

# 3次元音響問題におけるレベルセット法と高速多重極境界要素法に基づくインピーダンス境界を有する散乱体のトポロジー最適化

## A TOPOLOGY OPTIMISATION IN 3D-ACOUSTICS FOR SCATTERERS WITH IMPEDANCE BOUNDARIES WITH THE LEVEL SET METHOD AND THE FAST MULTIPOLE BOUNDARY ELEMENT METHOD

近藤 豊大<sup>1)</sup>, 飯盛 浩司<sup>2)</sup>, 高橋 徹<sup>3)</sup>, 松本 敏郎<sup>4)</sup>

Toyohiro KONDO, Hiroshi ISAKARI, Toru TAKAHASHI and Toshirou MATSUMOTO

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t\_kondo@nuem.nagoya-u.ac.jp)  
 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: isakari@nuem.nagoya-u.ac.jp)  
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)  
 4) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)

A topology optimisation is considered as one of the most promising computer-aided design methods. In the previous study, we have proposed one with the fast multipole boundary element method (FMBEM) and the level set method for acoustic devices in 3D. The previous method is, however, insufficient for some engineering applications since it deals only with rigid scatterers. In this paper, we propose a new topology optimisation method which can design scatterers with impedance boundaries. A detailed derivation of the topological derivative for the design problem and the algorithm of the topology optimisation, along with some numerical examples which verify the validity and efficiency of the proposed method, are presented.

**Key Words:** Topology optimisation, Level set method, Fast multipole boundary element method, Impedance boundary condition, 3D acoustics

### 1. 緒言

トポロジー最適化<sup>(1)</sup>は、構造体の形状のみならず新たな孔・異種材料の生成を許容する点から、寸法最適化<sup>(2)</sup>や形状最適化<sup>(3)</sup>など、他の構造最適化設計手法と比較して設計自由度の高い最適設計手法である。従来、トポロジー最適化は構造力学分野への応用を見込んだ研究が多かったが<sup>(3, 4)</sup>、近年では、音響学、弾性学、電磁気学などに支配される場における各種波動デバイスの設計への適用例が見られる<sup>(5, 6, 7, 8)</sup>。

著者らはこれまでに、境界要素法を用いた3次元音響問題に対するトポロジー最適化手法の先行研究として、最適化の過程で新たに生成する散乱体の境界条件を斉次 Neumann 条件、つまり散乱体を剛体に限定した問題に対する設計手法を開発した<sup>(8)</sup>。具体的には、所望の点群における音圧ノルムを最小化する剛体の分布を求めた。得られた最適解に対応する境界要素数が数十万程度となる最適化問題を、順解析・

随伴解析に高速多重極境界要素法 (FMBEM; Fast Multipole Boundary Element Method)<sup>(9, 10)</sup>を用いることで、現実的な計算時間で解けることを示した。しかし、実際の設計問題への応用を見込んだ場合、デバイスに用いられる材料を必ずしも剛体とみなせるとは限らない。

そこで本研究では、実際の材料音響特性により近い物理的条件であるインピーダンス境界条件に注目する。インピーダンス境界条件は、境界上の音圧  $u$  と、その法線方向微分  $\frac{\partial u}{\partial n}$  の線形結合式で与えられる。例えば、本研究で取り扱う音響問題におけるインピーダンス境界条件は  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{i\rho\omega}{z}u$  と定義される。ここに、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $\rho$  は材料の密度、 $\omega$  は角周波数を示す。また  $z$  は音響インピーダンスであり、音圧に対する粒子速度の比を表す。つまり、音響インピーダンスの値が変化すると、境界における音波の反射強度が変化する。また、音響インピーダンスの値により、境界における音波の位相も変化する (例えば  $z = 0$  は固定端反射、 $z = \infty$  は自由端反射に相当する)。インピーダンス境界を有する介在物の湧き出

しに対応するトポロジー導関数に関する検討例としては、2次元 Laplace 方程式に対する Novotny ら<sup>(11)</sup>の研究を挙げることが出来るが、3次元音響問題に対応する研究は著者らの知る限り見受けられない。そこで本研究では、最適化の過程において新たに発生する散乱体の境界において、インピーダンス境界条件を課す3次元音響問題のトポロジー最適化を新しく開発する。

トポロジー導関数の数値計算に必要な3次元音場の伝播問題に対する数値解析手法としては、FMBEMを用いる。FMBEMを用いることで、無限遠を含む領域で定義される境界値問題を厳密に取り扱うことが可能となる。また、散乱体形状の表現にはレベルセット法<sup>(4)</sup>を用いる。レベルセット法は、対象領域の境界をレベルセット関数の等位面によって容易に表現することができる点から、散乱体の境界を離散化する必要があるFMBEMに対して非常に有用であると考えられる。また、最適なレベルセット関数の分布を求める問題を、拡散項を含む時間発展方程式を解く問題に帰着させることで実際に創成可能な滑らかな形状を得ることが可能になる。

