計算数理工学論文集 Vol. 14 (2014 年 12 月)，論文 No. 03–141206 JASCOME

修正 Schwarz 交代法とその収束性

MODIFIED SCHWARZ ALTERNATING METHOD AND ITS CONVERGENCE PROPERTY

繁田 岳美

Takemi SHIGETA

昭和薬科大学 応用数学研究室 (〒194–8543 東京都町田市東玉川学園 3 丁目 3165 番地, E-mail: shigeta@ac.shoyaku.ac.jp)

The Schwarz alternating method for the two dimensional Poisson equation is considered. The method is an overlapping domain decomposition method for alternately solving two boundary value problems in two decomposed subdomains. The iterative solution obtained by the method converges to the exact one after some iterations. In this paper, a modified Schwarz alternating method is proposed by introducing a relaxation parameter to accelerate the convergence. The convergence of the modified method is mathematically proven, and the optimal relaxation parameter which yields the fastest convergence is given in a mathematical form.

Key Words: optimal relaxation parameter, overlapping domain decomposition method, Schwarz alternating method

1. はじめに

代用電荷法（または基本解近似解法）[1, 6, 7] は楕円型偏微分方程式に対する簡便なメッシュフリーの境界型解法として知られている．形状が比較的単純な領域に対しては，離散化により得られる連立 1 次方程式の未知数は比較的少なく済むにもかかわらず，数値解は高精度であることが知られている．代用電荷法はこのような利点を有する一方，大規模な複雑形状領域の境界値問題へ適用した際，係数行列の条件数が大きくなるため，安定した数値解を得ることは容易ではない．また，2 次元問題に対する代用電荷法の数学解析はなされている [3] 一方，実用上重要な 3 次元問題に対しては性質が明らかにされていない．そのため，代用電荷法は工学的な実用問題に未だ適用できない状況にある．しかし，理想的な形状の領域において，代用電荷法が他の数値解法とは比較にならない程高精度な数値解を高速かつ容易に与えることは，捨て難い魅力的な点である．

単純形状領域では高精度解が得られることに着目し，解析対象となる複雑形状領域が複数の単純形状領域の和集合から成る場合を考える．このとき，個々の単純形状領域における境界値問題を解く必要があるため，重複領域分割法の一つである Schwarz 交代法 [5, 7] を適用する．分割された個々の単純形状領域に代用電荷法を適用することで，高精度解を得ることが可能となる．特に円板領域の Dirichlet 問題に対しては，電荷点と拘束点が等間隔に配置された場合，代用電荷法により得られる連立 1 次方程式の係数行列は巡回行列となる．従って，高速 Fourier 変換を用いて高速に数値解を求めることができる [9].

さらに，非有界領域問題を解く際も，Dirichlet-Neumann 交代法 [5, 10, 11] と同様，Schwarz 交代法は有用である．実際，変数係数を持つ支配方程式が課された有界領域において例えば有限要素法を，定数係数の支配方程式が課された外部領域において代用電荷法をそれぞれ適用することで，両数値解法の長所を活かし，短所を補い合うことが可能となる．

本論文では，支配方程式として 2 次元 Poisson 方程式を仮定し，円板領域の外部 Dirichlet 問題に対する Schwarz 交代法を考える．Schwarz 交代法はパラメータを持たない反復解法であるが，緩和係数を導入することにより，反復解の真の解への収束を加速させる．このとき，本手法の収束性を証明し，収束を最速にする最適な緩和係数を理論的に導出する．

2. 重複領域分割法

2.1. Schwarz 交代法

2 次元有界領域 Ω における Poisson 方程式の Dirichlet 問題を考える:

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$u = g \quad \text{on} \quad \Gamma := \partial\Omega. \tag{2}$$

ここに，$f \in L^2(\Omega)$ と $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ は与えられた関数である．

領域 Ω を Fig. 1 に示すように，$\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$ を満たすような 2 つの部分領域 Ω_1 と Ω_2 に重複領域分割する．領域 Ω の内部にある部分領域 Ω_1, Ω_2 の境界をそれぞれ $\Gamma_1 := \partial\Omega_1 \cap \overline{\Omega_2}$, $\Gamma_2 := \partial\Omega_2 \cap \overline{\Omega_1}$ と表す.

