

埋め込み境界法を用いた Lattice Kinetic スキームによる 非ニュートン流体内固液二相流解析

IMMERSED BOUNDARY-LATTICE KINETIC SCHEME FOR SIMULATION OF PARTICLE-FLUID TWO PHASE FLOW IN NON-NEWTONIAN FLUID

瀬田 剛¹⁾, 吉田 秀典²⁾

Takeshi SETA and Hidenori YOSHIDA

- 1) 富山大学大学院理工学研究部 (工学) (〒 930-8555 富山市五福 3190, E-mail: seta@eng.u-toyama.ac.jp)
2) 香川大学工学部 (〒 761-0396 高松市林町 2217-20, E-mail: yoshida@eng.kagawa-u.ac.jp)

We verify the immersed boundary-lattice kinetic scheme (IB-LKS) by simulating three typical non-Newtonian fluid flows; a symmetric Poiseuille flow, a non-Newtonian fluid forced to flow through a porous medium, and the sedimentation of circular particles in a non-Newtonian fluid. In the numerical calculation of a symmetric Poiseuille flow, the numerical results of velocity profiles show a good agreement with the analytical solutions. The relationship between the flux and the force through a porous media computed by the IB-LKS agrees with the generalized Darcy's law. A comparison between the numerical results and those of previous studies in the calculation of the sedimentation of particles demonstrates the validity of the IB-LKS for calculations of non-Newtonian fluid flows with suspended solid particles. The IB-LKS effectively solves the problem of the velocity slip observed in flow simulations with the immersed boundary-lattice Boltzmann method at a high relaxation time.

Key Words: Computational Fluid Dynamics, Lattice Kinetic Scheme, Immersed Boundary Method, Non-Newtonian Fluids, Power-Law Model, Particulate Flow

1. はじめに

山岳トンネルや放射性廃棄物処分施設などの岩盤構造物の建設では、空洞内への湧水を抑制する目的で岩盤亀裂へのグラウト注入がしばしば施工される。特に、高レベル放射性廃棄物の地層処分では、空洞周辺の遮水が放射性物質の漏洩に対するバリアであることから、グラウト浸透範囲に関する定量的な予測評価とより高度なグラウト技術に対するニーズが高まりつつある。グラウト工法で使用する注入材料には、セメントやベントナイト等の非薬液系と水ガラスを主材とする注入材料や高分子材料である薬液系とに大別できる。岩盤亀裂の場合、一般的には、セメントミルクあるいはセメント-ベントナイトによる注入が行われるが、亀裂が著しく大きな場合や地下水の流れが速い場合などでは、モルタルあるいは薬液などが使用されることもある。高レベル放射性廃棄物の地層処分においては、セメントミルクなどでは1万年を超えるような長期間の止水性が期待できないことから、ベ

ントナイトスラリーに期待が寄せられている。ベントナイトスラリーとは、ベントナイトをエタノール液によってスラリー化することで低粘性を実現したもので、止水効果も高いとされている。従来、スラリー状のグラウトの粘性特性は高粘性のニュートン流体に近似されてきたが、これでは、実際にスラリーが有する粘性のせん断速度依存性や目詰まり現象をうまく説明できない。このような特性は、セメントスラリーやベントナイトスラリーのような材料は、正確には溶液は粘性流体ではなく、固液の混合物で、ビンガム流体として流動するからであるとされている。このような材料が、岩盤亀裂の中でどのように挙動し、かつ、どのように目詰まりを生ずるかについては、依然、不明な点も多く、それ故に、こうした材料の注入圧力についても、その適切な設定を難しくしているのが現状である⁽¹⁾。本研究では、複雑構造を有する亀裂内の非ニュートン流体内の固液二相流動様式の予測により、岩盤亀裂に対するベントナイトスラリーによる止水問題に有効な解析手法の確立を目指す。

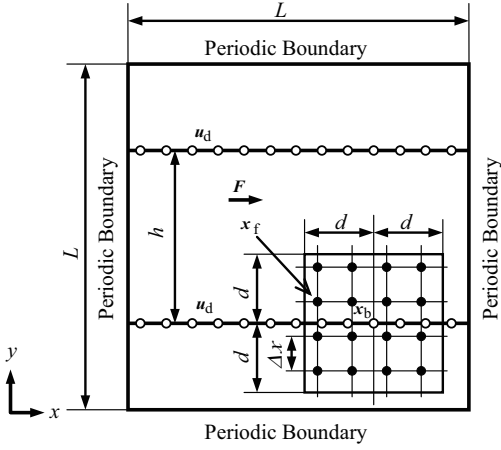


Fig. 1 Schematic diagram of a symmetric Poiseuille flow. The circles indicate the boundary nodes \mathbf{x}_b and fluid nodes \mathbf{x}_f used in the IB-LKS⁽⁵⁾.