## 2. レベルセット法に基づくトポロジー最適化

### 2.1. 音響最適化問題の定式化

本節では、本稿で取り扱う3次元音響問題における最適化問題の定式化を行う。境界 $\Gamma$ を有する空間領域 $\Omega$ において、

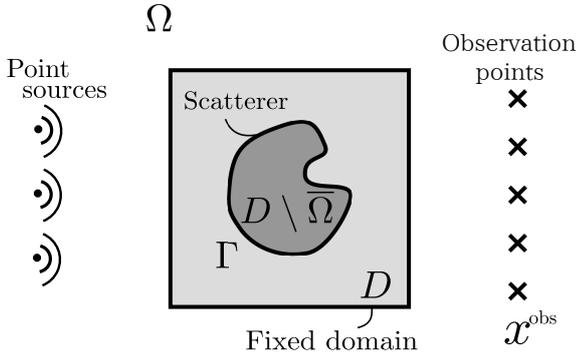


Fig. 1 An optimisation problem.

有限の固定設計領域 $D \subset \Omega$ を設ける。ここに領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は無限遠を含むとする。式(1)に示す領域 $\Omega' \subset \Omega \setminus D$ および、 $\Omega$ の境界 $\Gamma$ で定義される目的汎関数 $J$ を極小とする固定設計領域 $D$ 内の散乱体 $D \setminus \bar{\Omega}$ の分布を求める(Fig. 1)。

$$J = \int_{\Omega} f(u(\mathbf{x})) H(\Omega') d\Omega + \int_{\Gamma} g(u(\mathbf{x}), q(\mathbf{x})) d\Gamma \quad (1)$$

ここに、 $f, g$ はそれぞれ、 $\Omega, \Gamma$ 上で定義される実数値を返す汎関数である。関数 $H$ はHeaviside関数を表し、次のように定義する。

$$H(\Omega') = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega' \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega' \end{cases}$$

Heaviside関数を用いることにより、目的汎関数が定義される観測点の位置を領域 $\Omega'$ 、すなわち固定設計領域の外部に制約することができる。また、複素関数 $u, q$ は $\mathbf{x} \in \Omega$ に対して、以下に示すHelmholtz方程式の境界値問題に支配さ

れる。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

$$u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{x}) \quad \text{on } \Gamma_u \quad (3)$$

$$q(\mathbf{x}) := \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} = -i\omega\rho\tilde{v} = \tilde{q}(\mathbf{x}) \quad \text{on } \Gamma_q \quad (4)$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{i\rho\omega}{z} u(\mathbf{x}) \quad \text{on } \Gamma_z \quad (5)$$

$$\text{Sommerfeldの放射条件} \quad \text{for } u \quad (6)$$

上に示す境界値問題を順問題と呼ぶ。ここに、 $u$ は音圧、 $k$ は波数、 $n$ は境界 $\Gamma$ における $\Omega$ の外向き単位ベクトル、 $\tilde{u}, \tilde{q}$ は既知の関数、 $\tilde{v}$ は既知の粒子速度の法線方向成分を表す。 $\Gamma_u, \Gamma_q, \Gamma_z$ は境界 $\Gamma$ の部分領域であり、次式を満たす。

$$\bar{\Gamma}_u \cup \bar{\Gamma}_q \cup \bar{\Gamma}_z = \Gamma \quad (7)$$

$$\Gamma_u \cap \Gamma_q = \emptyset \quad (8)$$

$$\Gamma_q \cap \Gamma_z = \emptyset \quad (9)$$

$$\Gamma_u \cap \Gamma_z = \emptyset \quad (10)$$

以上の諸式を用いて、本研究で取り扱うトポロジー最適化問題は次のように定義される。

$$\min_{\Omega} J(\Omega) = \int_{\Omega} f(u) H(\Omega') d\Omega + \int_{\Gamma} g(u, q) d\Gamma \quad (11)$$

$$\text{subject to 式(2)–式(6)} \quad (12)$$

### 2.2. トポロジー導関数の導出

本節では最小化問題の解の探索に必要なトポロジー導関数の導出について述べる。無限領域 $\Omega$ に音響インピーダンス $z$ を持つ微小球を発生させた場合を考える。ただし、微小球の領域と境界をそれぞれ $\Omega_\epsilon, \Gamma_\epsilon$ とする。微小球 $\Omega_\epsilon$ の発生により式(2)–(5)の境界値問題に支配される関数 $u, q$ 、そして式(1)で定義される目的汎関数 $J$ がそれぞれ、 $u + \delta u, q + \delta q, J + \delta J$ に変化したとする。この時 $\delta u$ は次の境界値問題に支配される。

