

演算子積分時間領域境界要素法を用いた接触境界条件を考慮した 3次元クラックによる弾性波動散乱解析

Analysis of elastic wave scattering by 3-D crack with contact boundary conditions using convolution quadrature boundary element method

齋藤 隆泰¹⁾, 金井 翔平²⁾, 丸山 泰蔵³⁾, 古川 陽⁴⁾, 廣瀬 壮一⁵⁾

Takahiro SAITOH, Shohei KANAI, Taizo MARUYAMA, Akira FURUKAWA and Sohichi HIROSE

- | | | | |
|----------------------|-------------|-------------------|---------------------------------------|
| 1) 群馬大学大学院理工学府 | (〒 376-8515 | 群馬県桐生市天神町 1-5-1, | E-mail: t-saitoh@gunma-u.ac.jp) |
| 2) 群馬大学大学院理工学府 | (〒 376-8515 | 群馬県桐生市天神町 1-5-1, | E-mail: t14803012@gunma-u.ac.jp) |
| 3) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 | (〒 152-8552 | 東京都目黒区大岡山 2-12-1, | E-mail: maruyama.t.ag@m.titech.ac.jp) |
| 4) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 | (〒 152-8552 | 東京都目黒区大岡山 2-12-1, | E-mail: furukawa.a.aa@m.titech.ac.jp) |
| 5) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 | (〒 152-8552 | 東京都目黒区大岡山 2-12-1, | E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp) |

This paper presents a convolution quadrature time-domain boundary element method (CQ-BEM) for elastic wave scattering by a 3-D crack with nonlinear contact boundary conditions. First, the CQ-BEM is formulated for the analysis of elastic wave scattering by a conventional crack. Next, the formulation is extended to the scattering by a nonlinear crack with contact boundary conditions. The CQ-BEM is effective for this kind of nonlinear problem because the CQ-BEM can produce stable numerical solutions. As numerical examples, elastic wave scattering by a crack with and without contact boundary conditions is demonstrated by using the proposed method. Higher-harmonics are generated by the interaction with an incident plane wave and a nonlinear crack.

Key Words: Time-Domain BEM, Convolution Quadrature Method, Contact Boundary Conditions, Dynamic Crack Analysis

1. はじめに

本研究では、接触境界条件を考慮した3次元き裂による弾性波動散乱解析のための演算子積分時間領域境界要素法(CQ-BEM: Convolution Quadrature Boundary Element Method)を開発する。CQ-BEMは、Lubich⁽¹⁾により提案された演算子積分法(CQM: Convolution Quadrature Method)を時間領域境界積分方程式の畳込み積分の離散化に適用した時間領域境界要素法として知られ、これまでに、スカラー波動問題や飽和多孔質弾性体中の波動問題⁽²⁾等に適用されてきた。CQ-BEMは通常の時間領域境界要素法に比べて、時間増分が小さい場合でも数値解は発散することなく、比較的安定に計算できることが特徴である。また、基本解が閉じた形式で得られない問題に対しても、比較的容易に定式化することが可能である。一方で、時間領域解法が有効活用される場面として、例えば非線形問題への適用が考えられる。境界要素法は元来、非線形問題の解析が得意とは言い難い。しかしながら、例えば境界条件のみが応力や変位の状態によって、時々刻々と変化する境界非線形問

題に対しては、比較的、時間領域境界要素法を適用しやすいと言える。

そこで、本研究では、非線形解析の応用として、CQ-BEMを用いて、き裂面の接触を考慮した場合の3次元弾性波動散乱解析を行う。き裂面の接触を考慮した解析は、Hiroseらによって、2次元⁽³⁾、及び、3次元軸対称問題⁽⁴⁾を扱った例がある。しかしながら、一般的な3次元解析は行われていない。また、CQ-BEMは安定性が高いため、従来の時間領域境界要素法では困難な長時間ステップの解析が可能であると考えられる。

以下では、まず、表面力に対する3次元時間領域境界積分方程式に対してCQMを適用する。次に、き裂の動的閉開口をモデル化した接触境界条件を適用した場合の定式化を示す。数値解析例として、まず、通常の線形な動的き裂問題による入射波の散乱問題を解析した後、接触境界条件を考慮した場合の3次元弾性波動散乱解析結果を示す。最後に、通常の線形き裂、および接触境界条件を考慮した場合の結果が、散乱波にどのような影響を与えるかについて考察する。

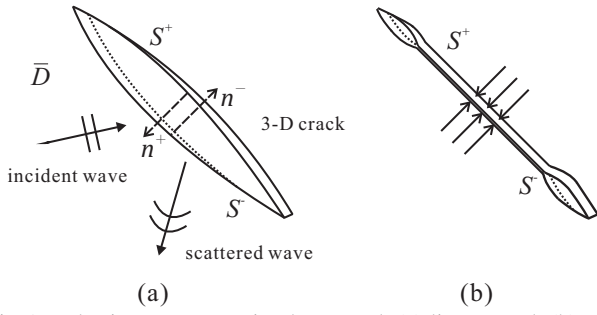


Fig. 1 Elastic wave scattering by a crack (a) linear crack (b) non-linear crack.