では、等間隔のデカルト座標上に配置された粒子速度分布関数の運動により Navier Stokes (NS) 方程式が解析される。近年、デカルト座標上に任意形状の境界を簡単に設定できる埋め込み境界法 (Immersed Boundary Method, IBM)⁽³⁾ を LBM に適用した Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method (IB-LBM) の研究が盛んに行われ、緩和時間 τ が増大すると固体壁面において流速の滑りが発生する問題が指摘されている^(4, 5)。太田により非ニュートン流体であるピンガム流体とカッソン流体を適用した LBM が提案されたが⁽⁶⁾、非ニュートン流体による粘性係数の変化を、緩和時間 τ の関数としているため、IB-LBM を用いた場合、高緩和時間に対し流速の滑りが発生する可能性がある。LBM に対し緩和時間を $\tau = 1$ とし、分布関数を修正することで、緩和時間と関係なく粘性係数を直接計算できる Lattice Kinetic Scheme (LKS) に基づく非ニュートン流体解析手法が吉野により提案され、多孔質体内流動解析への有効性が実証された⁽⁷⁾。本研究では、吉野の非ニュートン流体解析に対する LKS に IBM を適用した Immersed Boundary-Lattice Kinetic Scheme (IB-LKS) を提案し、非ニュートン流体に対する固液二相流解析に対する有効性を検証する。

2. 計算手法

非ニュートン流体の計算に、Ostwald-de Waele モデル (べき乗則モデル) に基づく吉野によって提案された LKS を用いる。べき乗則モデルにおける粘性係数は、

$$\mu = \mu_1 \dot{\gamma}^{(n-1)}, \quad (1)$$

で与えられる。せん断速度は $\dot{\gamma} = \sqrt{e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}}$ である。ただし、

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right), \quad (2)$$

である。式 (1) において、 $n = 1$ の場合、粘性係数が μ_1 のニュートン流体に相当する。 $n > 1$ では、せん断速度の増加と共に粘性係数も大きくなるダイラタント流体 (shear thickening fluid) を表す。 $0 < n < 1$ では、せん断速度の増加につれ粘

性係数が減少する擬塑性流体 (shear thinning fluid) を表す。なお、式 (2) の微分係数の導出には二次精度中心差分近似を用い、境界上のみ二次精度片側差分近似を用いる。

稲室ら⁽⁸⁾により示されたように、有次元の分布関数 \hat{f}_k 、密度 $\hat{\rho}$ 、離散速度 \hat{c}_k 、時間 \hat{t} 、流速 \hat{u} 、圧力 \hat{p} 、位置 \hat{x} に対し、代表長さ L 、代表密度 ρ_0 、代表時間 t_0 、代表離散速度の大きさ c を用い、無次元化された分布関数 $f_k = \hat{f}_k / \rho_0$ 、密度 $\rho = \hat{\rho} / \rho_0$ 、時間 $t = \hat{t} / t_0$ 、流速 $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} / c$ 、離散速度 $\mathbf{c}_k = \hat{\mathbf{c}}_k / c$ 、位置 $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} / L$ を求め、無次元化された分布関数 f_k に対するボルツマン方程式を得る。無次元化されたボルツマン方程式に 1 次の風上差分近似を適用することにより、LBM の運動方程式が導出され、更に、LBM において緩和時間を $\tau = 1$ とすることで、LKS の運動方程式が得られる。

LKS では、Fig. 1 において黒丸で示される格子点 \mathbf{x} に定義された平衡分布関数 f_k^{eq} から、密度 ρ 、流速 \mathbf{u} が、

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=0}^8 f_k^{\text{eq}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k \Delta x, t - \Delta t), \quad (3)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \sum_{k=0}^8 \mathbf{c}_k f_k^{\text{eq}}(\mathbf{x} - \mathbf{c}_k \Delta x, t - \Delta t), \quad (4)$$

により求まる。離散速度 \mathbf{c}_k に従って f_k^{eq} が運動し、密度と流速が時間発展する。ここで、 Δt は無次元時間刻み幅、 k は離散速度方向を示すインデックスである。 Δt は仮想粒子が隣の格子点まで移動する時間と等しくなるように設定する⁽⁷⁾。

