

Krein 公式によるグリーン関数を用いた境界要素法

- フラクタル配置点状散乱体への応用 -

BOUNDARY ELEMENT METHOD WITH A GREEN FUNCTION

FORMULATED BY KREIN THEORY

- Application to Fractally Arranged Scatterers -

植田 毅¹⁾

Tsuyoshi UETA

1) 東京慈恵会医科大学物理学研究室 (〒 182-8570 東京都調布市国領町 8-3-1, E-mail: tsuyoshi_ueta@jikei.ac.jp)

An explicit expression of the full Green function has already been derived for systems with point-like scatterers by extending Krein theory. The boundary element method (BEM) using the explicit expression is proposed for systems containing many point-like scatterers. It is confirmed that the proposed BEM is reduced to the expression of the approximate BEM already proposed. Transmission spectra through fractally arranged point-like scatterers are investigated by means of the approximate BEM and their fractal behavior is found.

Key Words: Boundary Element Method, Electron Waves, Krein Theory, Perturbed Green Function, Point Potentials

1. はじめに

1976 年に Hofstadter が強束縛近似を用いて、一様磁場下をホッピング伝導する 2 次元電子系のエネルギースペクトルの磁場依存性が自己相似型、所謂、バタフライダイアグラムになることを示した⁽¹⁾。以来、磁場が印加された周期ポテンシャル中を伝播する電子波の振舞いが注目を浴び、実験的、理論的に精力的に研究されてきた。

1990 年代には、半導体のヘテロ界面に形成された 2 次元電子系に人工的に散乱体を周期的に配列した系 (アンチドットアレイ) において磁気抵抗の異常が実験的に発見された^(2, 3, 4, 5)。このような系に対して、理論的には無限系を取扱い、周期散乱ポテンシャルを三角関数の冪関数、無限に高いもしくは有限の高さの障壁で表し、バンド構造、伝導率の計算が行われてきた^(6, 7, 8)。

理論的には、有効質量近似に周期ポテンシャルを導入した取扱いと強束縛近似が用いられ、各々の結果の関係が必ずしも明確ではなかった。両者の数学的、物理的関係の解明も多くの試みがなされたが、それらは近似的、数値的取扱いであった。その後、解析的に可解な模型として、点状散乱体が周期的に配列した系に対して、Krein のレゾルベント公式を用いて点状ポテンシャルがある場合のグリーン関数を求め、

厳密な状態密度などが報告され、両者の関係が明確にされた⁽⁹⁾。Krein 公式を用いて点状ポテンシャルがある系のグリーン関数を導出する手法は点状ポテンシャルがランダムに配置された系など様々な系に応用され成果を上げている⁽¹⁰⁾。

他方、任意形状の境界に囲まれた系内に散乱断面積の小さな散乱体が多数存在する場合に有効な近似的な境界要素法が開発されている。しかしながら、この近似的な解法では見かけの固有状態を励起することがあり、万能ではない。

本論文では、点状散乱体を含む系に対して Krein 理論^(11, 12)により求めたグリーン関数を用いた境界要素法を定式化する。定式化された境界要素法とこれまでに開発されている近似解法との関係を明らかにし、近似解法の新たな解釈を与える。それをもとに、近似解法を用いてフラクタル的に点状散乱体が並んだ系の透過スペクトル計算し、そのフラクタル性を示す。

2. 点状散乱ポテンシャルを摂動とした Krein 理論によるグリーン関数

一様磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ が印加されている x - y 平面内を運動するスピンの無い有効質量 m^* 、電荷 q の電子の運動を考える。磁場を発生するベクトルポテンシャルを $\mathbf{A}(\mathbf{r})(\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B})$

とすると、電子波の運動を記述するハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(-i\nabla - \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 \quad (1)$$