2. 演算子積分法 (CQM)

具体的なき裂による散乱問題を解析する前に、説明の都合上、CQM について簡単にまとめておく。Lubich⁽¹⁾ は時刻 t に対する次のような畳み込み積分

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

を時間増分 Δt を用いて N ステップに分割した場合に、

$$f(n\Delta t) * g(n\Delta t) \simeq \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t), \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (2)$$

のように離散化近似する CQM を提案した。ここで、 $\omega_n(\Delta t)$ は CQM における重み関数であり、ラプラスパラメータ s を用いた関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を用いて次のように計算できる。

$$\begin{aligned} \omega_n(\Delta t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\mathcal{R}} F\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) z^{-n-1} dz \\ &\simeq \frac{\mathcal{R}^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\gamma(z_l)}{\Delta t}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{L}} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 i は虚数単位、 e は自然対数の底である。式 (3) の第一式から第二式への積分の評価は、台形積分公式を用いて行うことができる。そのため、引数 z_l は半径 $\mathcal{R} < 1$ の円周上の等分点 L を考え、 $z_l = \mathcal{R}e^{2\pi i l/L}$ によって表される。このとき、精度パラメータ ϵ を用いて、 $\mathcal{R}^L = \sqrt{\epsilon}$ 、 $L = N$ とすると、式 (3) の総和は高速フーリエ変換 (FFT) を用いて計算することができ、その相対誤差は $O(\sqrt{\epsilon})$ となる⁽¹⁾。また、式 (3) の $\gamma(z)$ は線形多段法における生成多項式の商であり、 k 次の後退差分式の場合、次式

$$\gamma(z) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} (1-z)^i \quad (4)$$

で計算される。ただし、本論文では、 A 安定として知られる $k=1$ の差分近似を用いる。式 (2)、(3) からわかるように、後に説明する時間領域境界積分方程式に現れる畳み込み積分を CQM で評価するには、関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ が求まればよいことがわかる。

3. き裂による 3 次元弾性波動散乱問題の CQ-BEM 定式化

以下では、特に断りのない限り、右下添字 $(\cdot)_i$ は $i=1, 2, 3$ のいずれかの値を取るものとし、それらは総和規約に従うものとする。なお、座標系に直交座標系を採用し、3次元無限弾性体中の観測点 \mathbf{x} の座標成分を x_i 等と表記する。また、 (\cdot) および $(\cdot)_{,i}$ はそれぞれ時間、空間に関する偏微分で、 $(\cdot) = \partial/\partial t$ 、 $(\cdot)_{,i} = \partial/\partial x_i$ と定義する。まず、Fig.1(a) のような 3次元無限弾性体 \bar{D} 中のき裂による入射波 $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ の散乱問題を考える。Fig.1(a) のように、通常なき裂では、き裂の上下面 S^+ 、 S^- の接触を考慮せず、閉じないような開口幅をもつ線形なき裂として取り扱う。すなわち、表面力成分 $t_i^\pm(\mathbf{x}, t)$ および、き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ について、

$$t_i^\pm(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{on } S^+, S^- \quad (5)$$

$$\phi_i(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{on } \partial S \quad (6)$$

を満足するものとする。ただし、右上添字の \pm はそれぞれ、き裂の上下面での物理量を表し、 ∂S はき裂の縁を表している。なお、き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ は変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ に対し、 $\phi_i(\mathbf{x}, t) = u_i^+(\mathbf{x}, t) - u_i^-(\mathbf{x}, t)$ と定義している。以下では、正の側における法線 \mathbf{n}^+ や物理量等を特に断りのない限り、単に \mathbf{n} 等と右上添字を省略して表記する。この問題の変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ に対する解は、き裂表面 S に対する、次の解の積分表現を解くことで求まる。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \phi_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (7)$$