D2Q9 モデルに対する平衡分布関数 f_k^{eq} と外力項 F_k は、

$$f_k^{\text{eq}} = \rho \omega_k \left[1 + 3c_{k\alpha} u_\alpha + \frac{9}{2} c_{k\alpha} c_{k\beta} u_\alpha u_\beta - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + A \Delta x \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) c_{k\alpha} c_{k\beta} \right], \quad (5)$$

$$F_k = 3\rho \omega_k \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{G}, \quad (6)$$

で与えられる。ここで ω_k は重み係数であり、 $\omega_0 = 4/9$ 、 $\omega_{1,2,3,4} = 1/9$ 、 $\omega_{5,6,7,8} = 1/36$ で与えられる。マルチスケール展開により、LKS の運動方程式から、NS 方程式、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{G}, \quad (7)$$

が導出される。圧力と動粘性係数は、それぞれ、 $p = \rho/3$ 、 $\nu = (\frac{1}{6} - \frac{2}{9}A) \Delta x$ で与えられる。

IBM では、Fig. 1 の白丸で示されるように、境界面は点の集合体として近似される。この境界上の点 \mathbf{x}_b に適切な外力 \mathbf{G} を発生させることで、流体は構造体の影響を受ける。外力は Direct forcing method により、

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_b) = \frac{\mathbf{u}_d(\mathbf{x}_b) - \mathbf{u}_b(\mathbf{x}_b)}{\Delta t}, \quad (8)$$

で与えられる。ここで、 \mathbf{u}_d は構造体の速度、 \mathbf{u}_b は外力を $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ とした NS 方程式 (7) を満足する流速である。IBM では、式 (8) から求められる \mathbf{x}_b 上の外力 $\mathbf{G}(\mathbf{x}_b)$ を補間し、Fig. 1 の黒丸で示されるデカルト座標上の点 \mathbf{x}_f における値 $\mathbf{G}(\mathbf{x}_f)$ を導出する。補間された $\mathbf{G}(\mathbf{x}_f)$ を NS 方程式 (7) に代

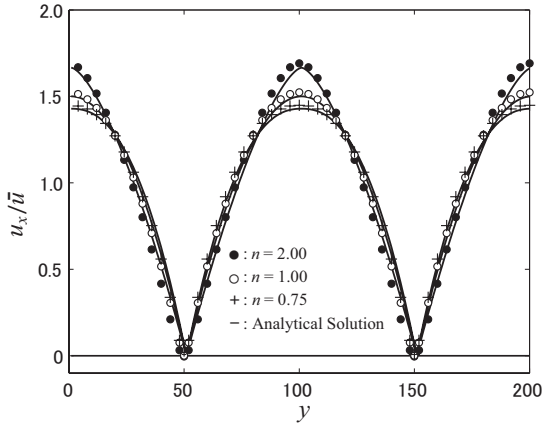


Fig. 2 Velocity profiles calculated by the IB-LKS for the symmetric Poiseuille flows normalized with respect to the mean flow velocity.

入し、構造体と流体との連成問題が解かれる。Fig. 1 の黒丸で示されたデカルト座標 \mathbf{x}_f 上の値は、

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_f) = \sum_{b=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{x}_b) D(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b) \Delta s, \quad (9)$$

により求められる。ここで、 $D(\mathbf{x})$ はディラックのデルタ関数を平滑化した関数、 N は境界を構成する点の総数、 Δs は各点に対する単位面積を表し、構造体が半径 R の円の場合 $\Delta s = 2\pi R \Delta x / N$ 、長さ L の平板の場合は $\Delta s = L \Delta x / N$ で与えられる。 $D(\mathbf{x})$ は次式で与えられる。

$$D(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b) = \delta(x_f - x_b) \delta(y_f - y_b), \quad (10)$$

$$\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{2d} (1 + \cos(\frac{\pi|r|}{d})) & |r| \leq d \\ 0 & |r| > d \end{cases}. \quad (11)$$

以下の全ての計算において、式 (11) に対し $d = 2\Delta x$ と設定する。式 (8) に代入する境界上の流速 $\mathbf{u}_b(\mathbf{x}_b)$ を求めるためには、格子点 \mathbf{x}_f 上の流速 $\mathbf{u}(\mathbf{x}_f)$ から、境界上の値 $\mathbf{u}_b(\mathbf{x}_b)$ を導出する必要がある。この導出に対しても、式 (10), (11) の関数 $D(\mathbf{x})$ が用いられる。境界上の値は、

$$\mathbf{u}_b(\mathbf{x}_b) = \sum_f \mathbf{u}(\mathbf{x}_f) D(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b) \Delta x^2, \quad (12)$$

