 Electric field in the case of TM mode (left : step 0, right : step 60).

場の様子が平面波とほぼ同様になっていることがわかり、クローキングの効果が確認できる。また、Fig. 7, 8 から各モードにおける最適形状は大きく異なり、それぞれのモードの入射波に特化した形状が得られていると考えられる。

TE モードにおける最適形状の誘電体を配置した領域に TM モードの電磁波を入射した際の電場の様子、および TM モードにおける最適形状の誘電体を配置した領域に TE モードの電磁波を入射した際の磁場の様子を Fig. 11 に示す。また、その際の目的関数の値は Table. 1 のようになった。

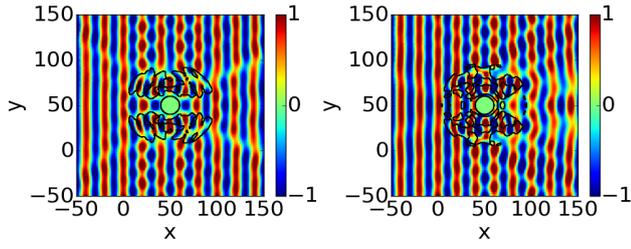


Fig. 11 left : electric field in the case that TM mode incident wave enters the optimal structure of TE mode, right : magnetic field in the case that TE mode incident wave enters the optimal structure of TM mode.

Table 1 Objective function in the case that incident wave of each mode enters the domain in which we put the dielectric with optimal shape of each mode.

	optimal shape(TE)	optimal shape(TM)
TE incidence	$J_e = 2.21$	$J_m = 337.78$
TM incidence	$J_m = 201.40$	$J_e = 2.18$

これらの結果からも各モードで得られた最終形状はそれぞれのモードの電磁波の入射に特化した形状であることがわかる。

4.3. KS 関数を目的関数とする場合

TE モード, TM モードいずれの電磁波の入射に対してもクローキングの効果を示すデバイスの設計を目的として以下のように KS 関数を用いて目的関数を定義する。

$$J = \log(e^{w_e J_e} + e^{w_m J_m}) \quad (33)$$

ここに, w_e, w_m はそれぞれ重み係数を表す。KS 関数を用いた定義により, $J_e \gg J_m$ の場合は $J \simeq J_e$, $J_m \gg J_e$ の場合は $J \simeq J_m$ となる。このように目的関数を定義すると, 最適化の各ステップにおいて J_e, J_m のうち値の大きい方をより小さくするように形状が更新されるため, これらを同程度まで下げようとする最適設計が期待される。

式 (33) で定義される目的関数に対するトポロジー導関数 \mathcal{T} は通常的合成関数の微分として計算すればよいことが容易に分かり, 次式となる。

$$\mathcal{T} = \frac{w_e \mathcal{T}_e e^{w_e J_e} + w_m \mathcal{T}_m e^{w_m J_m}}{e^{w_e J_e} + e^{w_m J_m}} \quad (34)$$

前節と同様に, 領域 Ω_1 に完全導体のみが置かれた状況において, $y = 10$ 上で式 (34) によりトポロジー導関数を計算した。重み係数 w_e, w_m は 1 とした。なお, 指数部分の計算がオーバーフローするのを防ぐために以下で表される定数 c で散乱波の大きさを割ることにより, 正規化して計算を行った。

$$c = \frac{J_e^0 + J_m^0}{2} \quad (35)$$

ここに, J_e^0, J_m^0 は誘電体を配置しない場合の散乱波の大きさを表す。トポロジー差分と比較を行った結果は Fig. 12 のようになり, トポロジー導関数が正しく計算できていることが確認できる。

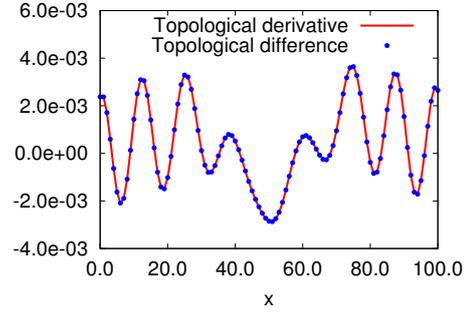


Fig. 12 Topological derivative in the case that the KS function is used as the objective function ($y=10$).

式 (33) で定義される目的関数を最小化しようとするトポロジー最適化を行った結果を示す。初期形状は誘電体の置かれていない状態におけるトポロジー導関数が負となり, かつ完全導体の中心からの距離が 50 以下となる領域に誘電体を配置したものとした。まず, TE, TM 各モードの散乱波の大きさ J_e, J_m の推移を Fig. 13 に示す。また, ステップ 160 における散乱波の大きさは Table. 2 のようになった。

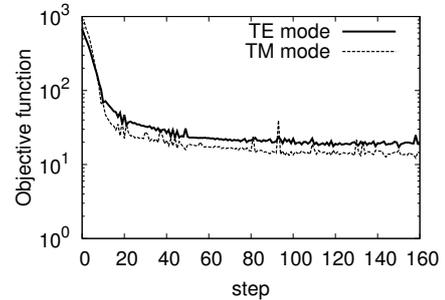


Fig. 13 History of scattering field of each mode in the case that the KS function is used as the objective function.

