

埋め込み境界法を適用した差分格子ボルツマン法の 境界誤差に関する研究

BOUNDARY ERROR ANALYSIS IN THE IMMERSED BOUNDARY-FINITE DIFFERENCE LATTICE BOLTZMANN METHOD

瀬田 剛¹⁾

Takeshi SETA

1) 富山大学大学院理工学研究部 (工学) (〒 930-8555 富山市五福 3190, E-mail: seta@eng.u-toyama.ac.jp)

In the present paper, we analytically and numerically investigate the boundary error computed by the immersed boundary-finite difference lattice Boltzmann method (IB-FDLBM). In the FDLBM calculation, we set the magnitude of the discrete velocity independently from the grid spacing. Rigorous analysis is performed in order to derive the analytical solutions for the velocity gradient, the boundary velocity, and the boundary error computed by the IB-FDLBM. We demonstrate the small magnitude of the discrete velocity is effective in decreasing the boundary error at high relaxation time in the numerical analyses of the symmetric shear flows and of the cylindrical Couette flows.

Key Words : Computational Fluid Dynamics, Finite Difference Lattice Boltzmann Method, Immersed Boundary Method, Boundary Error

1. はじめに

埋め込み境界法 (Immersed Boundary Method, IBM)⁽¹⁾ では, 等間隔のデカルト座標上に境界を構成する座標系を簡単に設定できることから, 格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, LBM)⁽²⁾ に IBM を適用した Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method (IB-LBM) の研究が, 盛んに行われている^(3, 4). 一方, IB-LBM では, 緩和時間 τ の値が 2 よりも大きくなると境界近傍において流速のズレが発生する問題点が理論的に証明されている⁽⁵⁾. Lu⁽⁶⁾ は Multi-Relaxation-Time (MRT) 衝突則⁽⁷⁾ を適用することで, 林⁽⁸⁾ は Two-Relaxation-Time (TRT) 衝突則⁽⁹⁾ を適用することで, 流速のズレが減少することを示した. 著者は, せん断流れに対する準一次元流れ解析において, 流速のズレと緩和時間との関係式を導出した後, 理論解と数値解とを比較することで, IB-LBM のズレの除去に対する TRT の有効性を証明した⁽¹⁰⁾. 差分格子ボルツマン法 (Finite Difference Lattice Boltzmann Method, FDLBM)⁽¹¹⁾ は, 数値的安定性を向上させ, 離散速度に対する等方性を満足させられることから, 圧縮性流れや音響解析等に適用されている⁽¹²⁾. IBM を FDLBM に適用することで, LBM では解析困難であった音場・構造連成問題が解かれることが期待される. Rojas は, FDLBM

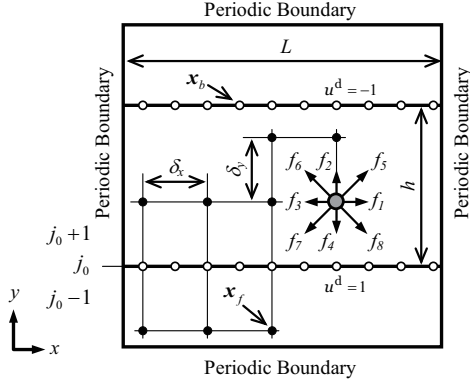
に IBM を適用した場合に生じる流速のズレが, TRT 衝突則により除去出来ることを数値計算により実証した⁽¹³⁾. しかし, 従来型の LBM と対流過程が異なるにも関わらず, IBM を適用した FDLBM (IB-FDLBM) においても流速のズレが発生する原因が明らかにされていない. 本論文では, 運動方程式に Forward-Time Central-Space (FTCS) スキームを適用した FDLBM を対象に, 流速のズレに対する解析解を導出し, 数値計算により実証する.

2. 計算手法

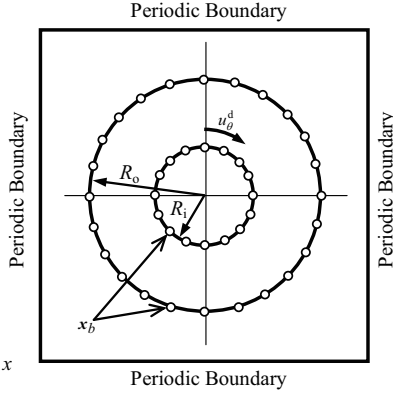
FDLBM では離散速度 \mathbf{c}_k に対応する分布関数 $f_k(\mathbf{x}, t)$ が,

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{c}_k \cdot \nabla f_k = -\frac{1}{\tau}(f_k - f_k^{(\text{eq})}) + \frac{3\omega_k \rho \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{G}}{c^2}, \quad (1)$$