により求められる。式 (12) から得られた $\mathbf{u}_b(\mathbf{x}_b)$ を、式 (8) に代入することで、境界上の外力が求められる。

3. 数値計算

3.1. Symmetric Poiseuille flow

Fig. 1 に示すように、格子点数 200×200 の領域において、 $y = 50$ と 150 の位置に埋め込み境界法により静止境界を設定し、 x 軸方向に空間に一様で時間的に一定な大きさが 10^{-7} である外力 \mathbf{F} を与える。粘性係数が式 (1) に従うべき乗則流体に対しては、断面平均流速 \bar{u} で規格化した流速の厳密解が次式で与えられる⁽⁷⁾。

$$\frac{u_x(y)_{\text{exa}}}{\bar{u}_{\text{exa}}} = \frac{2n+1}{n+1} [1 - |2y|^{1+1/n}]. \quad (13)$$

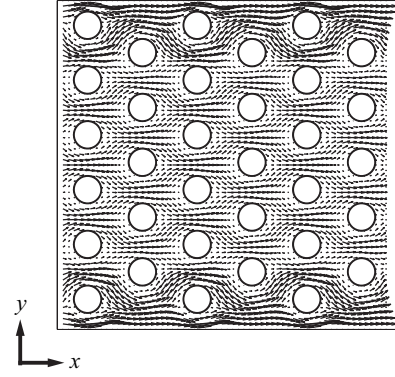
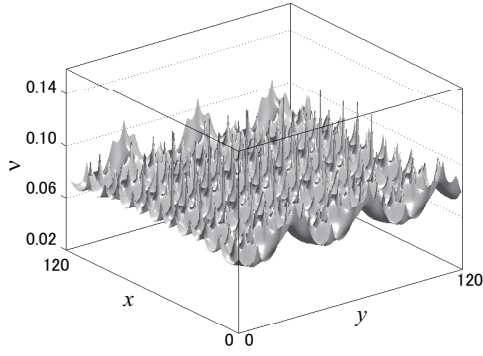


Fig. 3 Velocity distribution of a Newtonian fluid forced to flow through a porous medium.

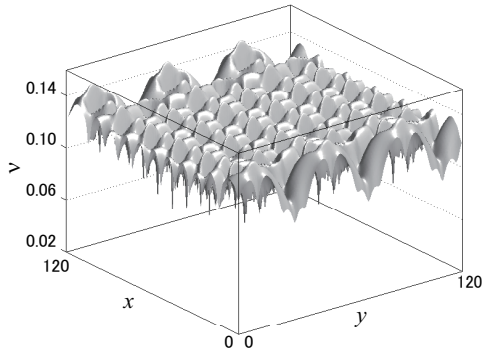
鉛直断面 ($x = 100$) における x 方向の速度成分 u_x の分布を、式 (13) の厳密解を実線で、 $n = 2$, $n = 1$, $n = 0.75$ とした場合の計算結果を、それぞれ、 \bullet , \circ , $+$ で、Fig. 2 に示す。緩和時間 $\tau > 2$ の場合、IB-LBM おいて固体壁面上に流速の滑りが発生する^(4, 5)。 $n = 1$ であるニュートン流体に対し、本 IB-LKS の Reynolds 数は約 0.4 であり、動粘性係数は $\nu = 0.3$ である。この動粘性係数に対応する IB-LBM での緩和時間の値は $\tau = 1.4$ であり、流速の滑りが発生しない条件を満足している。一方、 $n = 2$ の Shear thickening fluid では、IB-LKS の最大動粘性係数は $\nu = 0.57449$ であり、IB-LBM の緩和時間の値は $\tau = 2.22347$ に相当するため、流速の滑りが発生する可能性が高い。しかしながら、LKS の運動方程式は、LBM の緩和時間を $\tau = 1$ とした場合に相当するため、固体壁面において流速の滑りは発生せず、数値解は厳密解と良い一致を示すことが、Fig. 2 から分かる。