と書ける。ここで、長さ ℓ_B とエネルギー ε はそれぞれ磁気的長さ $\ell_B \equiv \sqrt{\hbar/qB}$ とサイクロトロンエネルギー $\hbar\omega_c$ ($\omega_c = qB/m^*$)を用いて無次元化した。このとき無次元化された全波数は $K \equiv \sqrt{2\varepsilon}$ と表される。また、 \mathcal{H}_0 のエネルギースペクトルはランダウ準位 $\varepsilon = l + \frac{1}{2}$ (l は0以上の整数)となる。

摂動として点状散乱体の配列の散乱ポテンシャル

$$V(\mathbf{r}) = \sum_n V_n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) \quad (2)$$

を導入する。 \mathbf{R}_n は散乱体の位置ベクトルである。本節では、拡張された Krein 理論^(11, 12)を用いて、摂動のあるハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V \quad (3)$$

のグリーン演算子 (レゾルベント) $\mathcal{G} = (\varepsilon - \mathcal{H})^{-1}$ の座標表示 (グリーン関数) を求めた Glayler の結果を簡潔にまとめる。

摂動を含む系のグリーン関数 $\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon)$ は摂動がない場合のグリーン関数 $G = (\varepsilon - \mathcal{H}_0)^{-1}$ を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) &= \left\langle \mathbf{r} \left| \frac{1}{\varepsilon - \mathcal{H}} \right| \mathbf{r}' \right\rangle \\ &= G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) + \sum_{m,n} G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_m; \varepsilon) \Lambda_{mn}^{-1}(\varepsilon) G(\mathbf{R}_n, \mathbf{r}'; \varepsilon) \end{aligned} \quad (4)$$

と表せる⁽¹³⁾。ここで、 $\Lambda_{mn}(\varepsilon)$ はエネルギー ε における散乱振幅 $T_n(\varepsilon)$ を

$$\frac{1}{T_n(\varepsilon)} = \frac{1}{V_n} - G(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n; \varepsilon) \quad (5)$$

として

$$\Lambda_{mn}(\varepsilon) = \frac{\delta_{mn}}{T_n(\varepsilon)} - (1 - \delta_{mn}) G(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; \varepsilon) \quad (6)$$

と書ける^(14, 15)。

また、散乱振幅は

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_n(\varepsilon)} &= \lim_{\mathbf{r}, \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{R}_n} [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; -\varepsilon_{b_n}) - \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon)] \\ &= G^{\text{reg}}(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n; -\varepsilon_{b_n}) - \mathcal{G}^{\text{reg}}(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n; \varepsilon) \end{aligned} \quad (7)$$

により計算される。 ε_{b_n} は点状散乱ポテンシャルの点 \mathbf{R}_n における束縛エネルギーであり、「reg」は各グリーン関数の正則部分を表す^(14, 15)。

散乱ポテンシャルがない場合のグリーン関数は^(16, 17)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) &= \exp \left[i \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}'') \cdot d\mathbf{r}'' \right] G_0(z; \varepsilon) \\ G_0(z; \varepsilon) &\equiv \frac{1}{4\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) U\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, 1, z\right) e^{-z/2} \end{aligned} \quad (8)$$

のように陽な形で与えられる。ここで、 $z \equiv (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2/2$ 、 $U(\frac{1}{2} - \varepsilon, 1, z)$ は原点近傍で対数的特異性を持つ Kummer 関数⁽¹⁸⁾であり、グリーン関数の位相因子の積分中の矢印は点 \mathbf{r}' と点 \mathbf{r} を結ぶ直線に沿って積分することを表している。

散乱振幅 $T_n(\varepsilon)$ として単一点状散乱ポテンシャルの振幅を用いて

$$\Lambda_{mn}(\varepsilon) = \begin{cases} -G(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; \varepsilon) & m \neq n \\ -\frac{1}{4\pi} (\Psi(\frac{1}{2} - \varepsilon) - \ln 4 - 2\gamma) + \frac{1}{V_n} & m = n \end{cases} \quad (9)$$

を得る^(14, 15)。ここで、 $\Psi(\frac{1}{2} - \varepsilon)$ は di-gamma 関数、 γ は Euler 数である。