に従い時間発展する. ここで, k は離散速度方向を示すインデックス, τ は緩和時間, $f_k^{(\text{eq})}$ は平衡分布関数, \mathbf{G} は外力である. 有次元の分布関数 \hat{f}_k , 密度 $\hat{\rho}$, 離散速度 $\hat{\mathbf{c}}_k$, 時間 \hat{t} , 流速 $\hat{\mathbf{u}}$, 圧力 \hat{p} , 長さ $\hat{\mathbf{x}}$ に対し, 代表長さ L , 代表密度 ρ_0 , 代表離散速度の大きさ c を用い, 無次元化された分布関数 $f_k = \hat{f}_k / \rho_0$, 密度 $\rho = \hat{\rho} / \rho_0$, 時間 $t = \hat{t} / (L/c)$, 流速 $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} / c$, 離散速度 $\mathbf{c}_k = \hat{\mathbf{c}}_k / c$, 長さ $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} / L$ を求め, 無次元化された分布関数 f_k に対するボルツマン方程式 (1) を得る. FDLBM では, 式 (1) を適切な差分近似等で離散化することで, 流体運動が解析される. ここで, FTCS スキームにより式 (1) を



(a) symmetric shear flows



(b) cylindrical Couette flows

Fig. 1 Schematic diagram of the symmetric shear flows and the cylindrical Couette flows. The circles indicate the boundary nodes \mathbf{x}_b and fluid nodes \mathbf{x}_f .

離散化した以下の方程式について、流速のズレを検証する。

$$\begin{aligned} & \frac{f_{k,i,j}^{n+1} - f_{k,i,j}^n}{\delta_t} + c_{kx} \frac{f_{k,i+1,j}^n - f_{k,i-1,j}^n}{2\delta_x} + c_{ky} \frac{f_{k,i,j+1}^n - f_{k,i,j-1}^n}{2\delta_y} \\ & = -\frac{f_{k,i,j}^n - f_{k,i,j}^{n(\text{eq})}}{\tau} + \frac{3\omega_k \rho_{i,j}^n \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{G}_{i,j}^n}{c^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 i, j, n は、それぞれ、 x 軸方向、 y 軸方向、時間に関するインデックスである。 δ_t は時間ステップ、 δ_x と δ_y は空間刻み幅である。なお、本論文では正方格子を用いることにし、 $\delta_x = \delta_y$ とする。

D2Q9 モデルに対する平衡分布関数 $f_k^{(\text{eq})}$ は、

$$f_k^{(\text{eq})} = \rho \omega_k \left(1 + \frac{3}{c^2} \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2c^4} (\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right), \quad (3)$$

で与えられる。ここで ω_k は重み係数であり、 $\omega_0 = 4/9$, $\omega_{1,2,3,4} = 1/9$, $\omega_{5,6,7,8} = 1/36$ である。ここで、 ρ は密度、 \mathbf{u} は流速、 c は離散速度の大きさである。密度 ρ と流速 \mathbf{u} は、

$$\rho = \sum_{k=0}^8 f_k, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^8 \mathbf{c}_k f_k, \quad (4)$$

で定義される。

Chapman-Enskog 展開により、式 (1) から連続の式と Navier

Stokes(NS) 方程式が導出される。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{G}. \quad (6)$$

ここで、圧力は $p = \rho c^2/3$ で、動粘性係数は $\nu = \frac{c^2 \tau}{3}$ で与えられる。文献 (14) と異なり、本論文では代表時間を t_0 ではなく (L/c) で与えたため、式 (6) にストローハル数 $\text{Sh} = L/(t_0 c)$ は掛からない。IBM では、Fig. 1(a) の白丸で示されるように、固液界面は点の集合体として近似される。この境界上の点 \mathbf{x}_b に適切な外力 \mathbf{G} を発生させることで、流体は構造体から影響を受け、流体内に任意形状の固体壁を設定することが出来る。外力は Direct forcing method (3) により、

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_b) = \frac{\mathbf{u}^d(\mathbf{x}_b) - \mathbf{u}_b(\mathbf{x}_b)}{\delta_t}, \quad (7)$$

で与えられる。ここで、 \mathbf{u}^d は固体壁の流速、 \mathbf{u}_b は固液界面上の流体の流速である。式 (7) の境界上の流速 $\mathbf{u}_b(\mathbf{x}_b)$ は、Fig. 1(a) の黒丸で示される格子点 \mathbf{x}_f 上の流速 $\mathbf{u}(\mathbf{x}_f)$ から導出される。

$$\mathbf{u}_b(\mathbf{x}_b) = \sum_f \mathbf{u}(\mathbf{x}_f) D(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b) \delta_x^2. \quad (8)$$