3.2. 多孔質体内流れ解析

Fig. 3 に示す 33 個の円柱によって構成された多孔質体に対し、IB-LKS を用い流動解析を行う。全ての境界条件に周期境界条件を用い、一边は $121\Delta x$ 、円柱の直径は $10\Delta x$ 、1 つの円柱を構成する境界上の点の総数は 180 とし、 x 軸方向に一定の外力 $\mathbf{F} = 10^{-7}$ を与える。Peskin により、境界点の間隔を $0.5\Delta x$ 以下にすることが推奨されており⁽³⁾、全計算で境界点の間隔が $0.5\Delta x$ 以下になるように設定した。本計算の境界点の間隔は $0.175\Delta x$ である。式 (1) に対し、粘性係数を $\mu_1 = 0.1\Delta x$ 、 $n = 1$ としたニュートン流体に対する流速分布を Fig. 3 に示す。Reynolds 数は 1.327×10^{-3} である。式 (1) に対し、 $\mu_1 = 0.5\Delta x$ 、 $n = 1.1$ としたダイラタント流体、 $\mu_1 = 0.02\Delta x$ 、 $n = 0.9$ とした擬塑性流体を用いた場合の流速も、Fig. 3 とほぼ等しい分布を示した。Fig. 4 (a), (b)、それぞれに、 $n = 0.9$ とした擬塑性流体 (shear thinning fluid) と、 $n = 1.1$ としたダイラタント流体 (shear thickening fluid) に対する動粘性係数 ν の分布を示す。多孔質体を構成する円柱近傍でせん断速度が増加するため、Fig. 4 (a) では円柱近傍で動粘性係数が減少し、Fig. 4 (b) では動粘性係数が増加していることが分かる。 $n = 0.9$ 、 $n = 1.0$ 、 $n = 1.1$ の各条件に対する、流束 q と外力 F との関係を Fig. 5 に示す。流束は



(a) Shear thinning fluid ($n = 0.9$)



(b) Shear thickening fluid ($n = 1.1$)

Fig. 4 Viscosity distributions calculated by the IB-LKS.

y 軸方向に平行な断面を通過する x 軸方向の流量を、空隙部分の面積で除した値である⁽⁷⁾。層流域における多孔質体内のべき乗則流体に対し、Darcy 則 $q = CF^{1/n}$ が成立することが分かっている。ここで、 C は定数である。Fig. 5 から得られた x 方向の外力 F に対する流束 q の傾きを、Table 1 の 3 列目に示す。約 3% の精度で、Darcy 則が成立していることが分かる。以上より、べき乗則モデルに基づく非ニュートン流体に対する本手法の有効性が実証された。

3.3. 粒子沈降の計算

3.3.1 単一粒子の沈降

重力加速度 $g = 981$ [cm/s²] を考慮し、非ニュートン流体で満たされたチャンネル内の粒子の沈降の計算を行う。粒子同士の衝突および粒子と壁との衝突には Glowinski によって

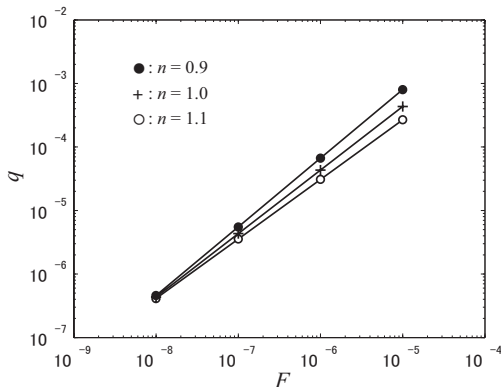


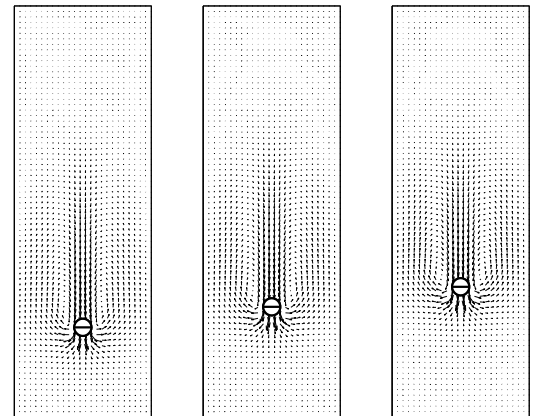
Fig. 5 Flux as a function of force for simulations of fluid flowing through the porous medium.