2014 年 9 月 20 日受付，2014 年 10 月 24 日受理

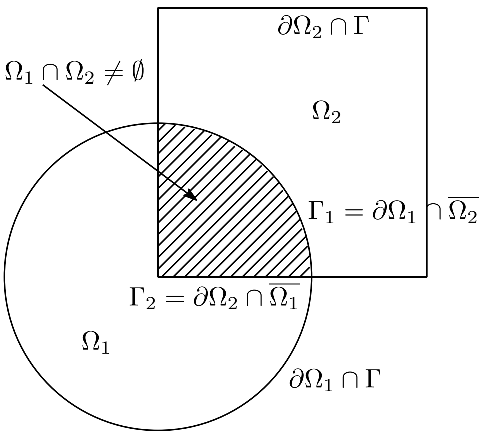

Fig. 1　Overlapping domain decomposition

解 u の Ω_l への制限を u_l とおく $(l = 1, 2)$ と，Poisson 方程式の Dirichlet 問題 (1), (2) は，領域 Ω_1 における Dirichlet 問題

$$
\begin{aligned}
-\Delta u_1 &= f \quad \text{in} \quad \Omega_1, \\
u_1 &= u_2 \quad \text{on} \quad \Gamma_1, \\
u_1 &= g \quad \text{on} \quad \partial\Omega_1 \cap \Gamma
\end{aligned}
$$

と領域 Ω_2 における Dirichlet 問題

$$
\begin{aligned}
-\Delta u_2 &= f \quad \text{in} \quad \Omega_2, \\
u_2 &= u_1 \quad \text{on} \quad \Gamma_2, \\
u_2 &= g \quad \text{on} \quad \partial\Omega_2 \cap \Gamma
\end{aligned}
$$

に分解される．従って，重複領域分割法の一つである Schwarz 交代法 [5, 7] は次のように述べられる:

Step 0. 初期推定境界値 $u_2^{(0)} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ を与え，$k := 0$ とおく．

Step 1. 領域 Ω_1 における Dirichlet 問題を解く:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u_1^{(k+1)} &= f \quad \text{in} \quad \Omega_1, \\
u_1^{(k+1)} &= u_2^{(k)} \quad \text{on} \quad \Gamma_1, \\
u_1^{(k+1)} &= g \quad \text{on} \quad \partial\Omega_1 \cap \Gamma.
\end{aligned}
$$

Step 2. 領域 Ω_2 における Dirichlet 問題を解く:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u_2^{(k+1)} &= f \quad \text{in} \quad \Omega_2, \\
u_2^{(k+1)} &= u_1^{(k+1)} \quad \text{on} \quad \Gamma_2, \\
u_2^{(k+1)} &= g \quad \text{on} \quad \partial\Omega_2 \cap \Gamma.
\end{aligned}
$$

Step 3. $k := k + 1$ とし，Step 1 へ戻る．

2.2. 修正 Schwarz 交代法

前節で述べた Schwarz 交代法を以下のように修正し，以後，修正 Schwarz 交代法と呼ぶ:

Step 0. 初期推定境界値 $\lambda^{(0)} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ と緩和係数 $\alpha > 0$ を与え，$k := 0$ とおく．

Step 1. 領域 Ω_1 における Dirichlet 問題を解く:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u_1^{(k+1)} &= f \quad \text{in} \quad \Omega_1, \\
u_1^{(k+1)} &= \lambda^{(k)} \quad \text{on} \quad \Gamma_1, \\
u_1^{(k+1)} &= g \quad \text{on} \quad \partial\Omega_1 \cap \Gamma.
\end{aligned}
$$

Step 2. 領域 Ω_2 における Dirichlet 問題を解く:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u_2^{(k+1)} &= f \quad \text{in} \quad \Omega_2, \\
u_2^{(k+1)} &= u_1^{(k+1)} \quad \text{on} \quad \Gamma_2, \\
u_2^{(k+1)} &= g \quad \text{on} \quad \partial\Omega_2 \cap \Gamma.
\end{aligned}
$$

Step 3. 境界値を更新する:

$$
\lambda^{(k+1)} = \alpha u_2^{(k+1)} + (1 - \alpha)\lambda^{(k)} \quad \text{on} \quad \Gamma_1.
$$