ここで、 \sum_f は格子点 \mathbf{x}_f に関する総和を表す。

式 (8) から得られた $\mathbf{u}_b(\mathbf{x}_b)$ を、式 (7) に代入することで、境界上の外力が求められる。 $D(\mathbf{x})$ は次式で与えられる (5)。

$$D(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b) = \delta(x_f - x_b) \delta(y_f - y_b), \quad (9)$$

$$\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\delta_x} (1 + \cos(\frac{\pi|r|}{2\delta_x})) & |r| \leq 2\delta_x \\ 0 & |r| > 2\delta_x \end{cases}. \quad (10)$$

IBM では、オイラー座標上の点 \mathbf{x}_f における外力 $\mathbf{G}(\mathbf{x}_f)$ を $\mathbf{G}(\mathbf{x}_b)$ から導出する必要がある。式 (9), (10) で示される平滑化されたデルタ関数 $D(\mathbf{x})$ を用い、

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_f) = \sum_{b=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{x}_b) D(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b) \Delta s, \quad (11)$$

により求められる。ここで、 N は境界を構成する点の総数、 Δs は各点に対する単位長さを表し、構造体が半径 R の円の場合 $\Delta s = 2\pi R \delta_x / N$ 、長さ L の平板の場合は $\Delta s = L \delta_x / N$ で与えられる。

IB-FDLBM のアルゴリズムは、以下のようになる。

- Step 1. 構造体の流速 $\mathbf{u}^d(\mathbf{x}_b)$ と、初期条件 $\rho^1(\mathbf{x}_f)$, $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}_f)$ を与える。式 (3) から、 $f_k^1 = f_k^{(\text{eq})}$ とし、分布関数の初期条件 f_k^1 を与える。
- Step 2. 定義式 (4) から $\rho^n(\mathbf{x}_f)$, $\mathbf{u}^n(\mathbf{x}_f)$ を求める。
- Step 3. 式 (8) を用い、 $\mathbf{u}^n(\mathbf{x}_f)$ から、ラグランジュ座標上の流速 $\mathbf{u}_b^n(\mathbf{x}_b)$ を求める。
- Step 4. 式 (7) より、ラグランジュ座標上の外力 $\mathbf{G}^n(\mathbf{x}_b)$ を求める。
- Step 5. 式 (11) より、オイラー座標上の外力 $\mathbf{G}^n(\mathbf{x}_f)$ を求める。

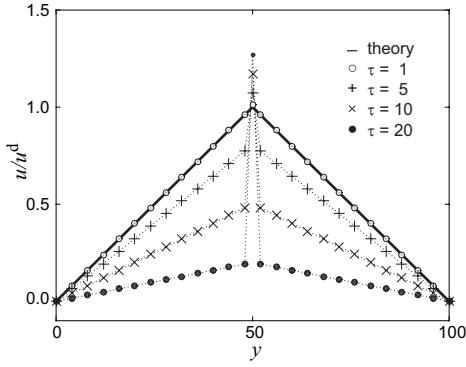


Fig. 2 Velocity profiles calculated by the IB-FDLBM for the symmetric shear flows. $c = 1$.

Step 6. 式 (3) から, $f_k^{(ea)}$ を求め, Step 5 で求めた $\mathbf{G}^n(\mathbf{x}_f)$ と $f_k^{(ea)}$ を, 式 (2) に代入する.

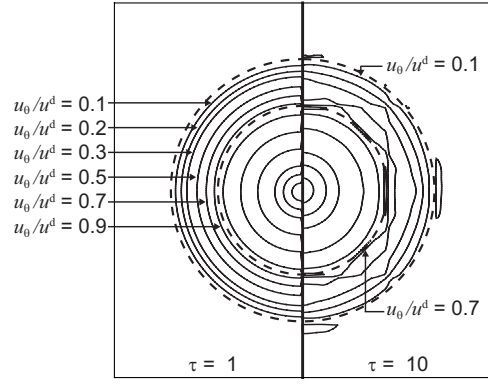
Step 7. 式 (2) より, f_k^{n+1} を計算し, 1 時間ステップ δ_t 進め, Step 2 に戻る.