Table 1 Verification of the present results based on the Darcy's law.

n	1/n	present	Error(%)
1.1	0.909	0.9386	3.2407
1.0	1.000	1.0000	0.0000
0.9	1.111	1.0807	2.7229

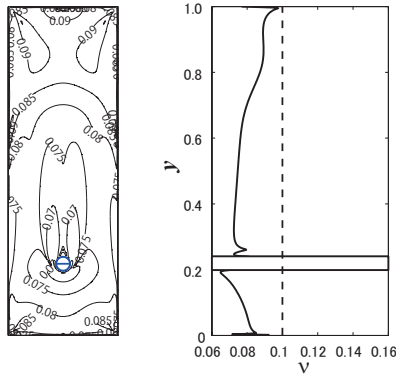
提案された反発力を用いる⁽⁹⁾。壁面の境界条件に、Zou によって提案された非平衡分布関数に対するバウンズバック・スキームを用いる⁽¹⁰⁾。チャンネル幅は 2 [cm]、高さは 6 [cm]、動粘性係数 ν_r は 0.1 [cm²/s]、流体の密度は 1.0 [g/cm³]、粒子の密度は 1.25 [g/cm³]、半径は 0.125 [cm] とし、粒子は 4 [cm] の高さに配置する。格子点数は 201 × 601、粒子の直径は $25\Delta x$ 、粒子を表す境界点の数は 360 とし、境界上の点の間隔は $0.218\Delta x$ とした。時間刻み Δt_r は LKS で定義される動粘性係数 ν を用い、 $\Delta t_r = \Delta x^2 \nu / \nu_r$ によって計算される⁽¹¹⁾。 $n = 1$ において、 $\nu = 0.1$ 、空間刻み $\Delta x_r = 0.01$ [cm] とした場合、時間刻みは $\Delta t_r = 0.0001$ [s] となる。 $n = 0.95$ 、 $n = 1.00$ 、 $n = 1.05$ に対する時間 $t = 0.5$ [s] における流速分布を、Fig. 6 に示す。なお、ニュートン流体の Reynolds 数は 0.0326 であった。 $n = 0.95$ に対し $\mu_1 = 0.05\Delta x$ 、 $n = 1.05$ に対し $\mu_1 = 0.2\Delta x$ とした。

Fig. 6 (a), (c) で示された計算結果に対応するチャンネル内の動粘性係数の分布を、 $x_r = 1.0$ [cm] における断面図と共に、それぞれ、Fig. 7 (a), (b) に示す。Fig. 7 に示される動粘性係数の断面図から多孔質体内流れ解析と同様に、粒子の沈降の計算においても、せん断速度が増大する粒子周りにおいて、Shear thinning fluid では粘性が減少し、Shear thickening fluid では粘性が増大することが分かる。この粘性の変化により、Fig. 6 に示されるように、非ニュートン流体中の粒子の落下速度は、ニュートン流体の場合と異なってくる。擬塑性流体 (Shear thinning fluid) を破線で、ニュートン流体を実線で、ダイラタント流体 (Shear thickening fluid) を点線で、Wan による参照解⁽¹²⁾ を ● で、Fig. 6 の計算結果に対する粒子の速度と位置の時間変化を、Fig. 8 (a), (b) に、それぞれ、示す。実線で示されたニュートン流体 ($n = 1$) に対し、本計算結果と Wan による参照解⁽¹²⁾ とが良い一致を示している。

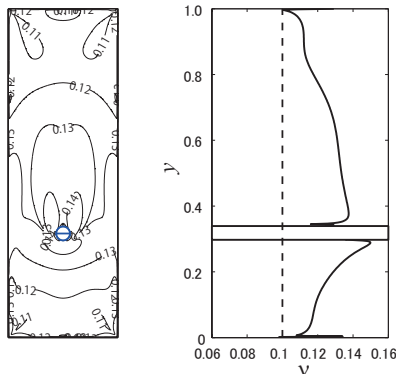


(a) $n = 0.95$ (b) $n = 1.00$ (c) $n = 1.05$

Fig. 6 Sedimentation of a particle in a channel ($t = 0.5$ [s]).



(a) Shear thinning fluid ($n = 0.95$)



(b) Shear thickening fluid ($n = 1.05$)

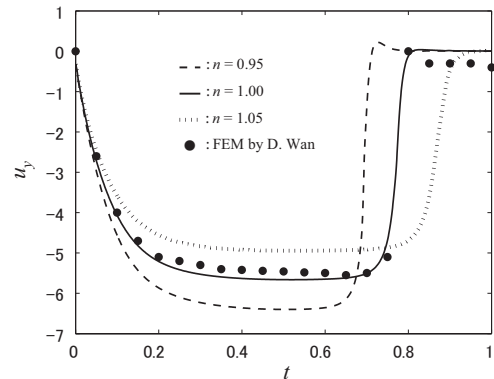
Fig. 7 Viscosity distribution for the sedimentation of a particle in a channel ($t = 0.5$ [s]).