Step 4. $k := k + 1$ とし，Step 1 へ戻る．

上記の修正 Schwarz 交代法は，$\alpha = 1$ のとき，前節で述べた従来の Schwarz 交代法に一致する．緩和係数 α の導入により，反復解 $u_l^{(k)}$ $(l = 1, 2)$ が (1), (2) の解 u へ収束する速度を改善する．

2.3. 円板外部領域問題に対する修正 Schwarz 交代法

本節では，2 次元非有界領域 $\Omega := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 : |\boldsymbol{x}| > \rho\}$（$\rho > 0$ は与えられた定数）を考え，$f \in L^2(\Omega)$ の 台 $\operatorname{supp} f$ は有界であると仮定する．このとき，(1), (2) に無限遠点での条件

$$
u(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x}|^{-1}) \quad \text{as} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty \tag{3}
$$

を課した境界値問題を考える．

与えられた定数 ρ_1, ρ_2 $(\rho < \rho_1 < \rho_2)$ に対して，Fig. 2 のように 2 つの人工境界 $\Gamma_l := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 : |\boldsymbol{x}| = \rho_l\}$ $(l = 1, 2)$ を用いて，領域 Ω を以下の非有界部分領域 Ω_1 と有界部分領域 Ω_2 に重複分割する:

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &:= \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 : |\boldsymbol{x}| > \rho_1\}, \\
\Omega_2 &:= \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 : \rho < |\boldsymbol{x}| < \rho_2\}, \\
\Omega_1 \cap \Omega_2 &= \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 : \rho_1 < |\boldsymbol{x}| < \rho_2\}, \\
\partial\Omega_1 = \Gamma_1, &\qquad \partial\Omega_2 = \Gamma \cup \Gamma_2.
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\operatorname{supp} f \subset \Omega_2 \setminus \overline{(\Omega_1 \cap \Omega_2)} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 : \rho < |\boldsymbol{x}| < \rho_1\}
$$

を満たすとする．このとき，Ω_1 において $f = 0$ である．

従って，修正 Schwarz 交代法は以下のようになる:

Step 0. 初期推定境界値 $\lambda^{(0)} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$ と緩和係数 $\alpha > 0$ を与え，$k := 0$ とおく．

Step 1. 外部 Dirichlet 問題を解く:

$$
\begin{aligned}
\Delta u_1^{(k+1)} &= 0 \quad \text{in} \quad \Omega_1, \\
u_1^{(k+1)} &= \lambda^{(k)} \quad \text{on} \quad \Gamma_1, \\
u_1^{(k+1)}(\boldsymbol{x}) &= O(|\boldsymbol{x}|^{-1}) \quad \text{as} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty.
\end{aligned}
$$

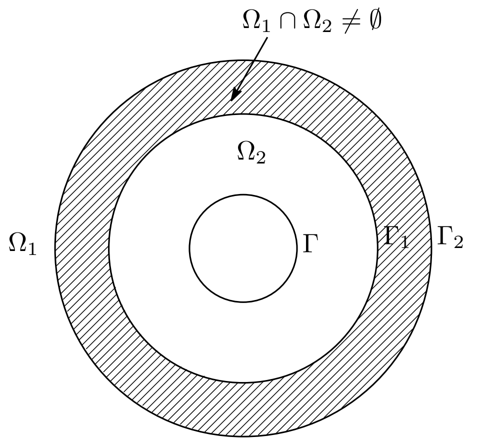

Fig. 2　Domain decomposition to interior and exterior subdomains

Step 2. 内部 Dirichlet 問題を解く:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u_2^{(k+1)} &= f && \text{in} \quad \Omega_2,\\
u_2^{(k+1)} &= u_1^{(k+1)} && \text{on} \quad \Gamma_2,\\
u_2^{(k+1)} &= g && \text{on} \quad \Gamma.
\end{aligned}
$$

Step 3. 境界値を更新する:

$$\lambda^{(k+1)} = \alpha u_2^{(k+1)} + (1-\alpha)\lambda^{(k)} \quad \text{on} \quad \Gamma_1. \tag{4}$$

Step 4. $k := k+1$ とし，Step 1 へ戻る．

3. 収束定理

数列 $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ を

$$p_j = \frac{\rho_2^{2j} - \rho_1^{2j}}{\rho_2^{2j} - \rho^{2j}} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

で定めると，

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_j < \cdots < 1, \quad p_\infty := \lim_{j\to\infty} p_j = 1 \tag{5}$$