3. 数値計算

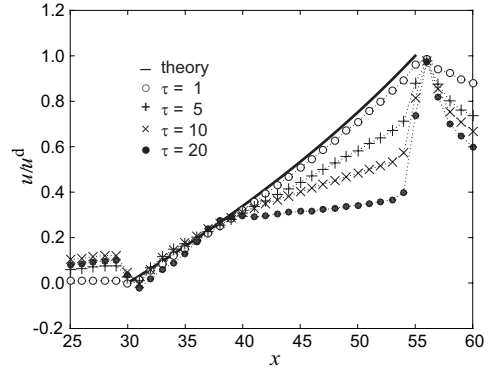
Fig. 1(a) に示す symmetric shear flows と Fig. 1(b) に示す cylindrical Couette flows に対する IB-FDLBM の計算結果を Fig. 2 と Fig. 3 に, それぞれ, 示す. symmetric shear flows では, 計算領域に 200×200 の格子点を用い, $y = 50\delta_x$, $y = 150\delta_x$ の位置に, IBM により, $u = 0.01$, $u = -0.01$ の流速を設定する. Fig. 2 に, 半分の計算領域に対する流速分布を示す. 離散速度の大きさは $c = 1$ とする. Fig. 2 から, IB-FDLBM においても, IB-LBM と同様に, 緩和時間 τ が増加すると, 流速のズレが発生することが分かる. FDLBM は, 緩和時間が大きくなると, 分布関数の非平衡成分が大きくなり, NS 方程式とのズレが大きくなる. 分子の平均自由行程 λ は, 粒子速度 c と緩和時間 τ を用い, $\lambda = c\tau$ で与えられる. 代表長さを L とすると, Knudsen 数は, $\text{Kn} = c\tau/L$ となる. Fig. 2 において, $L = 100$ であることから, $c = 1.0$, $\tau = 1$ の場合, $\text{Kn} = 0.01$ となる. 希薄気体効果が発生する遷移領域 $\text{Kn} = 0.01$ を超えると, 流速のズレが発生している. cylindrical Couette flows では, 200×200 の計算領域の中心に, 半径 $R_o = 70\delta_x$ と, 半径 $R_i = 45\delta_x$ の同心円を設定し, 外円は静止, 内円は $u_\theta^d = 0.01$ で回転する. cylindrical Couette flows の接線速度に対する厳密解 \hat{u}_θ は,

$$\hat{u}_\theta(R) = u_\theta^d \frac{R/R_o - R_o/R}{R_i/R_o - R_o/R_i}, \quad (12)$$

で与えられる. ここで, R は半径を表す. Fig. 3(a) の左側と右側に, $\tau = 1$ と $\tau = 10$ における接線速度の等高線を, それぞれ, 示す. Fig. 3(b) には, 中心断面上の流速分布を示す. Fig. 3 から, cylindrical Couette flows においても, 緩和時間が大きい場合, 流速のズレが発生することが明らかになった. 緩和時間が空間により異なる気液二相系解析やマルチブロック法等への IB-LBM や IB-FDLM の適用を考えた場合, 稲室によって実施された $0.7 \leq \tau \leq 20$ の範囲での LBM の境界条件の計算精度の検証と同様に⁽¹⁵⁾, IB-FDLBM の計算精度



(a) tangential velocity contours



(b) velocity profile along the central horizontal plane

Fig. 3 Tangential velocity profile calculated by the IB-FDLBM for the cylindrical Couette flows. $c = 1$.

の緩和時間に対する依存性を検証する必要がある.

Le *et al.*⁽⁵⁾ や He *et al.*⁽¹⁶⁾ が用いた手法を適用し, symmetric shear flows に対する IB-FDLBM の解析解を導出する. 境界間の格子点数 $h = 100$, $v = 0$, $\rho = \text{const.}$, $\partial u/\partial t = 0$, $\partial u/\partial x = 0$ とする. 式 (2), (4) から,

$$0 = \nu \frac{(u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2})}{(2\delta_y)^2} + G_j - \frac{2c^2\tau^2 (G_{j+2} - 2G_j + G_{j-2})}{3(2\delta_y)^2}, \quad (13)$$

が得られる. ここで, y 座標を示す添え字 j を u , \mathbf{G} に付加した. 外力が $\mathbf{G}(\mathbf{x}_b) = (G_0, 0)$ で与えられた場合, 式 (9), (10) から,

$$G_{j_0} = \frac{G_0}{2}, \quad G_{j_0 \pm 1} = \frac{G_0}{4}, \quad G_{|j-j_0| \geq 2} = 0, \quad (14)$$

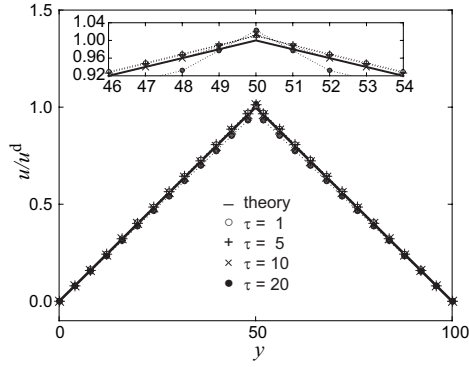
となる. ここで, j_0 は, Fig. 1(a) に示される IBM で設定された構造体の y 座標の位置を表す. 式 (13) において $j = j_0$ の場合, $u_{j_0+2} = u_{j_0-2}$ から, 次式が得られる.