$$\nabla^2 \delta u(\mathbf{x}) + k^2 \delta u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \bar{\Omega}_\epsilon \quad (13)$$

$$\delta u(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{on } \Gamma_u \quad (14)$$

$$\delta q(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{on } \Gamma_q \quad (15)$$

$$\delta q(\mathbf{x}) = \frac{i\rho\omega}{z} \delta u(\mathbf{x}) \quad \text{on } \Gamma_z \quad (16)$$

$$\delta q(\mathbf{x}) = \frac{i\rho\omega}{z} \delta u(\mathbf{x}) - q(\mathbf{x}) + \frac{i\rho\omega}{z} u(\mathbf{x}) \quad \text{on } \Gamma_\epsilon \quad (17)$$

$$\text{Sommerfeldの放射条件} \quad \text{for } \delta u \quad (18)$$

また、微小球 $\Omega_\epsilon$ の発生による目的汎関数の変化分 $\delta J$ は次式となる。

$$\delta J = \text{Re} \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial u} H(\Omega') \delta u(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial u} \delta u(\mathbf{x}) + \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial q} \delta q(\mathbf{x}) \right) d\Gamma \right] \quad (19)$$

ここで、次の境界値問題に支配される随伴変数  $\lambda(\boldsymbol{x})$  を定義する。

$$\nabla^2 \lambda(\boldsymbol{x}) + k^2 \lambda(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial u} H(\Omega') = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (20)$$

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial q} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (21)$$

$$\mu(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial \lambda(\boldsymbol{x})}{\partial n} = \frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial u} \quad \text{on } \Gamma_q \quad (22)$$

$$\mu(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial u} = \frac{i\rho\omega}{z} \left( \lambda(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial g(\boldsymbol{x})}{\partial q} \right) \quad \text{on } \Gamma_z \quad (23)$$

$$\text{Sommerfeld の放射条件} \quad \text{for } \lambda \quad (24)$$

上記の境界値問題を随伴問題と呼ぶ。このとき、 $\Omega \setminus \bar{\Omega}_\epsilon$  において、 $\delta u$ 、 $\lambda$  に対する次の相反定理が成り立つ。

$$\int_{\Gamma \cup \Gamma_\epsilon} \delta u \mu d\Gamma - \int_{\Gamma \cup \Gamma_\epsilon} \lambda \delta q d\Gamma + \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_\epsilon} \delta u \frac{\partial f}{\partial u} H(\Omega') d\Omega = 0 \quad (25)$$

境界条件である式 (14)–(17)、式 (21)–(23) を式 (25) に代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_\epsilon} \delta u \frac{\partial f}{\partial u} H(\Omega') d\Omega + \int_{\Gamma_u} \frac{\partial g}{\partial u} \delta q d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \frac{\partial g}{\partial u} \delta u d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_z} \delta u \left( \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{i\rho\omega}{z} \frac{\partial g}{\partial q} \right) \delta u d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_\epsilon} \lambda \frac{i\rho\omega(u + \delta u)}{z} d\Gamma - \int_{\Gamma_\epsilon} \lambda q d\Gamma \\ & + \int_{\Omega_\epsilon} (\nabla \lambda \cdot \nabla u - k^2 \lambda u) d\Omega \end{aligned} \quad (26)$$

式 (26) より式 (19) は次式となる。

$$\begin{aligned} \delta J = \text{Re} \left[ \int_{\Gamma_\epsilon} \lambda \frac{i\rho\omega(u + \delta u)}{z} d\Gamma - \int_{\Gamma_\epsilon} \mu \delta u d\Gamma \right. \\ \left. + \int_{\Omega_\epsilon} (\lambda_{,j} u_{,j} - k^2 \lambda u) d\Omega \right] \end{aligned} \quad (27)$$

ここに  $\lambda_{,j} u_{,j} = \sum_{j=1}^3 \lambda_{,j} u_{,j}$  である (Einstein の総和規約)。通常の複素内積とは異なることに注意されたい。