を満たす．このとき，修正 Schwarz 交代法に対して，以下の収束定理を得る:

定理 1 真の解 u と初期推定境界値 $\lambda^{(0)}$ に対して，

$$u|_{\Gamma_1} - \lambda^{(0)} = \sum_{|j|=n}^{m} a_j^{(0)} e^{ij\theta}$$

と有限 Fourier 級数で表されるとする．このとき，$0 < \alpha < 2/p_m$ ならば

$$\lim_{k\to\infty} \|u - u_l^{(k)}\|_{L^2(\Gamma_l)} = 0 \qquad (l = 1, 2)$$

の意味で修正 Schwarz 交代法は収束する．また，修正 Schwarz 交代法の収束を最速にする緩和係数 α は

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{p_n + p_m} \tag{6}$$

で与えられる．

系 1 (4) の α を α_k に置き換える:

$$\lambda^{(k+1)} = \alpha_k u_2^{(k+1)} + (1-\alpha_k)\lambda^{(k)} \quad \text{on} \quad \Gamma_1. \tag{7}$$

このとき，定理 1 の仮定の下で，

$$\alpha_k = 1/p_{n+k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-n) \tag{8}$$

とすると，修正 Schwarz 交代法は $m-n+1$ 回の反復で真の境界値に収束する．

$$\lambda^{(m-n+1)} = u|_{\Gamma_1}.$$

一般には，真の解 u と初期推定境界値 $\lambda^{(0)}$ との誤差は無限 Fourier 級数に展開されるので，以下の系を得る:

系 2 定理 1 の仮定の下で，特に $n = 1$, $m = \infty$ とする．このとき，$0 < \alpha < 2$ ならば修正 Schwarz 交代法は収束する．また，

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{p_1 + p_\infty} = \frac{2(\rho_2^2 - \rho^2)}{(\rho_2^2 - \rho_1^2) + (\rho_2^2 - \rho^2)} \tag{9}$$

のとき，収束は最速になる．

注意 1 次節で述べる無限遠点における条件 (12) により，$n = 0$, $m = \infty$ と仮定しても，$a_0^{(k)} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ でなければならない．従って，一般には $n = 1$ となる．

4. 収束定理の証明

4.1. 定理 1 の証明

Dirichlet-Neumann 交代法の収束証明の議論 [10, 11] に倣って，定理 1 の証明を示す.

真の境界値 $\lambda = u|_{\Gamma_1}$ と真の解 u を用いて，誤差関数を $e_l^{(k)} = u - u_l^{(k)}$ $(l = 1, 2)$, $\varepsilon^{(k)} = \lambda - \lambda^{(k)}$ と定める．このとき，$e_1^{(k)}, e_2^{(k)}$ はそれぞれ 2 つの境界値問題

$$\Delta e_1^{(k+1)} = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega_1, \tag{10}$$

$$e_1^{(k+1)} = \varepsilon^{(k)} \qquad \text{on} \quad \Gamma_1, \tag{11}$$

$$e_1^{(k+1)}(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x}|^{-1}) \quad \text{as} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty \tag{12}$$

と

$$\Delta e_2^{(k+1)} = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega_2, \tag{13}$$

$$e_2^{(k+1)} = e_1^{(k+1)} \quad \text{on} \quad \Gamma_2, \tag{14}$$

$$e_2^{(k+1)} = 0 \qquad \text{on} \quad \Gamma \tag{15}$$

の解である．また，

$$\varepsilon^{(k+1)} = \alpha e_2^{(k+1)} + (1-\alpha)\varepsilon^{(k)} \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \tag{16}$$

が成り立つ.

定理の仮定より，$\varepsilon^{(k)} \in H^{1/2}(0, 2\pi)$ は以下のように Fourier 級数展開できることに注意する:

$$\varepsilon^{(k)}(\theta) = \sum_{|j|=n}^{m} a_j^{(k)} e^{ij\theta}. \tag{17}$$

ここに，$a_{-j}^{(k)} = \overline{a_j^{(k)}}$ $(j = n, n+1, \ldots, m)$ である．このとき，領域 Ω_1 における境界値問題 (10)–(12) の解 $e_1^{(k+1)}$ は

$$e_1^{(k+1)}(r,\theta) = \sum_{|j|=n}^{m} \left(\frac{\rho_1}{r}\right)^{|j|} a_j^{(k)} e^{ij\theta} \tag{18}$$