$$u_{j_0+2} - u_{j_0} + \frac{\delta_y^2 G_0}{\nu} \left(1 + \frac{c^2 \tau^2}{3\delta_y^2}\right). \quad (15)$$

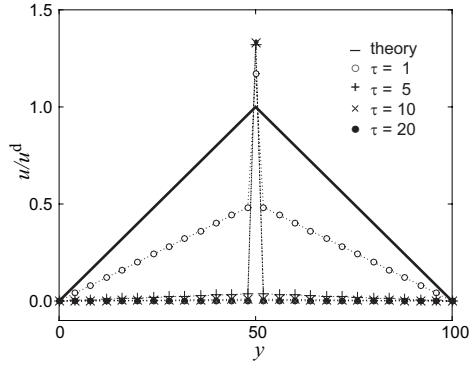
式 (13) に対し $j = j_0 + 1$ とした場合, $u_{j_0+1} = u_{j_0-1}$ より,

$$u_{j_0+3} - u_{j_0+1} + \frac{\delta_y^2 G_0}{\nu} \left(1 + \frac{c^2 \tau^2}{6\delta_y^2}\right), \quad (16)$$

が得られる.



(a) $c = 0.1$



(b) $c = 10.0$

Fig. 4 Velocity profiles calculated by the IB-FDLBM for the symmetric shear flows. The relaxation parameter τ is varied as 1, 5, 10, and 20.

$j = h/2$ において $u = 0$ であるため、式 (15), (16) から、

$$u_{j_0} = \frac{G_0}{\nu} \left(\frac{\delta_y^2 h}{4} + \frac{c^2 \tau^2}{3} \right), \quad (17)$$

$$u_{j_0+1} = \frac{G_0}{\nu} \left(\frac{\delta_y^2 h}{4} - \frac{\delta_y^2}{2} + \frac{c^2 \tau^2}{6} \right), \quad (18)$$

が得られる。式 (8) から、 $u_b = u_{j_0}/2 + u_{j_0+1}/2$ であるため、式 (17), (18) から次式が導出される。

$$u_b = \frac{G_0}{\nu} \left(\frac{\delta_y^2 h}{4} - \frac{\delta_y^2}{4} + \frac{c^2 \tau^2}{4} \right). \quad (19)$$

式 (7) から、 $u^d = u_b + \delta_t G_0$ であるため、式 (19) から、

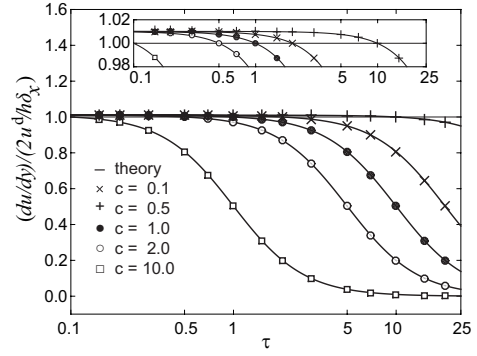
$$u^d = \frac{G_0}{\nu} \left(\frac{\delta_y^2 h}{4} - \frac{\delta_y^2}{4} + \frac{\delta_t c^2 \tau}{3} + \frac{c^2 \tau^2}{4} \right), \quad (20)$$

となる。式 (17), (20) から、FTCS スキームを適用した IB-FDLBM に対する勾配 $(\frac{du}{dy})_{\text{bulk}}$ 、ズレ $u_{j_0}^s$ 、境界値 u_{j_0} に対する解析解が求まる。

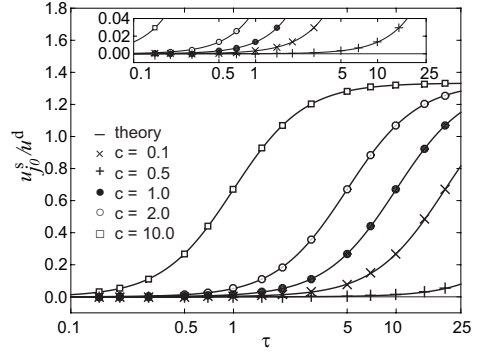
$$\left(\frac{du}{dy} \right)_{\text{bulk}} = \frac{\frac{h\delta_x^2}{4}}{\frac{h\delta_x^2}{4} - \frac{\delta_x^2}{4} + \frac{\delta_t c^2 \tau}{3} + \frac{c^2 \tau^2}{4}}, \quad (21)$$

$$\frac{u_{j_0}^s}{u^d} = \frac{\frac{c^2 \tau^2}{3}}{\frac{h\delta_x^2}{4} - \frac{\delta_x^2}{4} + \frac{\delta_t c^2 \tau}{3} + \frac{c^2 \tau^2}{4}}, \quad (22)$$