次に  $\delta J$  の評価を考える。 $\delta J$  の評価のためには境界  $\Gamma_\epsilon$  における  $\delta u$  を評価する必要がある。そこで、発生させた微小球の半径  $\epsilon$  を 0 に極限近似することで  $\delta u$  が満たす境界値問題 (式 (13)–(17)) を次のように近似する。

$$\nabla^2 \delta u + k^2 \delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_\epsilon \quad (28)$$

$$\delta q = \frac{i\rho\omega}{z} \delta u - \frac{\partial u^0}{\partial n} + \frac{i\rho\omega}{z} u^0 \quad \text{on } \Gamma_\epsilon \quad (29)$$

$$\text{Sommerfeld の放射条件} \quad \text{for } \delta u \quad (30)$$

ここに、 $u^0$ 、 $\frac{\partial u^0}{\partial n}$  は微小球  $\Omega_\epsilon$  の中心  $\boldsymbol{x}^0$  における  $u$ 、 $\frac{\partial u}{\partial n}$  の値である。上の境界値問題の解である  $\delta u$ 、 $\delta q$  を球関数で展開し、得られた関数と式 (29) から、 $\Gamma_\epsilon$  における  $\delta u$  は次式となる。

$$\delta u(\boldsymbol{x}) = -u^0 \frac{h_0^{(1)}(k\epsilon)}{A_0} - \frac{iz u_{,j}^0 n_j}{2\rho\omega} \frac{h_1^{(1)}(k\epsilon)}{A_1} \quad (31)$$

ここに、 $h_n^{(1)}$  は  $n$  次の第 1 種球 Hankel 関数を示し、 $A_j$  ( $j = 0, 1$ ) は次のように定義される定数である。

$$A_j = h_j^{(1)}(k\epsilon) - \frac{iz}{\rho\omega} \frac{\partial h_j^{(1)}(kr)}{\partial r} \Big|_{r=\epsilon} \quad (32)$$

さらに、式 (31) の右辺第 1 項の  $\frac{h_0^{(1)}(k\epsilon)}{A_0}$ 、第 2 項の  $\frac{h_1^{(1)}(k\epsilon)}{A_1}$  の  $\epsilon \rightarrow 0$  における漸近展開は、それぞれ以下の式で表される。

$$\frac{h_0^{(1)}(k\epsilon)}{A_0} = -\frac{i\rho\omega}{z} \epsilon + \frac{\rho\omega(kz + \rho\omega)}{z^2} \epsilon^2 + o(\epsilon^2) \quad (33)$$

$$\frac{h_1^{(1)}(k\epsilon)}{A_1} = -\frac{i\rho\omega}{2z} \epsilon + \frac{1}{4} \frac{\rho^2 \omega^2}{z^2} \epsilon^2 + o(\epsilon^2) \quad (34)$$

式 (31) に式 (33)、(34) を代入することで  $\Gamma_\epsilon$  における  $\delta u$  の  $\epsilon \rightarrow 0$  の漸近展開を得る。

$$\delta u|_{\Gamma_\epsilon} = \left( u^0 \frac{i\rho\omega}{z} - \frac{u_{,j}^0 n_{,j}}{4} \right) \epsilon + o(\epsilon) \quad (35)$$

以上で得られた  $\delta u$  を用いると、式 (27) の右辺第 1 項、第 2 項、第 3 項はそれぞれ次のように評価できる。

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \lambda \frac{i\rho\omega(u + \delta u)}{z} d\Gamma = o(\epsilon^2) \quad (36)$$

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \mu \delta u d\Gamma = \lambda^0 u^0 \frac{i\rho\omega}{z} (4\pi\epsilon^2) + o(\epsilon^2) \quad (37)$$

$$\int_{\Omega_\epsilon} (\lambda_{,j} u_{,j} - k^2 \lambda u) d\Omega = o(\epsilon^2) \quad (38)$$

式 (36)–(38) から  $\delta J$  は次式で表すことができる。

$$\delta J = \text{Re} \left[ \lambda^0 u^0 \frac{i\rho\omega}{z} (4\pi\epsilon^2) \right] + o(\epsilon^2) \quad (39)$$

ところで、トポロジ導関数  $\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$  は、インピーダンス  $z$  を有する微小球  $\Omega_\epsilon$  が  $\boldsymbol{x}$  に出現した場合の目的汎関数の変化の割合を示す関数であり、次式で定義される。

$$\delta J = \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) s(\epsilon) + o(s(\epsilon)) \quad (40)$$

ここに、 $s(x)$  は  $x > 0$  における単調増加関数を表し、ここでは  $s(x) = 4\pi x^2$  と定義する。以上より、本問題におけるトポロジ導関数は次式となる。

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \text{Re} \left[ \lambda^0 u^0 \frac{i\rho\omega}{z} \right] \quad (41)$$

トポロジ導関数が  $\mathcal{T} > 0$  ( $< 0$ ) である点  $\boldsymbol{x}$  にインピーダンス境界条件を持つ微小球が発生する場合、目的汎関数は上昇 (減少) する。