と表される．これより，領域 Ω_2 における境界値問題 (13)–(15) の解 $e_2^{(k+1)}$ は

$$e_2^{(k+1)}(r,\theta) = \sum_{|j|=n}^{m} \frac{\rho_1^{|j|}(r^{|j|} - \rho^{2|j|} r^{-|j|})}{\rho_2^{2|j|} - \rho^{2|j|}} a_j^{(k)} e^{ij\theta} \tag{19}$$

と表される．(16) に (17) と (19) を代入して，

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(k+1)}(\theta) &= \alpha e_2^{(k+1)}(\rho_1,\theta) + (1-\alpha)\varepsilon^{(k)}(\theta) \\ &= \sum_{|j|=n}^{m} \left(1 - p_{|j|}\alpha\right) a_j^{(k)} e^{ij\theta} \end{aligned} \tag{20}$$

を得る．一方，

$$\varepsilon^{(k+1)}(\theta) = \sum_{|j|=n}^{m} a_j^{(k+1)} e^{ij\theta}$$

であるので，Fourier 係数の関係式

$$a_j^{(k+1)} = \delta_j a_j^{(k)}, \qquad \delta_j := 1 - p_{|j|}\alpha$$

が成り立つ．ここで，$|\delta_j| \leq \delta$ $(|j| = n, n+1, \ldots, m)$ を満たす圧縮因子 δ を

$$\delta := \sup_{n \leq j \leq m} |\delta_j| = \max\left\{|1 - p_n\alpha|, |1 - p_m\alpha|\right\} \tag{21}$$

で定めると，$\delta < 1$ となる十分条件

$$0 < \alpha < 2/p_m \tag{22}$$

を得る．このとき，$\|\varepsilon^{(0)}\| < C$ を満たす定数 $C > 0$ が存在して，

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^{(k+1)}\| &\leq \delta\|\varepsilon^{(k)}\| \leq \cdots \leq \delta^{k+1}\|\varepsilon^{(0)}\| \\ &< C\delta^{k+1} \to 0 \qquad (k \to \infty) \end{aligned}$$

となる．ここに，$\|\cdot\|$ は $L^2(0,2\pi)$ ノルムである．従って，条件 (22) が成り立つとき，修正 Schwarz 交代法は L^2 ノルムの意味で収束する．

さらに，

$$|1 - p_n\alpha| = |1 - p_m\alpha|$$

を満たす α は (21) の δ を最小にする．これより，収束を最速にする緩和係数 α は

$$\alpha_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{p_n + p_m}$$

で与えられる．(証明終)

4.2. 系 1 の証明

(7) に対して，(20) は

$$\varepsilon^{(k+1)}(\theta) = \sum_{|j|=n}^{m} \left(1 - p_{|j|}\alpha_k\right) a_j^{(k)} e^{ij\theta} \tag{23}$$

と書き直される．$k = 0, 1, \ldots, m-n$ に対して，$\alpha_k = 1/p_{n+k}$ を順次 (23) に代入すると，$a_n^{(1)} = a_{n+1}^{(2)} = \cdots = a_m^{(m-n+1)} = 0$ となる．これより，$\varepsilon^{(m-n+1)}(\theta) = 0$ を得る．従って，$m-n+1$ 回の反復で真の解を得る．(証明終)

5. 数値実験

修正 Schwarz 交代法と緩和係数の効果を確認するために，本節では簡単な数値実験を行う．

境界 $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ の半径をそれぞれ $\rho = 1$, $\rho_1 = 4$, $\rho_2 = 5$ とする．Poisson 方程式の右辺のソース項は本数値実験では本質ではないため，$f = 0$ とおく．境界 Γ における Dirichlet データを $g(\theta) = \cos\theta + \cos 5\theta$ とすると，真の解は $u(r,\theta) = \cos\theta/r + \cos 5\theta/r^5$ で与えられる．初期推定境界値として $\lambda^{(0)} = 0$ とすると，Dirichlet データから $n = 1$, $m = 5$ とわかる．修正 Schwarz 交代法の Step 3 の直後に，収束判定条件を

$$\|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\|_{L^2(\Gamma_1)} < \varepsilon = 10^{-10}$$