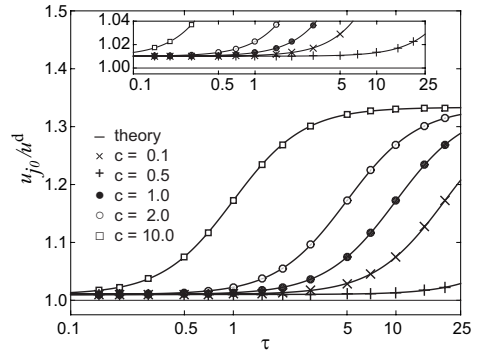
$$\frac{u_{j_0}}{u^d} = \frac{\frac{h\delta_x^2}{4} + \frac{c^2 \tau^2}{3}}{\frac{h\delta_x^2}{4} - \frac{\delta_x^2}{4} + \frac{\delta_t c^2 \tau}{3} + \frac{c^2 \tau^2}{4}}. \quad (23)$$



(a) velocity gradient



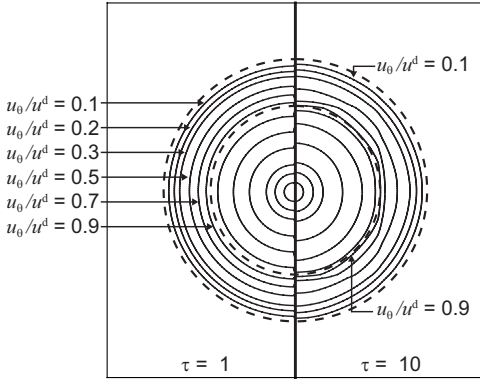
(b) boundary error



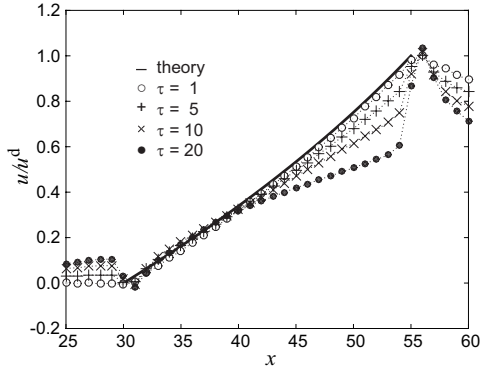
(c) fluid velocity at the boundary

Fig. 5 Comparison of the analytical and the numerical solutions as calculated by the IB-FDLBM.

式 (22) から、離散速度の大きさ c を小さくすると流速のズレが減少することが分かる。FDLBM では、LBM と異なり、格子幅 δ_x と、離散速度の大きさ c とを独立に設定可能である。 $\delta_x = \delta_y = 1$ とし、離散速度の大きさ c を変更した場合の IB-FDLBM による symmetric shear flows の計算結果を、Fig. 4 に示す。ここで、 $c = 0.1$ のとき $\delta_t = 10^{-1}$ 、 $c = 10.0$ のとき $\delta_t = 10^{-4}$ とした。式 (22) で示された通り、 c を小さくすることで、流速のズレが減少している。Fig. 4(a) において、 $c = 0.1$ 、 $\tau \leq 10$ の場合、Knudsen 数が $\text{Kn} = c\tau/L \leq 0.01$ となるため、NS 方程式からのズレが発生しない。Fig. 4 に示された計算結果に、 $c = 0.5$ 、 $c = 2.0$ の場合も考慮した数値解を \times , $+$, \circ , \bullet , \square で、式 (21)-(23) で示される解析解を実線で Fig. 5 に示す。なお、 $c = 0.5$ のとき $\delta_t = 10^{-2}$ 、 $c = 1.0$ のとき $\delta_t = 10^{-2}$ 、 $c = 2.0$ のとき $\delta_t = 10^{-3}$ とした。Fig. 5



(a) tangential velocity contours



(b) velocity profile along the central horizontal plane

Fig. 6 Tangential velocity profile calculated by the IB-FDLBM for the cylindrical Couette flows. $c = 0.5$.

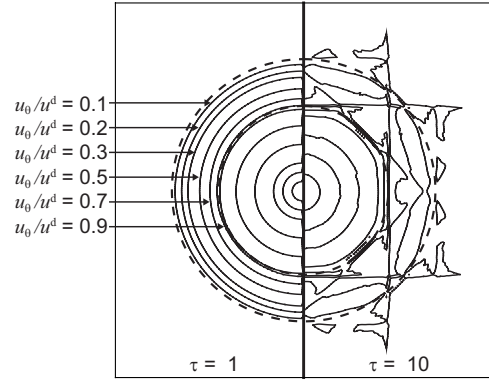
において、解析解と数値解とは良く一致しており、離散速度の大きさを変更することにより、勾配 $(\frac{du}{dy})_{\text{bulk}}$ 、ズレ $u_{j_0}^s$ 、境界値 u_{j_0} に対する誤差が小さくなるのが解析解と数値解から証明された。