ここで、 $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は 3次元弾性波動問題における二重層核を表す。式 (7) を微分し、領域内部の点 $\mathbf{x} \in \bar{D}$ をき裂面に極限移行することにより、超特異核 $W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ から成る次の超特異積分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} t_p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) &= - \int_S W_{pa}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \phi_a(\mathbf{y}, t) dS_y \\ &= - n_b(\mathbf{x}) C_{pbik} \int_S \frac{\partial}{\partial y_l} U_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) C_{cajl} n_c(\mathbf{y}) * \phi_a(\mathbf{y}, t) dS_y \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $t_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ は入射波 $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ に対応する表面力成分、 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は 3次元弾性波動問題における基本解である。また、 C_{ijkl} は弾性定数を表す。式 (8) に正則化⁽⁵⁾ を施し、整理すれば、次の式を得る。

$$\begin{aligned} t_p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) &= C_{pckl} n_c(\mathbf{x}) \left[-\rho \int_S U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \ddot{\phi}_i(\mathbf{y}, t) n_l(\mathbf{y}) dS_y \right. \\ &\quad \left. + e_{rdb} e_{rlj} \int_S C_{ijn a} U_{nk,a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \phi_{i,b}(\mathbf{y}, t) n_d(\mathbf{y}) dS_y \right] \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 e_{ijk} は交代記号を表す。式 (9) を時間と空間に関して離散化することで、き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ を求めることができる。き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ が求まれば、式 (7) の解の積分表現を用いて領域 \bar{D} 内における変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ を求めることができる。しかしながら、式 (9) を時間に関して直接離散化し、き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ を求めることは、冒頭で述べたように、数

値解が不安定になる可能性がある。そこで、本研究では、式(9)にCQM⁽¹⁾を適用することで、時間に関する離散化を行う方策を取る。空間に関する離散化に M 個の一定要素を用いた選点法、時間に関する離散化に前節で述べたCQMを総時間ステップ数 N として適用すれば、表面力境界積分方程式(9)は次のように書き直せる。

$$t_p^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n \left[A_{pi}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) + B_{pi}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) \right] \phi_i(\mathbf{y}^\alpha, n\Delta t) \quad (10)$$

ここで、 $A_{pi}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $B_{pi}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は影響関数であり、CQMの適用により、それぞれ次のように表される。

$$A_{pi}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho C_{pckl} n_c(\mathbf{x}) n_l(\mathbf{y}) \times \frac{R^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[- \int_S (s_l)^2 \hat{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (11)$$

$$B_{pi}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{pckl} C_{ijna} n_c(\mathbf{x}) e_{rlj} \times \frac{R^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\int_{\partial S} \frac{\partial}{\partial y_a} \hat{U}_{nk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dy_r \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (12)$$

ただし、 $\hat{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ はラプラス変換域における3次元弾性波動問題の基本解である。また、 s_l はラプラスパラメータに対応するCQMのパラメータであり、 $s_l = \gamma(z_l)/\Delta t$ で表される。一方、式(12)における、積分 $\int_{\partial S} dy_r$ は、 α 番目の要素の縁 ∂S に対する線積分を表しており、その導出にはストークスの定理を用いている。

以上より、式(10)について第1ステップから、最終の第 $N-1$ ステップまで逐次計算を行うことにより、各ステップにおける、き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ を求めることができる。

4. 接触境界条件を考慮したき裂による弾性波動散乱問題

先に述べたように、式(5)、(6)を条件とする通常のき裂による散乱問題では、き裂面 S^+ , S^- の接触を考慮していない。しかしながら、工学では、き裂の開閉口を扱う必要がある場合も多い⁽⁶⁾。そこで、本節では、Fig.1(b)のように、き裂面 S^+ , S^- の接触を考慮に入れて、き裂による弾性波動散乱問題を解析する。

4.1. き裂の接触を考慮した場合の積分方程式

以下では、散乱波を $u^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t)$ と表記し、散乱波に関する物理量を右上添字 sc を用いて表記する。このとき、散乱波は放射条件を満足するとともに、次の積分方程式を満たす。

$$t_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t) = \int_S W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \phi_j^{\text{sc}}(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (13)$$

ここで、全変位場は、入射場と散乱場の重ね合わせで表現されることを利用し、き裂開口変位の入射場に対応する成分 $\phi_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ は、き裂面で連続であることを考慮すれば、式(13)は次のように表すことができる。

$$t_i(\mathbf{x}, t) = t_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \phi_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (14)$$

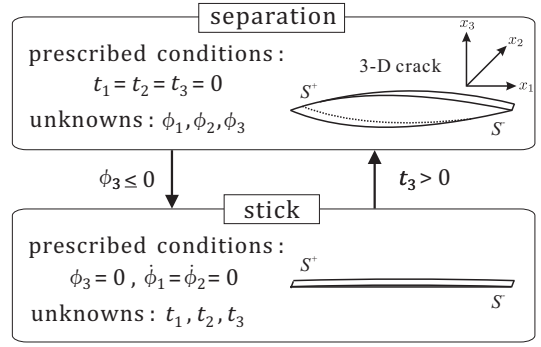


Fig.2 Contact boundary conditions.