Fig. 13 より, 最適化ステップの増加とともに各モードにおける散乱波の大きさが小さくなっていく様子が見取れる。最終形状における散乱波の大きさは前節の結果 (Fig. 6) よりも大きくなったが, Table. 2 より両モードの入射に対して同程度まで散乱波が抑えられていることがわかり, この点においては, 前節の結果 (Table. 1) よりも優れていることが確認できる。

初期形状およびステップ 160 における誘電体の形状は Fig. 14 のようになった。初期形状およびステップ 160 における形状の誘電体を配置したときの TE モードにおける磁場を, Fig. 15 に, TM モードにおける電場を, Fig. 16 に示す。前節の結果 (Fig. 9, 10) と比べると, 若干のゆらぎが見受けられるが, KS 関数を用いた目的関数を用いることにより TE,

Table 2 Scattering field of each mode at step 160 in the case that the KS function is used as the objective function

	scattering field
TE incidence	$J_e = 18.80$
TM incidence	$J_m = 14.27$

TM 両モードの入射に対してある程度クローキングの効果を示す形状が得られたことが確認できる。

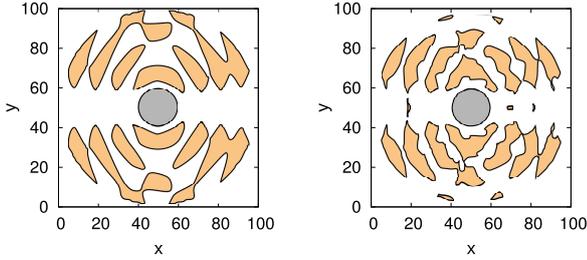


Fig. 14 Shape of dielectric in the case that the KS function is used as the objective function (left : initial shape, right : optimal shape (step 160)).

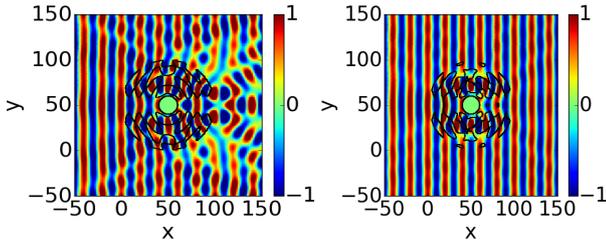


Fig. 15 Magnetic field of TE mode in the case that the KS function is used as the objective function (left : step 0, right : step 160).

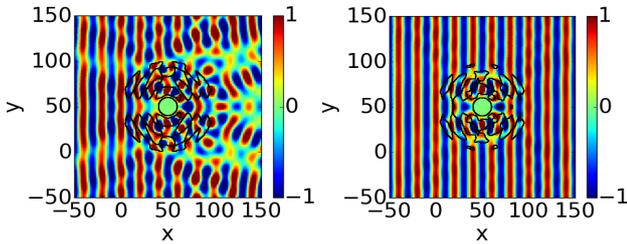


Fig. 16 Electric field of TM mode in the case that the KS function is used as the objective function (left : step 0, right : step 160).

5. 結言

境界要素法を用いたトポロジー最適化により TE, TM モードそれぞれの電磁場におけるクローキングデバイスの設計が可能であることを確認した。また, TE, TM モードそれぞれ

の散乱波を引数とする KS 関数を目的関数とすることにより, いずれのモードの電磁波の入射に対してもクローキングの効果を示す構造を設計することが可能であることを示した。

謝辞

本研究の一部は, JSPS 科研費 (26870269) の助成を受けて行ったものです。

参考文献

- (1) J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith. Controlling electromagnetic Fields. *science*, Vol. 312, pp. 1780–1782, 2006.
- (2) 近藤豊大, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. 3次元音響問題におけるレベルセット法と高速多重極法に基づくインピーダンス境界を有する散乱帯のトポロジー最適化. 計算理工学論文集, Vol. 14, pp. 19–24, 2014.
- (3) 興梠洋一, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. 3次元電磁波動問題における境界要素法を用いたトポロジー感度解析とそのレベルセット法に基づく構造最適化への応用について. 計算理工学論文集, Vol. 13, pp. 55–60, 2013.
- (4) 阿部史昌, 飯盛浩司. 境界要素法を用いた二次元動弾性問題におけるトポロジー感度解析について. 最適化シンポジウム講演論文集, Vol. 11, p. 5, 2014.
- (5) G. Jing, H. Isakari, T. Matsumoto, T. Yamada, T. Takahashi. level set-based topology optimization for 2D heat conduction problems using BEM with objective function defined on design-dependent boundary with heat transfer boundary condition. *Engineering Analysis with Boundary Elements* Vol. 61, pp. 61–70, 2015
- (6) H. Isakari, K. Kuriyama, S. Harada, T. Yamada, T. takahashi, and T. Matsumoto. A topology optimisation for three-dimensional acoustics with the level set method and the fast multipole boundary element method. *Mechanical Engineering Journal*, Vol. 1, No. 4, pp. 1–13, 2014.
- (7) G. Fujii, H. Watanabe, T. Yamada, T. Ueta, and M. Mizuno. Level set based topology optimisation for optical cloaks. *Applied Physics Letters*, Vol. 102, 2013.
- (8) W. C. Chew. Waves and fields in inhomogenous media. IEEE press New York, 1995.
- (9) T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki, and A. Takezawa. A topology optimisation method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45, pp. 2876–2891, 2010.
- (10) A. Carpio, and M.L. Rapun. Solving inhomogenous inverse problems by topological derivative methods. *Inverse problems*, Vol. 4, 2008.