以上により、散乱ポテンシャルのある場合のグリーン関数 \mathcal{G} の陽な表式を計算できる。

3. 積分方程式

キャビティ内に点状散乱体が存在している場合を考える。キャビティを囲む境界を S 、 S が囲む領域を Ω とする。グリーン関数 \mathcal{G} を用いると、領域 Ω 内の波動関数は境界 S に沿った線積分により^(19, 20)

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \oint \left[\mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) \nabla' \psi(\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. - \psi(\mathbf{r}') \nabla' \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) \right] \cdot \mathbf{n}' dS' \\ &\quad - 2i \oint \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) \psi(\mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS' \end{aligned} \quad (10)$$

と表せる。ここで \mathbf{n}' は領域 Ω 内から外に向いた単位法線ベクトルである。この表式を用いれば、キャビティ内に散乱ポテンシャルがある場合にも通常の境界要素法と同様に定式化、実行可能である。

式(4)を式(10)に代入すると

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \oint \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) \nabla' \psi(\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. - \psi(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) \right] \cdot \mathbf{n}' dS' \\ &\quad - 2i \oint G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) \psi(\mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS' \\ &\quad + \sum_{m,n} G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_m; \varepsilon) \Lambda_{mn}^{-1}(\varepsilon) \\ &\quad \times \left\{ \oint \left[G(\mathbf{R}_n, \mathbf{r}'; \varepsilon) \nabla' \psi(\mathbf{r}') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \psi(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{R}_n, \mathbf{r}'; \varepsilon) \right] \cdot \mathbf{n}' dS' \right. \\ &\quad \left. - 2i \oint G(\mathbf{R}_n, \mathbf{r}'; \varepsilon) \psi(\mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS' \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$= \psi_0(\mathbf{r}) + \sum_{m,n} G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_m; \varepsilon) \Lambda_{mn}^{-1}(\varepsilon) \psi_0(\mathbf{R}_n) \quad (12)$$

と表せる。ここで、

$$\begin{aligned} \psi_0(\mathbf{r}) &\equiv \oint \left[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) \nabla' \psi(\mathbf{r}') \right. \\ &\quad \left. - \psi(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) \right] \cdot \mathbf{n}' dS' \\ &\quad - 2i \oint G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \varepsilon) \psi(\mathbf{r}') \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS' \end{aligned} \quad (13)$$

を定義した。

一方、参考文献21の式(3.2)は、本論文でのグリーン関数とは符号の定義が逆であることを考慮すると

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \sum_n G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_n; \varepsilon) V_n \psi(\mathbf{R}_n) \quad (14)$$

と書ける。式 (12) は式 (14) に対応しているが、ポテンシャルの散乱能 V_n が $\Lambda_{mn}^{-1}(\varepsilon)$ 、右辺第 2 項の ψ が ψ_0 に置き換わっている。

式 (14) において、点状散乱ポテンシャルの位置の波動関数 $\{\psi(\mathbf{R}_n)\}$ は連立方程式

$$\psi(\mathbf{R}_m) = \psi_0(\mathbf{R}_m) + \sum_n G(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; \varepsilon) V_n \psi(\mathbf{R}_n) \quad (15)$$

により

$$\psi(\mathbf{R}_n) = \sum_m \{\delta_{nm} - G(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; \varepsilon) V_n\}^{-1} \psi_0(\mathbf{R}_m) \quad (16)$$

と決定される。このとき、 $G(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n; \varepsilon)$ は

$$G(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n; \varepsilon) \rightarrow \frac{1}{4\pi} \left(\Psi\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) - 2\gamma + \ln\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1 \right) \quad (17)$$

のように置き換えられる。 a は散乱体の散乱半径である。

この $\{\psi(\mathbf{R}_n)\}$ より、任意の点 \mathbf{r} の波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ は