また、式(14)は、式(5)を条件とせず、 $t_i^+(\mathbf{x}, t) + t_i^-(\mathbf{x}, t) = 0$ を考慮している。式(14)が本研究で扱う、き裂面の接触を考慮した場合の時間領域境界積分方程式となる。通常のき裂による散乱問題では、式(8)のようにき裂面における表面力 $t_i(\mathbf{x}, t)$ を考慮しない。このように、き裂面で表面力をゼロとしない点で、通常のき裂による問題と異なっている。

4.2. 接触境界条件

本論文では、簡単のため、き裂においては、Fig.2のような separation と stick の2つの接触状態についてのみ考慮し、slip 状態⁽⁶⁾は考慮しない。今、き裂は、 x_1 - x_2 面内にある平面き裂と仮定し、 x_3 軸はき裂面に対して直交方向にとる。separation 状態は、Fig.2 上のように、向かい合うき裂面 S^+ , S^- が非接触、すなわち開口状態であるとして定義する。これより、separation 状態における接触境界条件は次のように与えられる。

$$t_1 = t_2 = t_3 = 0 \quad (15)$$

一方、stick 状態は、Fig.2 下のように、向かい合うき裂面 S^+ , S^- が接触している状態として定義する。この stick 状態では S^+ , S^- での u_1, u_2 変位の不連続状態を許容している。これより、stick 状態において規定される接触境界条件は次のように与えられる。

$$\phi_3 = 0, \dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_2 = 0 \quad (16)$$

き裂における接触境界条件は、各時刻において、separation と stick のいずれかの状態を取り得ると考える。式(15)、(16)の規定境界条件より、separation, stick それぞれの状態における未知量は、Fig.2 に示すように、それぞれ ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 および t_1, t_2, t_3 である。接触境界条件が遷移する場合の遷移条件を Fig.2 中央に矢印と共に示す。separation 状態から stick 状態への遷移条件は $\phi_3 \leq 0$ とした。一方、stick 状態から separation 状態への遷移条件は $t_3 > 0$ で与えることとする。このように、毎時間ステップにおけるき裂面の接触境界条件は時々刻々と変化するため、周波数領域の解析では対応できず、時間領域で境界非線形問題を扱うこととなる。

4.3. 接触境界条件を考慮した場合の積分方程式の解法

実際の計算では、各時間ステップにおいて、接触境界条件が separation と stick のどちらの状態であるかを事前に判定することはできない。そのため、各時間ステップにおいて、1つ前