と与える．

境界値問題の数値解法に代用電荷法を用いる．境界 $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ に対応した，電荷点を配置する仮想円境界の半径をそれぞれ $\rho/3$, $\rho_1/3$, $3\rho_2$ とする．拘束点と電荷点はすべての境界と仮想境界上にそれぞれ 40 点ずつ等間隔に配置する．

このとき，Fig. 3 に緩和係数 α に対する反復回数を示す．定理 1 の緩和係数 (6) より，$\alpha = 1.4181$ のとき収束は最速になるが，Fig. 3 の結果と一致していることがわかる．

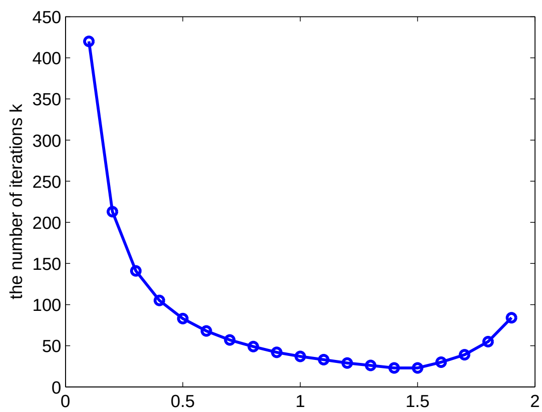

Fig. 3　The number of iterations against the relaxation parameter

Fig. 4 に，真の解と反復解との境界誤差 $\|u - \lambda^{(k)}\|_{L^2(\Gamma_1)}$ の推移を示す．緩和係数として，定理 1 の (6) $(\alpha = 1.4181)$，系 1 の (8) $(\alpha_0 = 2.1429$, $\alpha_1 = 1.4571$, $\alpha_2 = 1.2162$, $\alpha_3 = 1.1112$, $\alpha_4 = 1.059)$，系 2 の (9) $(\alpha = 1.3636)$ の場合と，従来法 $(\alpha = 1)$ の場合を示す．系 1 の緩和係数を用いると 5 回の反復で収束する．しかし，境界値 g が r^{-1} と r^{-5} の 2 項で表されていることから，$\alpha_0 = 1/p_1$, $\alpha_1 = 1/p_5$ とすれば，2 回の反復で収束できることに注意する．

この結果から，従来法，系 2，定理 1 の緩和係数の順で反復回数が少なくなることがわかる．この数値実験では，反復

回数は系 1 の緩和係数の場合に最少となっているが，n と m の差が大きい場合は必ずしも最少になるとは限らないことに注意する．

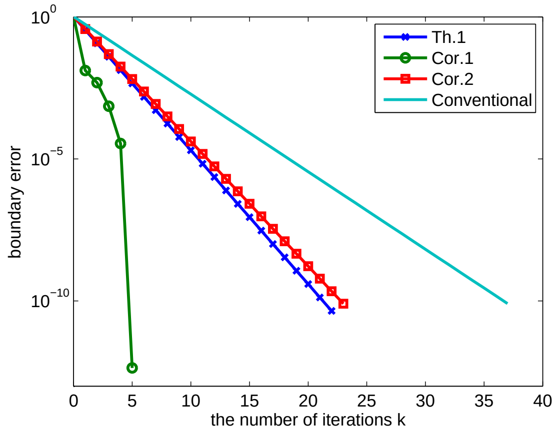

Fig. 4　The boundary error against the number of iterations

6. 考察

6.1. 領域分割の指針

定理 1 の緩和係数 (6) を用いるとき，圧縮因子 $\delta_{\rm opt}$ は以下のように表される:

$$\delta_{\rm opt} = 1 - p_n\alpha_{\rm opt} = p_m\alpha_{\rm opt} - 1 = \frac{p_m - p_n}{p_m + p_n}.$$

また，任意の j に対して $\lim_{\rho_1\to\rho} p_j = 1$, $\lim_{\rho_2\to\infty} p_j = 1$ より，$\lim_{\rho_1\to\rho} \delta_{\rm opt} = 0$, $\lim_{\rho_2\to\infty} \delta_{\rm opt} = 0$ が直ちにいえる．よって，ρ_1 はできる限り小さく，または ρ_2 はできる限り大きく取ることで収束が速まることがわかる．実際，$\rho_1 \approx \rho$ または ρ_2 が十分大きいとき，部分領域 Ω_1 または Ω_2 は元の非有界領域 Ω に “近い” ことから，当然僅かな反復回数で真の解が得られることになる．