離散速度の大きさを $c = 0.5$, $c = 2.0$ とした場合の cylindrical Couette flows に対する IB-FDLBM の計算結果を、Fig. 6 と Fig. 7 に、それぞれ、示す。離散速度の大きさを変更することにより、流速分布に対する誤差が変化しているが、離散速度の大きさを変えるだけでは、高い緩和時間に対し、流速のズレを完全に除去出来ないことが分かる。

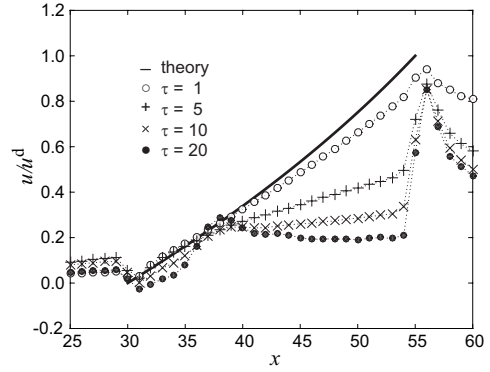
Fig. 8 に計算領域の一辺の格子点数の数と誤差との関係を示す。誤差は次式で定義され、理論解 \hat{u}_θ は式 (12) で与えられる。

$$\text{Error} = \sqrt{\frac{\sum_{\mathbf{x} \in \text{fluid}} (u_\theta(\mathbf{x}) - \hat{u}_\theta(\mathbf{x}))^2}{\sum_{\mathbf{x} \in \text{fluid}} \hat{u}_\theta^2(\mathbf{x})}}, \quad (24)$$

ここで、fluid は、cylindrical Couette flows における外円と内円とで囲まれた領域を示す。 $\tau = 5$ において、 $c = 0.5$ に対する誤差が最も小さく、緩和時間が大きい場合、離散速度の大きさを小さくすることが計算精度の向上に有効であることが、Fig. 8 から分かる。 Fig. 8(a) において、 $\tau = 1$ の場合、流速のズレが最も小さくなる $c = 0.5$ で、1次精度が得られた。 $\tau = 5$ とした場合、Fig. 8(b) において、0.7 次の計算精度が示された。 Fig. 8(b) の精度低下の原因は、IB-FDLBM 特有の流速のズレと考えられる。



(a) tangential velocity contours



(b) velocity profile along the central horizontal plane

Fig. 7 Tangential velocity profile calculated by the IB-FDLBM for the cylindrical Couette flows. $c = 2.0$.

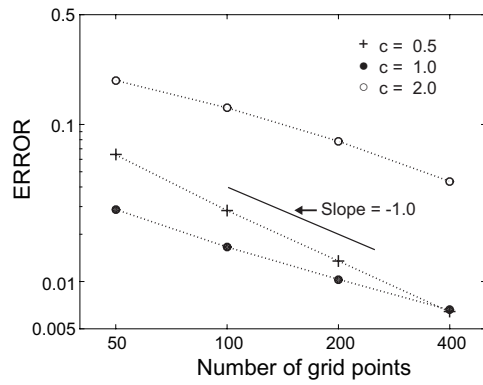
4. おわりに

IB-FDLBM に対する流速のズレの問題を解析的に検証した。 Le *et al.* (5) や He *et al.* (16) の手法を用い、symmetric shear flows に対する、流速のズレに対する解析解を導出した。 FDLBM では格子幅とは独立に離散速度の大きさを変化させられることに注目し、離散速度の大きさの変更による流速のズレへの影響を検証した。離散速度の大きさを小さくすることにより、流速のズレを減少させられることが、解析解と数値解との比較により明らかになった。 Knudsen 数が $\text{Kn} = 0.01$ より大きくなると、本計算結果において流速のズレが観察された。このことから、FDLBM の NS 方程式からのズレが、IB-FDLBM において境界上の流速のズレとして現れたことが明らかになった。離散速度の大きさを小さくした場合の cylindrical Couette flows に対する IB-FDLBM の計算結果を観察したところ、計算精度が向上することが示された。ただし、離散速度の大きさを小さくするだけでは、流速のズレを十分に除去できないことが明らかになった。