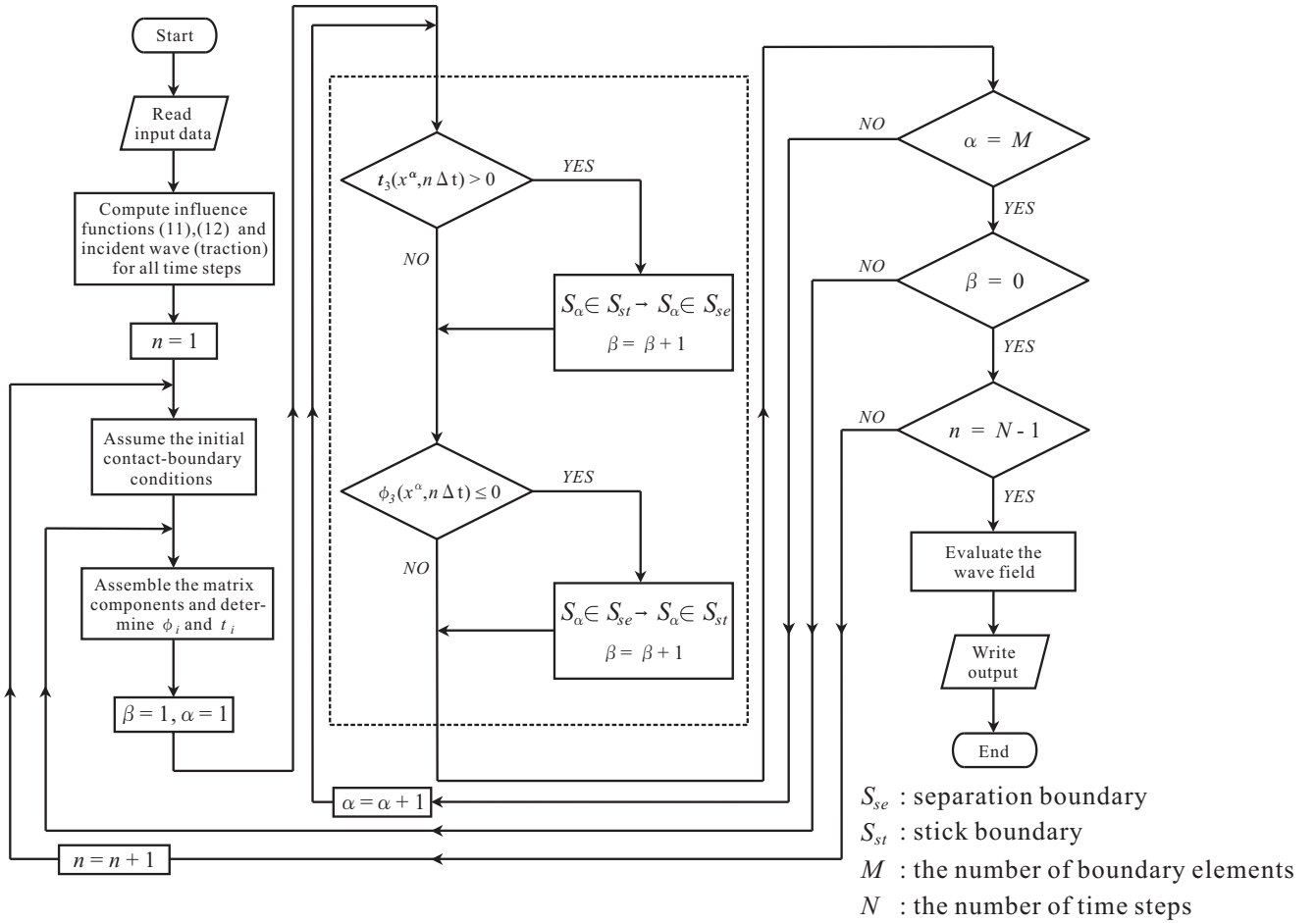


Fig.3 Numerical procedure for the CQ-BEM with contact boundary conditions.

の接触境界条件を用いて、式 (14) を計算し、一度き裂開口変位や表面力を決定する。ただし、決定したき裂開口変位や表面力が、予め与えた separation または stick 状態の条件を満足しているかを判定し、満足していない場合は、接触境界条件を遷移させ、再びき裂開口変位や表面力を求める手順を取ることとする。このときの、手順のフローを Fig.3 に示す。

5. き裂による散乱波の遠方場近似

超音波非破壊検査では、通常、散乱波は欠陥から十分遠方で受信することとなる。そのため、散乱波の解析に遠方近似を導入することで、遠方での散乱波を短時間で容易に評価できる。今、観測点 \mathbf{x} を、き裂から十分遠方に設定し、座標原点をき裂近傍にとると、観測点 \mathbf{x} とき裂上の点 \mathbf{y} との距離 r は次式のように近似できる。

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \approx |\mathbf{x}| - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \quad (17)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ である。式 (17) を散乱波 $u_i^{sc}(\mathbf{x}, t)$ に対する積分表現式に代入し、整理すれば⁽⁷⁾、散乱波の遠方場の縦波成分 $u_L^{sc;far}(\mathbf{x}, t)$ は次式のように求めることができる。

$$u_L^{sc;far}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \Omega_L \left(\hat{\mathbf{x}}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_L} \right) \quad (18)$$

ここで、散乱縦波の振幅 $\Omega_L(\hat{\mathbf{x}}, t - |\mathbf{x}|/c_L)$ は次式のように表

される。

$$\begin{aligned} \Omega_L \left(\hat{\mathbf{x}}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_L} \right) &= \frac{c_T^2}{c_L^3} \left[\left(\frac{c_L^2}{c_T^2} - 2 \right) \delta_{jk} + 2\hat{x}_j \hat{x}_k \right] \\ &\times \int_S n_k(\mathbf{y}) \dot{\phi}_j \left(\mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x}|}{c_L} + \frac{\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}}{c_L} \right) dS_y \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 c_L, c_T は縦波および横波の波速であり、 δ_{ij} はクロネッカーデルタである。式 (18) に式 (10) や (14) で求めた、き裂開口変位 $\phi_i(\mathbf{x}, t)$ を用いることで、き裂による散乱波遠方の縦波成分 $u_L^{sc;far}(\mathbf{x}, t)$ を求めることができる。