Shear thinning fluid 内の粒子の落下に対し、粘性が減少することにより、実験結果⁽¹³⁾と同様に、ニュートン流体の場合と比較し粒子が速く落下することが、Fig. 8 から分かる。

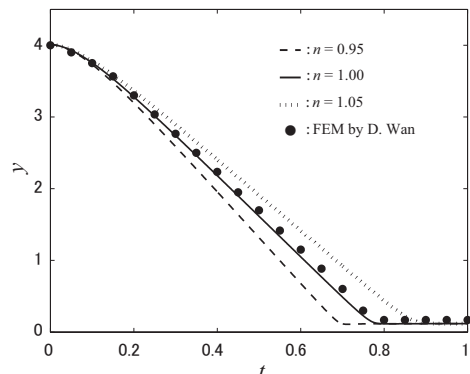
3.3.2 多粒子の沈降

最後に、擬塑性流体 (Shear thinning fluid) で満たされたチャンネル内の多粒子の沈降の計算を行う。チャンネル幅は 2.05 [cm]、高さは 6.15 [cm]、動粘性係数は 0.1 [cm²/s]、流体の密度は 1.0 [g/cm³]、粒子の密度は 1.1 [g/cm³]、直径は 0.15 [cm] の粒子を 30 個千鳥状に配置する。時間刻みは 0.0001 [s] である。粒子の直径は $15\Delta x$ 、境界点の数は 180、境界点の間隔は $0.262\Delta x$ である。

Fig. 9 (a) に、ニュートン流体に対する流速分布と粒子位置の時間変化を示す。非ニュートン流体 ($n = 0.95, \mu_1 = 0.05\Delta x$) に対する流速分布と、粘性係数の分布の時間変化を、Fig. 9 (b), (c) に、それぞれ、示す。ニュートン流体と非ニュートン流体とも、上部にあった粒子が下部の粒子に追いつく Drafting 現象が、Fig. 9 において確認された。また、擬塑性流体 (Shear thinning fluid) では、固体粒子周辺の粘性が減少することで、落下した粒子の後方に形成される低粘性領域を、後続の粒子が追従することで、 Yu の計算結果⁽¹⁴⁾と同様に、クラスターが形成されやすくなることも明らかになった。以上より、本 IB-LKS は、非ニュートン流体中の固液二相流解析に適用可能であることが実証された。



(a) Translational velocity of a particle



(b) Longitudinal coordinates of a particle

Fig. 8 Sedimentation of a particle in a channel .

4. おわりに

吉野により提案された非ニュートン流体解析に対する LKS に、IBM を適用することにより、非ニュートン流体 (べき乗則流体) 内の固液二相流解析の計算を行った。Symmetric Poiseuille flow の計算において、IB-LBM で問題となった境界上の流速の滑りも観察されず、厳密解と数値解とが良い一致を示した。多孔質体内の非ニュートン流体解析では、与えられた外力に対し、Darcy 則にほぼ従う流束が IB-LKS による計算によって得られた。非ニュートン流体内の粒子の沈降の計算では、多粒子のクラスター化現象が観測され、本手法の非ニュートン流体内固液二相流解析に対する適用性が実証された。今後、ベントナイトスラリーに対し、べき乗則モデルよりも適切な Papanastasiou のモデル等によるビンガム流体⁽⁶⁾を用いた、非ニュートン流体内の固液二相流解析を実施する予定である。

なお、本研究の実施に当たり、大変貴重なご意見を頂いた東京工業大学高橋亮一名誉教授、富山大学竹越栄俊名誉教授、富山大学奥井健一名誉教授、筑波大学阿部豊教授、神戸大学富山明男教授に深謝する。

参考文献

- (1) Yoshida, H. Horii, H. : Micromechanics-Based Continuum Model for a Jointed Rock Mass and Excavation Analysis of a Large-Scale Cavern, Int. J. Rock Mech. Min., **41**(2004), pp. 119–145.