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= \psi_0(\mathbf{r}) + \sum_{mn} G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_m; \varepsilon) V_n \\ &\quad \times \{\delta_{nm} - G(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_m; \varepsilon) V_m\}^{-1} \psi_0(\mathbf{R}_n) \\ &= \psi_0(\mathbf{r}) + \sum_{nm} G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_n; \varepsilon) \\ &\quad \times \left(\frac{\delta_{nm}}{V_n} - G(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; \varepsilon) \right)^{-1} \psi_0(\mathbf{R}_m) \end{aligned} \quad (18)$$

のように $\psi_0(\mathbf{r})$ のみで表せる。

式 (18) と式 (12) を比較すると、

$$\frac{\delta_{nm}}{V_n} - G(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; \varepsilon) \quad (19)$$

が Λ_{mn} に対応することが分かるが、式 (19) は Λ_{mn} の定義、式 (5) および式 (6) に他ならない。

式 (17) におけるグリーン関数の対角成分 $G(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n; \varepsilon)$ の置き換えは、近似により現れる散乱半径 a を含むが、式 (9) の置き換えには現れない。しかしながら、参考文献 13 の式 (2.3) には右辺第 2 項に面積の次元を持つ自己随伴拡張のためのパラメータ C_0 が現れている。本来、右辺第 2 項の $\ln 4$ は $\ln 4C_0$ と置き換えられるべきものであり、これが式 (17) の $\ln(a^2/2) - 1$ に対応するものである。 C_0 および a に互いに新たな解釈ができたことになる。参考文献 15 の式 (6) および式 (9) では便宜上 $C_0 = 1$ と選んでいる。ただし、著者は未だ一般性、厳密性を損なうことなく、このように C_0 を選ぶことができる論拠を確認できていない。

なお、参考文献 13 の式 (2.3) および式 (2.4) の Euler 数 C_E (本文中では γ) の符号は間違っているので注意が必要である。

4. 散乱問題

境界がない系では、従来の近似解法と本論文で提案したグリーン関数を用いた計算法は本質的に同じ計算となる。そこで、ここでは従来法を用いて、境界がなく、磁場がかかっていない系の散乱問題を解析する。

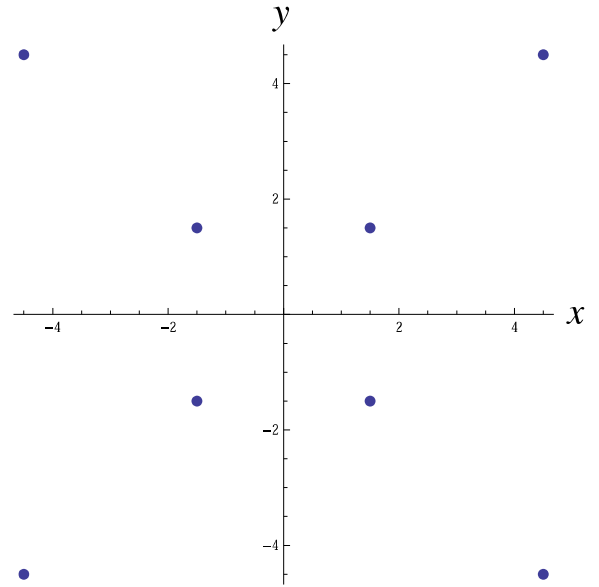


Fig. 1 The configuration of point-like scatterers in the 1st generation.

無限に広い空間内に Fig.1 のように点状散乱体を配置した構造を第 1 世代とし、Fig.2, 3 のようにフラクタル的に第 2, 3 世代を定義する (22, 23)。各世代の系に対し、平面波が x 軸負側無限遠方から入射したときの透過スペクトルを計算する。第 n 世代の系の散乱体の数は $7 \cdot 5^{n-1} + 1$ 個であり、第 5 世代でさえ 4376 個と世代が進むにつれて急激に計算コストが嵩むようになるが、本手法では比較的容易に解析できる。

平面波が入射する場合、式 (14) より波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ は

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikx} + \sum_n V_n G'(\mathbf{r}, \mathbf{R}_n) \psi(\mathbf{R}_n) \quad (20)$$