なお，$\rho_1 = \rho_2$ のとき，すなわち 2 つの部分領域が重複しない ($\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$) とき，任意の j に対して $p_j = 0$ であることから，$\delta_{\rm opt} = 1$ となり収束しない．これより，2 つの部分領域の重複箇所が “薄い” 場合は収束が遅くなることがわかる．

6.2. 収束速度の比較

Schwarz 交代法の従来法 ($\alpha = 1$) と修正法の圧縮因子を比較する．

従来法における圧縮因子を $\delta_{\rm conv}$ とすると，$\{p_j\}$ の性質 (5) と (21) より，$\delta_{\rm conv} = 1 - p_n$ となる．一方，$\alpha = \alpha_{\rm opt} = 2/(p_n + p_m)$ のときの圧縮因子 $\delta_{\rm opt}$ は $\delta_{\rm opt} = (p_m - p_n)/(p_m + p_n)$ となる．すると，

$$\delta_{\rm conv} - \delta_{\rm opt} = \frac{p_n(1-p_n)}{p_m + p_n} > 0$$

となり，$\delta_{\rm opt} < \delta_{\rm conv}$ を得る．従って，修正法は従来法より収束が速いことがわかる．

一方，n, m の値がわからないときに系 2 の緩和係数 $\alpha = 2/(p_1 + p_\infty)$ を用いるのであれば，圧縮因子は (21) より，

$$\delta = \max\left\{\left|1 - \frac{2p_n}{p_1 + p_\infty}\right|, \left|1 - \frac{2p_m}{p_1 + p_\infty}\right|\right\}$$

となる．従って，この場合も $\delta < \delta_{\rm conv}$ である必要があるが，詳細な解析は今後の課題とする．

緩和係数 (6) を用いる場合，収束判定条件の ε に対して，$\delta^k < \varepsilon$ を解くことで反復回数（の上限）がわかる．これと緩和係数 (8) の場合の反復回数 $m - n + 1$ 回を比較して，必要反復回数（の上限）$k_{\max}$ は

$$k_{\max} = \min\left\{\frac{\log\varepsilon}{\log(1/\delta)}, m - n + 1\right\}$$

とわかる．(6) もしくは (8) のうち，反復回数がより少なくなる緩和係数を用いれば良い．

なお，系 1 の緩和係数 (8) を用いると，$m - n + 1$ 回の有限回の反復で真の解に収束するが，反復回数は収束判定条件によらないことに注意する．

6.3. 数値解法適用時における Fourier 級数の項数の上限

境界値問題に数値解法を適用した際，収束定理における Fourier 級数の項数の上限を考える．以下，修正 Schwarz 交代法の Step 1 における境界値問題を例として取り上げ，$u_1^{(k)}$ を単に u と表す．

数値解法として，まず初めに Trefftz 法 [2, 4, 8]（有限 Fourier 級数）

$$u(re^{i\theta}) \approx \tilde{u}_T(r,\theta) := a_0 + \sum_{k=1}^{M}(a_k\cos k\theta + b_k \sin k\theta)r^{-k} \quad (24)$$

を用いることを考える．ここに，a_k, b_k は Fourier 係数で，定理 1 の証明における係数とは異なる．定理 1 において，$u|_{\Gamma_1} - \lambda^{(0)}$ の代わりに $\tilde{u}_T|_{\Gamma_1} - \lambda^{(0)}$ を考えることになるので，$\lambda^{(0)} = 0$ とすれば，$m \le M$ と仮定することができる．

次に，代用電荷法

$$u(z) \approx \tilde{u}_C(z) := \sum_{j=1}^{N} w_j \log\frac{|z - \zeta_j|}{|z|}$$

を用いることを考える．ここに，$\{\zeta_j\}_{j=1}^N$ は電荷点である．このとき，$z = re^{i\theta}$, $\zeta_j = Re^{i\theta_j}$ とおくと，対数関数は三角関数の無限級数で表される [8]:

$$\log\frac{|z-\zeta_j|}{|z|} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{R}{r}\right)^k \cos k(\theta - \theta_j).$$

従って，$\tilde{u}_C$ は

$$\tilde{u}_C(re^{i\theta}) = -\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}(\cos k\theta_j \cos k\theta + \sin k\theta_j \sin k\theta)\left(\frac{R}{r}\right)^k \quad (25)$$