6. 数値解析例

以下、数値解析例を示す。ただし、以下の数値解析では、CQM におけるパラメータ L と総時間ステップ数 N の関係を $L = N$ とし、式 (11), (12) に対する影響関数の計算に FFT を適用し、高速に計算を実行する。そのため、2 節で述べた精度パラメータ ϵ を $\epsilon = 1.0e-16$ とした。また、ポアソン比 $\nu = 0.25$ とした。このとき、縦波、横波の波速比は $c_L/c_T = \sqrt{3}$ となる。解析の対象とするき裂は、Fig.4 のような原点中心、1 辺の長さが $2a$ の正方形き裂とし、要素数 800 の三角形一定要素(空間の離散化に選点法を採用)で離散化した。

6.1. 接触境界条件を考慮しないき裂による弾性波動散乱解析結果

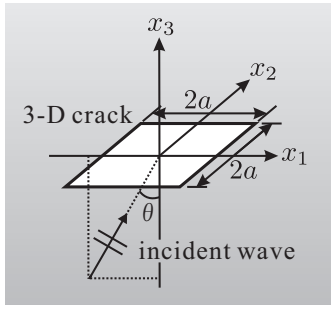


Fig. 4 3-D rectangular crack.

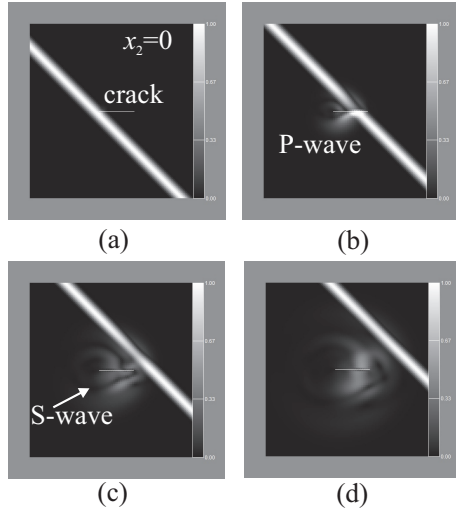


Fig. 5 Total wave fields $|u|$ around the rectangular crack (x_1 - x_3 plane). (a) $c_L t/a \simeq 0.39$, (b) $c_L t/a \simeq 1.56$, (c) $c_L t/a \simeq 2.73$, (d) $c_L t/a \simeq 3.90$.

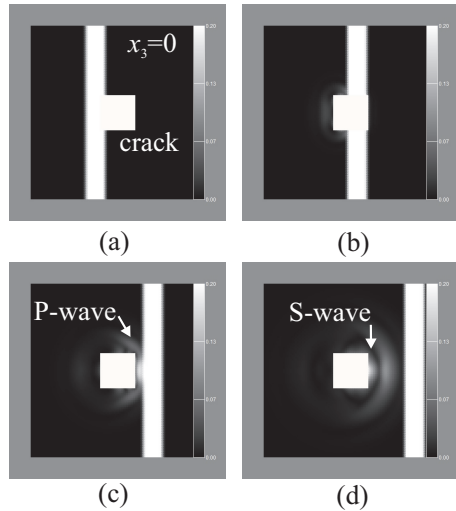


Fig. 6 Total wave fields $|u|$ around the rectangular crack (x_1 - x_2 plane). (a) $c_L t/a \simeq 0.39$, (b) $c_L t/a \simeq 1.56$, (c) $c_L t/a \simeq 2.73$, (d) $c_L t/a \simeq 3.90$.

まず、接触境界条件を考慮しない場合の正方形き裂に対し、平面縦波が斜め入射する場合の散乱解析を行った。ここで、平面縦波は、Fig.4における入射角 θ を $\theta = 45^\circ$ 、すなわち、入射波の伝搬方向ベクトル \mathbf{p} および、偏向方向ベクトル \mathbf{d} に対して $\mathbf{p} = \mathbf{d} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ の関係を満足するものとして、次

式のように与えた。

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0 d_i \frac{1}{2} \left[1 - \cos 2\pi\alpha \right],$$

$$\text{ただし, } \alpha = \frac{a}{\lambda_L} \left(\frac{c_L t}{a} - \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{t}_i)}{a} \right) \text{ for } 0 \leq \alpha \leq 1,$$