式 (41) に現れる  $u^0$ 、 $\lambda^0$  の計算には高速多重極境界要素法を用いる。すなわち、各々、式 (2)–(6)、式 (20)–(24) で表される境界値問題に対応する境界積分方程式を数値的に解き、最適化アルゴリズムが要求する点  $\boldsymbol{x}^0$  において内点計算を実行する。

### 2.3. レベルセット法について

本節では、散乱体の形状表現に用いるレベルセット法について述べる。詳細は Yamada et al. (4) を参照されたい。

レベルセット法とは、レベルセット関数  $\phi$  の値によって空間領域  $\Omega$ 、物体領域  $D \setminus \bar{\Omega}$ 、そしてその境界  $\Gamma$  の形状を表現

する手法である．本提案手法ではレベルセット関数  $\phi$  を，点  $x$  の属する領域毎に次のように定義する．

$$\begin{cases} 0 < \phi(x) \leq 1 & \forall x \in D \setminus \bar{\Omega} \\ \phi(x) = 0 & \forall x \in \Gamma \\ -1 \leq \phi(x) < 0 & \forall x \in \Omega \end{cases} \quad (42)$$

レベルセット関数の導入により，トポロジー最適化問題はレベルセット関数  $\phi$  の分布を求める問題となる．2.1 節で定義した最適化問題を満たすレベルセット関数  $\phi$  の最適分布を直接求めることは難しいため，仮想的な時間を導入し，次式で定義される時間発展方程式を解くことで  $\phi$  を更新し，その最適分布を求める．

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = -CT(x, t) + \tau L^2 \nabla^2 \phi(x, t) \quad \text{on } D \quad (43)$$

ここに， $t$  は仮想的な時間， $C$  は適当な正の定数， $\tau$  は正則化係数， $L$  は固定設計領域  $D$  の代表長さを示す．本最小化問題において，式 (43) の右辺第 1 項は，トポロジー導関数が  $T > 0$  ( $< 0$ ) の場合，ある点  $x$  に微小球が発生すると目的汎関数は増加 (減少) するため，散乱体を配置しない (する) よう  $\phi$  を更新することを意味する．右辺第 2 項は，点  $x$  におけるレベルセット関数の曲率の絶対値が大きい場合に，これを小さくするための項である． $\tau > 0$  の大きさを調整することにより，得られる形状の複雑さを規定することができる．また，最適化の過程における散乱体の生成を固定設計領域  $D$  に制限するため，次の境界条件を与える．

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{in } \partial D \quad (44)$$

ここに， $\bar{\phi}$  は適当な負の既知関数である．

以上から，レベルセット関数の分布を求める問題は式 (43)，(44)，及び初期条件で定義される初期条件境界値問題となる．その解析手法として，本提案手法では時間方向に前進差分，空間方向に有限要素法を用いる．

#### 2.4. 最適化アルゴリズム

2.2 節，2.3 節に示した手法を用いると，2.1 節に示す最適化問題の求解アルゴリズムは以下のように書ける．

1. 固定設計領域を有限要素 (ボクセル) に分割し，その節点にレベルセット関数の初期値を与える．
2. レベルセット関数の分布に対応する境界要素を生成し，高速多重極境界要素法を用いて目的汎関数 (1) 及び固定設計領域内の全有限要素節点におけるトポロジー導関数 (41) を計算する．目的汎関数が収束していれば，最適化を終了する．
3. 初期値境界値問題 (43)，(44) を有限要素法で解き，次のステップにおけるレベルセット関数の分布を求める．2. に戻る．

### 3. 数値実験

#### 3.1. トポロジー導関数

前節で導出したトポロジー導関数の妥当性の検証のため，以下に示す数値実験を行った (Fig. 2) ．

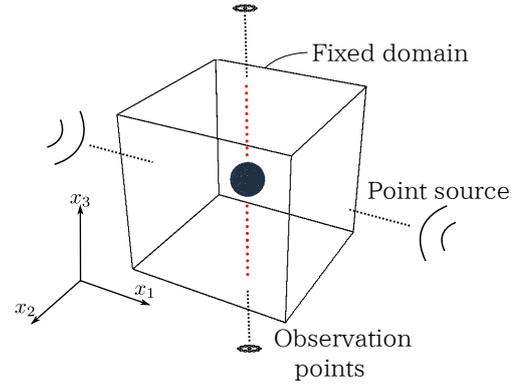


Fig. 2 Incident wave, observation points, calculation points.