と Fourier 級数展開される．$M = \infty$ とした (24) と (25) の間には，

$$a_0 = 0,$$
$$a_k = -R^k \sum_{j=1}^{N}\cos k\theta_j \quad (k = 1, 2, \ldots),$$
$$b_k = -R^k \sum_{j=1}^{N}\sin k\theta_j \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

の関係がある．N 個の電荷点で離散化された $\tilde{u}_C$ に対して，Fourier 級数の項数は有限ではなく無限になる．しかし，点

数 N が小さければ高周波成分は近似できないため，N に応じてある自然数 K が存在して，$a_k \approx 0$, $b_k \approx 0$ $(k > K)$ となることが予想される．従って，定理 1 において，$m \leq K$ と仮定できると考えられる．

7. 結論

緩和係数を導入した修正 Schwarz 交代法を提案した．円板領域の外部問題に対して，提案手法の収束性の証明を行い，収束をより速める緩和係数をいくつか導出した．これにより，従来の Schwarz 交代法と比べてより少ない反復回数で所望の解を得ることが可能と成り得る．特に系 1 の緩和係数 (8) は，Fourier 級数の項数が少ない程有効に働く．

境界値問題に数値解法を適用した際，収束定理における Fourier 級数の末項の上限が定まることを考察した．また，収束速度を改善するために，2 つの部分領域の取り方の指針を与えた．

本論文では円板領域の外部領域を対象とした．複素指数関数（すなわち三角関数）を用いて反復解と真の解との誤差を級数展開し，級数の係数を調べることで収束性の議論を行った．3 次元球体領域の外部領域を対象とすると，誤差は球面調和関数で級数展開される．また，2 次元長方形領域を 2 つのより小さな長方形領域で重複分割した場合，誤差は三角関数と双曲線関数で級数展開される．いずれの場合も級数展開でき，誤差の係数を解析的に求められるので，本論文と同様の収束性の議論が可能となる．より一般の形状の領域においては，Laplace 方程式に対する弱形式を考えることで，収束性の議論が可能である [10]．いずれも今後の課題である．

謝辞

2 名の査読者の方には，丁寧で有益なご意見を頂きました．この場を借りてお礼申し上げます．

参考文献

(1) Bogomolny, A.: Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems, SIAM Journal on Numerical Analysis, **22**, 4 (1985), pp. 644–669.

(2) Chen, J. T., Wu, C. S., Lee, Y. T. and Chen, K. H.: On the equivalence of the Trefftz method and method of fundamental solutions for Laplace and biharmonic equations, Computers and Mathematics with Applications **53** (2007), pp. 851–879.

(3) Katsurada, M. and Okamoto, H.: A mathematical study of the charge simulation method I, Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo, Section 1A Mathematics, **35** (1988), pp. 507–518.

(4) Liu, C. S.: Improving the ill-conditioning of the method of fundamental solutions for 2D Laplace equation, Computer Modeling in Engineering and Sciences **28**, 2 (2008), pp. 77–93.

(5) 吕涛，石済民，林振宝: 区域分解算法—偏微分方程数值解新技術，科学出版社 (1999).

(6) Mathon, R. and Johnston, R. L.: The approximate solution of elliptic boundary-value problems by fundamental solutions, SIAM Journal on Numerical Analysis, **14**, 4 (1977), pp. 638–650.

(7) 村島定行: 代用電荷法とその応用，森北出版株式会社 (1983).

(8) Shigeta, T. and Young, D. L.: Mathematical and numerical studies on meshless methods for exterior unbounded domain problems, Journal of Computational Physics, **230** (2011), pp. 6900–6915.

(9) Smyrlis, Y.-S. and Karageorghis, A.: Efficient implementation of the MFS: The three scenarios, Journal of Computational and Applied Mathematics, **227** (2009), pp. 83–92.

(10) Yu, D., Xue, W. and Huang, H.: A Dirichlet-Neumann alternating method in infinite domain: Algorithm and convergence analysis, Research Report ICM–95–31, Institute of Computational Mathematics and Scientific/Engineering Computing, Chinese Academy of Sciences (1995).

(11) Yu, D., Discretization of non-overlapping domain decomposition method for unbounded domains and its convergence, Chinese J. Num. Math. & Appl., **18**, 4 (1996), pp. 93–102.