- (2) Chen, S., Doolen, G. D. : Lattice Boltzmann method for fluid flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**(1998), pp. 329–364.
- (3) Peskin, C. S. : Flow patterns around heart valves: A numerical method, *J. Comput. Phys.*, **10**(1972), pp. 252–271.
- (4) Le, G., Zhang, J. : Boundary slip from the immersed boundary lattice Boltzmann models, *Phys. Rev. E*, **79**(2009), pp. 026701.
- (5) Seta T., Rojas, R., Hayashi, K., and Tomiyama, A. : Implicit-correction-based immersed boundary–lattice Boltzmann method with two relaxation times, *Phys. Rev. E*, **89**(2014), pp. 023307.
- (6) Ohta, M., Nakamura, T., Yoshida, Y., Matsukuma Y. : Lattice Boltzmann simulations of viscoplastic fluid flows through complex flow channels, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **166**(2011), pp. 404–412.
- (7) Yoshino, M. Hotta, Y. Hirozane, T. Endo, M. : A numerical method for incompressible non-Newtonian fluid flows based on the lattice Boltzmann method, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **147**(2007), pp. 69–78.
- (8) Inamuro, T., Yoshino, M., Ogino, F. : Accuracy of the lattice Boltzmann method for small Knudsen number with finite Reynolds number, *Phys. Fluids*, **9**(1997), pp. 3535–3542.
- (9) Glowinski, R., Pan, T.-W., Hesla, T. I., Joseph, D. D. : A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows, *Int. J. Multiphase Flow*, **25**(1999), pp. 755–794.
- (10) Zou, Q., He, X. : On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, *Phys. Fluids*, **9**(1997), pp. 1591–1598.
- (11) Feng, Z.-G., Michaelides, E. E. : Proteus: a direct forcing method in the simulations of particulate flows, *J. Comput. Phys.*, **202**(2005), pp. 20–51.
- (12) Wan, D., Turek, S. : Direct numerical simulation of particulate flow via multigrid FEM techniques and the fictitious boundary method, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **51**(2006), pp. 531–566.
- (13) Gheissary, G., van den Brule, B. H. A. A. : Unexpected phenomena observed in particle settling in non-Newtonian media, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **67**(1996), pp. 1–18.
- (14) Yu, Z., Wachs, A., Peysson, Y. : Numerical simulation of particle sedimentation in shear-thinning fluids with a fictitious domain method, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **136**(2006), pp. 126–139.

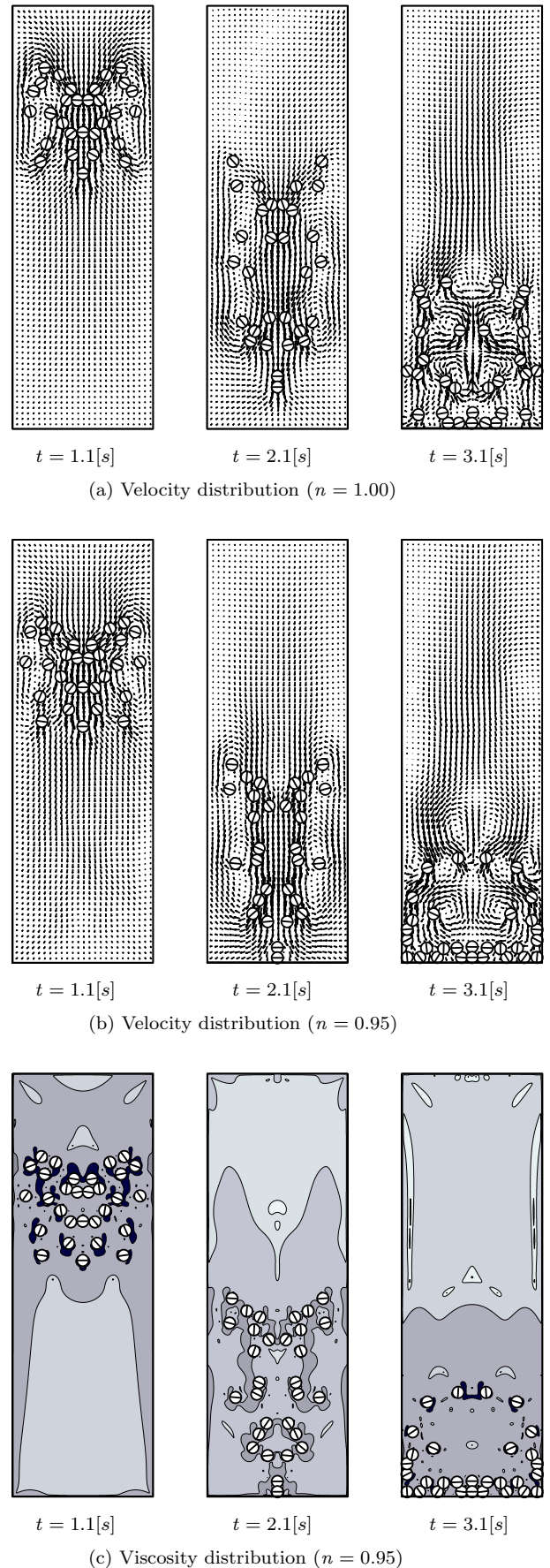


Fig. 9 Sedimentation of thirty particles in a channel.