$$\alpha = 0 \text{ for otherwise} \quad (20)$$

ただし、 u_0 は振幅、 H はステップ関数である。このとき、 \mathbf{t}_i は時刻 0 における入射波面の任意の位置ベクトルであり、 $\mathbf{t}_i = (-a, 0, 0)$ で表される。また、時刻 $c_L t/a = 0$ に、入射平面縦波が丁度、き裂先端に到達するように設定してある。なお、解析では、縦波の波長 λ_L に対する波長を $\lambda_L/a = 1.0$ で与え、総時間ステップ数 N は $N = L = 128$ 、時間増分を $c_T \Delta t/a = 0.045$ で与えた。Fig.5, Fig.6 はそれぞれ、 x_1 - x_3 平面 ($x_2 = 0$)、 x_1 - x_2 平面 ($x_3 = 0$) における正方形き裂周辺の全変位場の絶対値のスナップショットを示している。き裂先端に入射平面縦波が到達した後 (Fig.5(a), Fig.6(a))、散乱縦波 (例えば Fig.5(b) や Fig.6(c)) が発生していることが見て取れる。また、散乱縦波の発生から遅れて、散乱横波の発生も確認できる (例えば Fig.5(c) や Fig.6(d))。一方、き裂面を伝搬する波動の発生も確認できる (Fig.5(d))。以上より、解析結果は物理的にも妥当であり、概ね、定性的ではあるが、解析を正しく実行できていることが確認できた。

6.2. 接触境界条件を考慮したき裂による弾性波動散乱解析結果

次に、接触境界条件を考慮した正方形き裂に対し、垂直に平面縦波が入射する場合の散乱解析を行った。ここで、入射波 $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ を正弦波 10 波とし、Fig.4 における入射角 θ を $\theta = 0^\circ$ 、すなわち、入射波の伝搬方向ベクトル \mathbf{p} および、偏向方向ベクトル \mathbf{d} に対して $\mathbf{p} = \mathbf{d} = (0, 0, 1)$ の関係を満足するものとして、次式のように与えた。

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0 d_i H \left[t - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{c_L} \right] H \left[10T - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{c_L} \right]$$

$$\times \sin \left\{ \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{c_L} \right) \right\} \quad (21)$$

ここで、 T は入射波の周期を表す。なお、解析では、縦波の波長 λ_L に対する波長を $\lambda_L/a = 1.0$ で与え、総時間ステップ数 N は $N = L = 128$ 、時間増分を $c_T \Delta t/a = 0.05$ で与えた。

Fig.7 は接触境界条件を考慮した場合のき裂中心におけるき裂開口変位 (COD:Crack Opening Displacement) を破線で示した結果である。また、参考のため、接触境界条件を考慮しない通常の子裂に対する結果を点線で示している。なお、同位置での入射波成分 u_3^{in} も実線で示している。Fig.7 より、接触境界条件を考慮した場合は、き裂開口変位 $\phi_3(\mathbf{x}, t)$ は負の値を取ることなく変動していることがわかる。一方、通常の子裂境界条件を与えた場合のき裂開口変位 $\phi_3(\mathbf{x}, t)$ は、負の値を取り得る。この理由は、 $\phi_3(\mathbf{x}, t) \leq 0$ では、stick 状態となり、 $\phi_3(\mathbf{x}, t) = 0$ が規定されることに他ならない。また、入射正弦波 4 波目程度以降では、概ね、き裂開口変位 $\phi_3(\mathbf{x}, t)$ は定常状態となっていることがわかる。

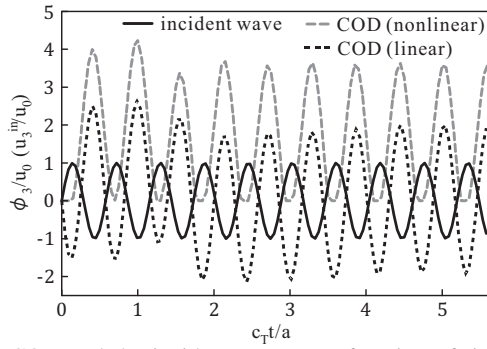


Fig. 7 COD and the incident wave as a function of time at the center of the crack.

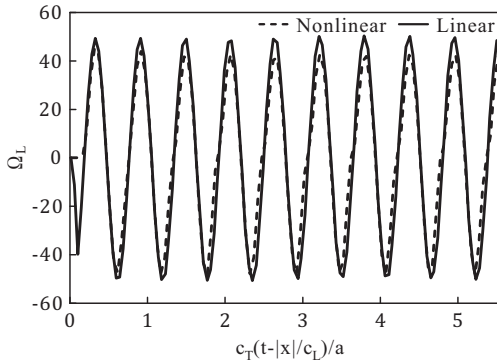


Fig. 8 Far-field amplitude of the backscattered L wave as a function of time.