実験の条件は次のとおりである．固定設計領域を  $D = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_i \leq 2.5 \ (i = 1, 2, 3)\}$  とし，周波数 340Hz の点音源を  $(5.0, 1.25, 1.25)$ ， $(-2.5, 1.25, 1.25)$  にそれぞれ設けた．点音源の強度は 70 とした．波数  $k$  は  $2\pi$ ，密度  $\rho$  は 1.0 とした．目的関数は点  $(1.25, 1.25, 5.0)$ ， $(1.25, 1.25, -2.5)$  及びこの点を中心として， $x_1$ - $x_2$  平面に平行な半径 0.1 の円周を等分割した 10 点の合計  $N = 22$  点における音圧ノルムの 2 乗和で定義される次式とした．

$$J = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \left| u(x_i^{\text{obs}}) \right|^2 \quad (45)$$

$\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  は中心  $(1.25, 1.25, 1.25)$ ，半径 0.25 の球とし，境界条件としてインピーダンス境界条件を与え，音響インピーダンスは  $z = 2\pi$  とした．また，球表面の境界要素数は 26520 とした．

以上の条件下で， $x_1 = x_2 = 1.25$  上のいくつかの点におけるトポロジー導関数を計算した．トポロジー導関数は，前述のとおり，固定設計領域内の各点にインピーダンス  $z$  を有する微小球  $\Omega_\epsilon$  が発生した際の目的関数  $J$  の変化の割合を表す関数である．ここでは，発生する微小球のインピーダンスは  $z = 2\pi$  とした．

Fig. 3 にトポロジー導関数を示す．また，reference としてトポロジー差分 (8) を重ねて plot している．トポロジー差分を計算する際に必要となる微小球の半径は  $\epsilon = 0.001$  とした． $1.0 \leq x_3 \leq 1.5$  において点が見られないのは，微小球が領域  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$  内に含まれており，トポロジー導関数を定義できないためである．グラフから分かるように，両者は良く一致しており，導出したトポロジー導関数の妥当性が確認できる．

#### 3.2. 数値実験例

本節では，トポロジー最適化の数値実験例を示す．

実験の条件は次のとおりである．固定設計領域を  $D = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 \leq x_i \leq 2.5 \ (i = 1, 2, 3)\}$  とし，周波数 340Hz の点音源を  $(1.25, 1.25, -2.5)$  に設けた．点音源の強度は 70 とした．波数  $k$  は  $2\pi$ ，密度  $\rho$  は 1.0 とした．目的関数は，中心  $(1.25, 1.25, 1.25)$ ，半径 2.5 の球の  $1.25 \leq x_3$  の半球の表面に等間隔に設置した合計  $N = 33$  点の観測点における音圧ノ

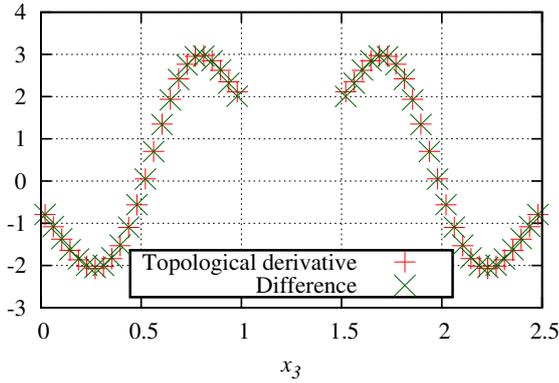


Fig. 3 The comparison of topological derivatives with topological differences.

ルムの2乗和で定義される式(45)とする。Fig. 4に示す領域を初期形状とし、式(45)の目的汎関数を最小化する散乱体の分布を求めた。ただし、音響インピーダンスは $z = 1, 10$ とした。最適化のステップにおける目的汎関数の推移をそれぞれFig. 5に示す。 $z = 1$ の場合、初期形状である1ステップ

Observation points seted on a hemisphere

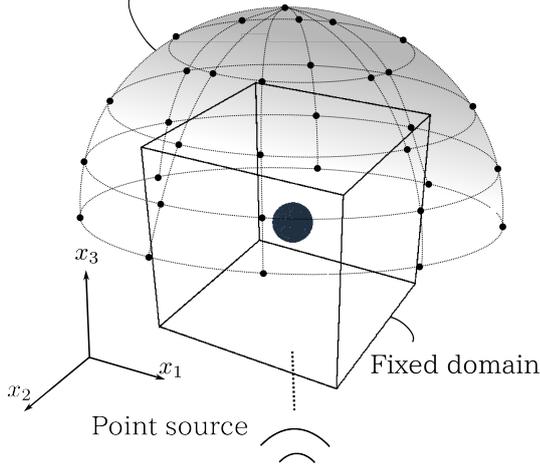


Fig. 4 Incident wave, observation points, fixed design domain.