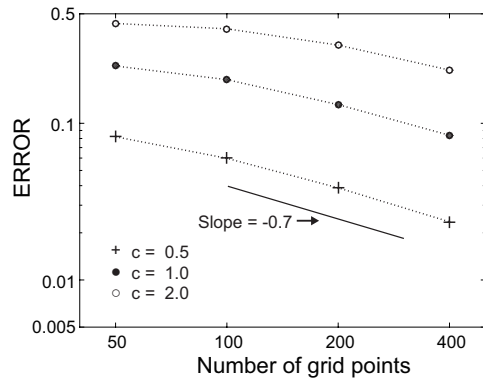
IB-LBM に対し、流速のズレの除去に対し TRT 衝突則が有効であることが示されている (10)。IB-FDLBM に TRT 衝突則を用いた場合、二種類の緩和時間 τ_- , τ_+ に対する流速のズレに対する解析解は、次式で与えられる。

$$\frac{u_{j_0}^s}{u^d} = \frac{\frac{c^2 \tau_+ \tau_-}{3}}{\frac{h \delta_x^2}{4} - \frac{\delta_x^2}{4} + \frac{\delta_t c^2 \tau_+}{3} + \frac{c^2 \tau_+ \tau_-}{4}}. \quad (25)$$

式 (25) から、 $\tau_\pm > 0$ であるため、TRT 衝突則によっても、



(a) $\tau = 1$



(b) $\tau = 5$

Fig. 8 Relative error versus the number of grid points.

IB-FDLBM に発生する流速のズレを完全に除去することは不可能であることが分かる。IB-FDLBM で発生する流速のズレを完全に除去することが今後の課題である。

なお、本研究の実施に当たり、大変貴重なご意見を頂いた東京工業大学高橋亮一名誉教授、富山大学竹越栄俊名誉教授、富山大学奥井健一名誉教授、筑波大学阿部豊教授、神戸大学富山明男教授、神戸大学林公祐准教授に深謝する。

参考文献

- (1) Peskin, C. S. : Flow patterns around heart valves: A numerical method, *J. Comput. Phys.*, **10**(1972), pp. 252–271.
- (2) Chen, S., Doolen, G. D. : Lattice Boltzmann method for fluid flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**(1998), pp. 329–364.
- (3) Feng, Z.-G., Michaelides, E. E. : Proteus: a direct forcing method in the simulations of particulate flows, *J. Comput. Phys.*, **202**(2005), pp. 20–51.
- (4) Wu, J., Shu, C. : Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications, *J. Comput. Phys.*, **228**(2009), pp. 1963–1979.
- (5) Le, G., Zhang, J. : Boundary slip from the immersed boundary lattice Boltzmann models, *Phys. Rev. E*, **79**(2009), pp. 026701.
- (6) Lu, J., Han, H., Shi, B., Guo, Z. : Immersed boundary lattice Boltzmann model based on multiple relaxation times, *Phys. Rev. E*, **85**(2012), pp. 016711.
- (7) Lallemand, P., Luo, L.-S. : Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability, *Phys. Rev. E*, **61**(2000), pp. 6546–6562.
- (8) Hayashi, K., Rojas, R., Seta T., Tomiyama, A. : A two-relaxation time based immersed boundary-lattice Boltzmann method, *J. Comput. Multiphase Flows*, **4**(2012), pp. 193–210.
- (9) Ginzburg, I., d’Humières, D., Kuzmin, A. : Optimal Stability of Advection-Diffusion Lattice Boltzmann Models with Two Relaxation Times for Positive/Negative Equilibrium, *J. Stat. Phys.*, **139**(2010), pp. 1090–1143.
- (10) Seta T., Rojas, R., Hayashi, K., Tomiyama, A. : Implicit-correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method with two relaxation times, *Phys. Rev. E*, **89**(2014), pp. 023307.
- (11) Cao, N., Chen, S., Jin, S., Martínez, D. : Physical symmetry and lattice symmetry in the lattice Boltzmann method, *Phys. Rev. E*, **55**(1997), pp. R21–R24.
- (12) Tsutahara, M., Kataoka, T., Shikata, K., Takada, N. : New model and scheme for compressible fluids of the finite difference lattice Boltzmann method and direct simulations of aerodynamic sound, *Comput. Fluids*, **37** (2008), pp. 79–89.
- (13) Rojas, R., Seta, T., Hayashi, K., Tomiyama, A. : Immersed Boundary-Finite Difference Lattice Boltzmann Method Using Two Relaxation Times, *J. Fluid Sci. Tech.*, **8**(2013), pp. 262–276.
- (14) Inamuro, T., Yoshino, M., Ogino, F. : Accuracy of the lattice Boltzmann method for small Knudsen number with finite Reynolds number, *Phys. Fluids*, **9** (1997), pp. 3535–3542.
- (15) Inamuro, T., Yoshino, M., Ogino, F. : A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations, *Phys. Fluids*, **7** (1995), pp. 2928–2930.
- (16) He, X., Zou, Q., Luo, L.S., Dembo, M. : Analytic solutions of simple flows and analysis of nonslip boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, *J. Stat. Phys.*, **87**(1997), pp. 115–136.