また, Fig.8 はき裂による散乱波を遠方近似により求めた結果を示している。Fig.8 より, 接触境界条件を考慮した場合(点線)の結果は, 接触境界条件を考慮しない通常なき裂を扱った場合の結果(実線)に比べて, 波形が歪んでいることが見て取れる。一方, Fig.9 は Fig.8 における結果のフーリエスペクトルをそれぞれ同線で示したものである。ただし, 縦軸は入射波の中心周波数に対応する無次元化波数 $k_L a = 2\pi$ でのフーリエスペクトルで正規化していることに注意されたい。いずれの場合においても, $k_L a = 2\pi$ でスペクトルのピークが卓越していることがわかる。しかしながら, 接触境界条件を考慮した場合の結果に着目すると, $k_L a = 4\pi, 6\pi$ においてそれぞれ, 2次高調波, 3次高調波を確認することができる。次に, 接触境界条件を考慮した場合の結果に対し, ウェーブレット解析を行った結果を Fig.10 に示す。先に述べたように, き裂開口変位 $\phi_3(\boldsymbol{x}, t)$ は入射正弦波4波目以降で概ね定常となる。そのため, それに対応する4波目以降の散乱波では, それ以前と比較して安定な高調波成分が検出できていることがわかる。このことから, 明確に高調波を発生させるためには, 入射波を連続波でき裂に入射させる必要があると考えられる。

7. おわりに

演算子積分時間領域境界要素法を用いた接触境界条件を考慮した3次元クラックによる弾性波動散乱解析を行った。接触境界条件を考慮した散乱波は, 高調波成分を含むことを確認することができた。今後も, 引き続き, 様々なき裂の動的モデルを適用した解析を行うことで, 高調波などの非線形成分

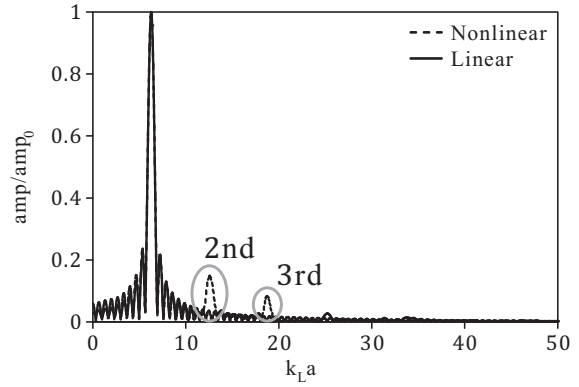


Fig.9 Fourier spectra of the backscattered L wave as a function of time.

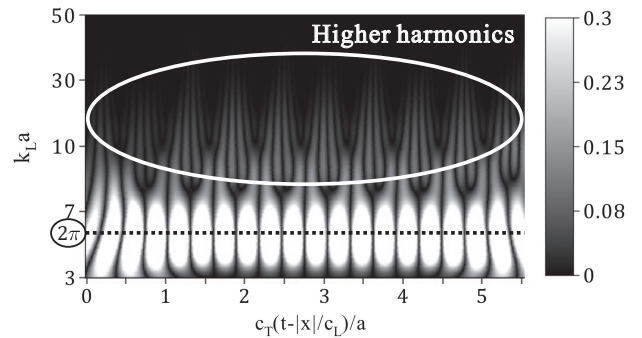


Fig.10 Wavelet analysis of the backscattered L wave (nonlinear) as a function of time.

の発生現象について検討を重ねる予定である。

参考文献

- (1) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52** (1988), pp. 129-145.
- (2) 斎藤隆泰・近澤文香・廣瀬壮一 : 演算子積分時間領域境界要素法を用いた飽和多孔質弾性体における大規模波動散乱解析, *土木学会論文集 A2(応用力学)*, **68** (2012), pp.187-197.
- (3) Hirose, S. : 2-D Scattering by a crack with contact-boundary conditions, *Wave Motion*, **19** (1994), pp. 37-49.
- (4) Hirose, S. and Achenbach, J. D. : Higher harmonics in the far-field due to dynamic crack-face contacting, *J. Acoust. Soc. Am.*, **93** (1993), pp. 142-147.
- (5) Tanaka, M., Sladek, V. and Sladek, J. : Regularization techniques applied to boundary element methods, *Appl. Mech. Reviews*, **47** (1994), pp.457-499.
- (6) 斎藤隆泰・古田雄輔・廣瀬壮一・中畑和之 : 2次元動弾性時間領域境界要素法を用いた非線形超音波法における高調波の励起シミュレーション, *土木学会論文集 A2(応用力学)*, **67**, No.2 (2011), pp.161-169.
- (7) Hirose, S. and Achenbach, J. D. : Time-domain boundary element analysis of elastic wave interaction with a crack, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **28** (1989), pp. 629-644.