目における目的汎関数は $J = 17.28$ であるが、10ステップ目には $J = 3.23$ となった。 $z = 10$ の場合、初期形状である1ステップ目における目的汎関数は $J = 17.72$ であるが、10ステップ目には $J = 7.36$ となった、いずれの場合においても、本提案手法を用いて目的汎関数を減少させることに成功した。

$z = 1, z = 10$  各々の場合について、最適形状である10ステップ目における散乱体の形状をFig. 6, Fig. 7に示す。いずれの場合においても、滑らかな形状が得られたことが確認できる。

また、 $z = 1, 10$  の場合の $x_1 = 1.25$  平面における音圧ノルムの分布をそれぞれFig. 8に示す。両者とも、 $-x_3$  方向からの入射波を波の干渉を用いて跳ね返すような構造してお

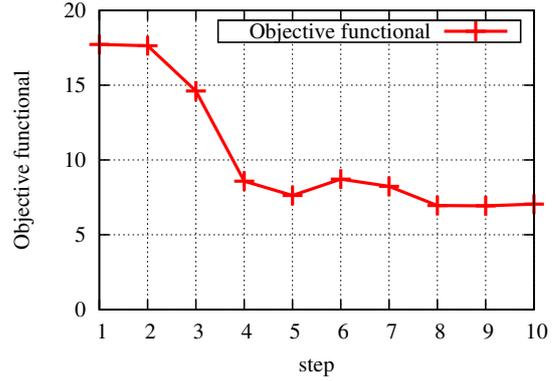
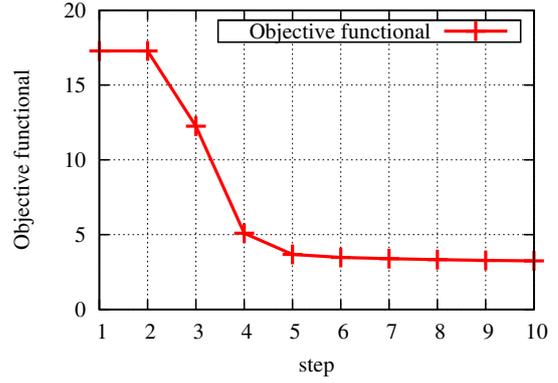


Fig. 5 The history of the objective functional in the cases of  $z = 1$  (up),  $z = 10$  (down).

り、散乱体から各観測点に向けて白い筋が確認できる。このことから、入射波と散乱波の干渉を利用して、観測点における音圧ノルムを減少させる構造であることが分かる。

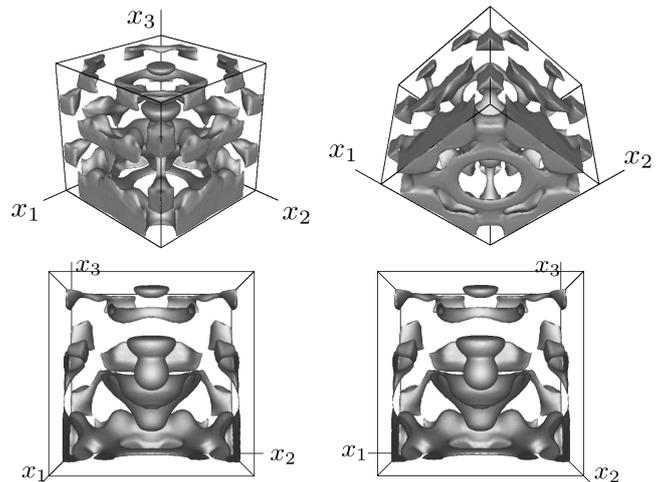


Fig. 6 The optimum shape in the case of  $z = 1$ .

#### 4. 結言

インピーダンス境界条件を含んだ3次元音響問題に対するトポロジー最適化手法について、そのトポロジー導関数の導出と数値実験を行った。トポロジー差分を用いたトポロジー導関数の数値的検証を行い、その妥当性を確認した。3次元Helmholtz方程式に支配される場における音圧最小化問題の

## 参考文献

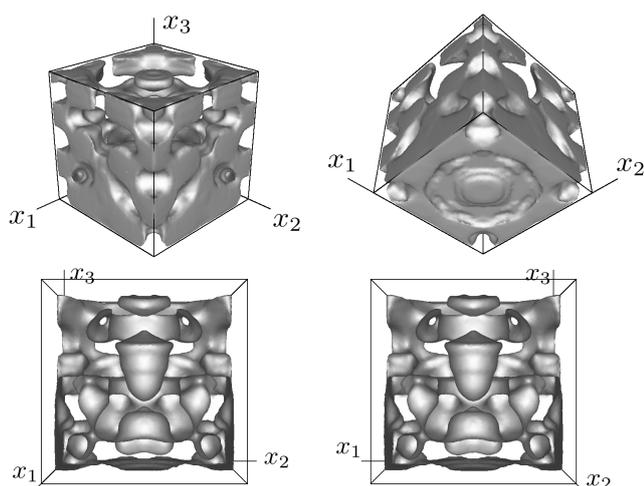


Fig. 7 The optimum shape in the case of  $z = 10$ .

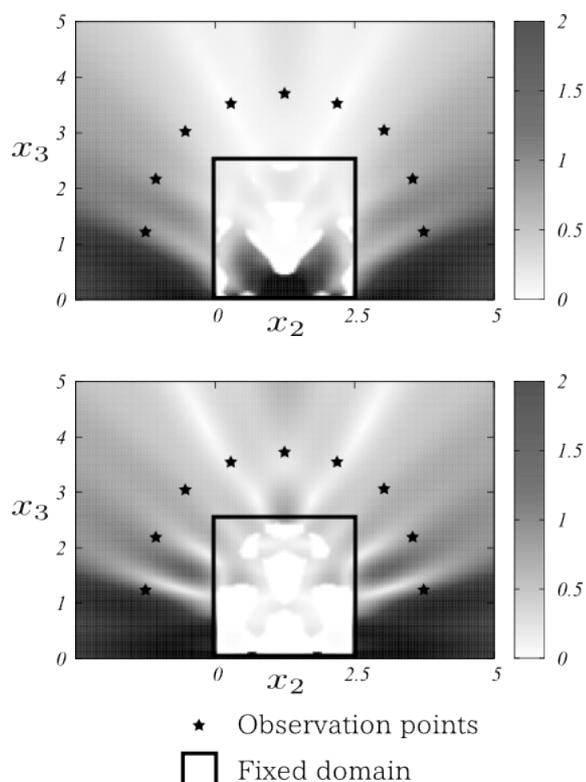


Fig. 8 The norm of sound pressure on  $x_1 = 1.25$  plane in the cases of  $z = 1$  (up) and  $z = 10$  (down).

数値実験を行い、数値計算結果を示した。数値実験から得られた最適形状における音圧ノルムの分布図により、本提案手法によって正しく最適化が行われたことを確認した。また、音響インピーダンス  $z$  の値によらず目的汎関数の減少に成功し、散乱体の波の反射の強弱によらず、本提案手法が有効であることを確認した。今後は異なる実験条件による数値実験によって、本提案手法の有効性を追求し、実際の材料を想定したインピーダンスの設定によるトポロジー最適化設計を行いたいと考えている。

- (1) M. P. Bendsoe and O. Sigmund. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*, Springer Science & Business Media, 2003
- (2) W. Achtziger. Multiple-Load Truss Topology and Sizing Optimization: Some Properties of Minimax Compliance. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 98, No. 2, pp. 255-280, 1998.
- (3) K. Suzuki and N. Kikuchi. A homogenization method for shape and topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, No. 3, pp. 291-318, 1991.
- (4) T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki, and A. Takezawa. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45, pp. 2876-2891, 2010.
- (5) 阿部史昌, 飯盛浩司, 高橋徹, 松本敏郎. レベルセット法と境界要素法を用いた二次元電磁波動問題におけるトポロジー最適化について. *計算数理工学論文集*, Vol. 13, pp. 37-42, 2013.
- (6) 興相洋一, 飯盛浩司, 高橋徹, 山田崇恭, 松本敏郎. 3次元電磁波動問題における境界要素法を用いたトポロジー感度解析とそのレベルセット法に基づく構造最適化への応用について. *計算数理工学論文集*, Vol. 13, pp. 55-60, 2013.
- (7) M. Bonnet. Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, No. 37-40, pp. 5239-5254, 2006.
- (8) H. Isakari, K. Kuriyama, S. Harada, T. Yamada, T. Takahashi, and T. Matsumoto. A topology optimisation for three-dimensional acoustics with the level set method and the fast multipole boundary element method. *Mechanical Engineering Journal*, Vol. 1, No. 4, p. CM0039, 2014.
- (9) Y. J. Liu and N. Nishimura. The fast multipole boundary element method for potential problems: A tutorial. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, pp. 371-381, 2005.
- (10) L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 73, No. 2, pp. 325-348, 1987.
- (11) A.A. Novotny, R.A. Feijo, E. Taroco and C. Padra. Topological sensitivity analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, pp. 803-829, 2003.