で表される (24)。ただし、

$$G'(\mathbf{r}, \mathbf{R}_n) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kd|\mathbf{r} - \mathbf{R}_n|), & \mathbf{r} \neq \mathbf{R}_n \\ -\frac{1}{4\pi} (2 \ln \frac{kd a}{2} + 2\gamma - 1 - i\pi), & \mathbf{r} = \mathbf{R}_n \end{cases} \quad (21)$$

である。 $H_0^{(1)}(z)$ は第 1 種 0 次のハンケル関数、 k は入射電子波の波数、 d は系の典型的な長さで、第一世代の外側 4 点の 1 辺の長さが $9d$ である。 a は散乱ポテンシャルの有効散乱半径であり $a/d = 0.05$ とし、ポテンシャルの散乱能は $\{V_n\}$ は全て同じで、 $V_n = 1.25$ とする。系の右端の x 座標を R (左端の x 座標は $-R$) とし、波数が k のときの透過率は

$$T = \frac{\int_{-1.1R}^{1.1R} j_x(1.1R, y) dy}{\int_{-1.1R}^{1.1R} j_x(1.1R, y)|_{V=0} dy} \quad (22)$$

$$j_x(x, y) \equiv \frac{1}{2i} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi \right)$$

と定義する。

第 2 世代から第 5 世代の透過スペクトルを Fig.4 に示す。まず、第 2 世代の透過スペクトルに注目する。透過率の最も大きな $kd = 8.298$ および最小となっている $kd = 10.46$ における電子密度 $|\psi(\mathbf{r})|^2$ をそれぞれ Fig.5, 6 に示す。Fig.6 で

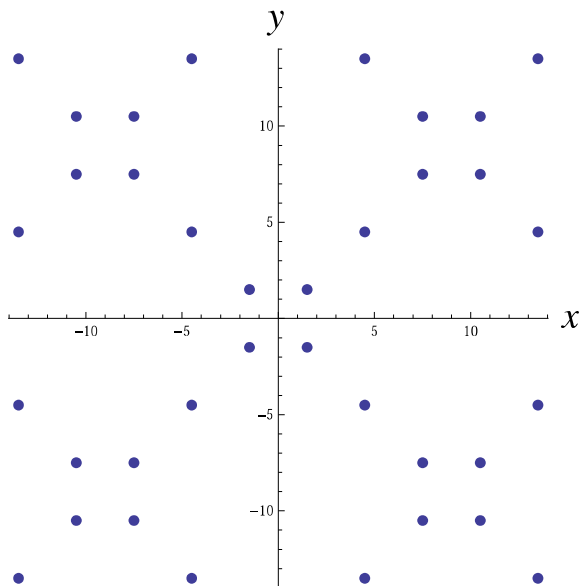


Fig. 2 The configuration of point-like scatterers in the 2nd generation.

は散乱体の左側で波動関数の振幅が大きく反射が大きくなことが確認できる。

次に、第2世代から第5世代の透過スペクトルを比較する。第2世代と第5世代は系の形は大きく異なるが、透過スペクトルの値は世代が進むにつれ次第に大きくなるものの、変化の概形は同じである。また、世代が進むにつれてスペクトルに微細な構造が増える。4段の階段状の構造が見られ、世代が進むにつれて、階段の段が下がる部分により深いディップが現れる。

Fig.4のスペクトルを拡大した図をFig.7, 8に示す。拡大してもFig.4と大局的に同じ構造が繰り返されていることが分かる。更に、Fig.7を拡大するとFig.9のようになる。このスケールにおいてもFig.4と同様な構造が繰り返され、その構造が自己相似的になっていることが分かる。

5. まとめ

本論文では2次元系に複数の点状散乱体が存在している場合の電子波散乱問題のために、Krein理論を拡張して導出された散乱ポテンシャルを含んだハミルトニアンに対するグリーン関数を用いた境界要素法を提案した。そのグリーン関数を用いた積分方程式が、これまで示されていた点状散乱ポテンシャルがある場合の近似的境界要素法（従来法）の積分方程式に形式的に一致することを示した。

しかし、境界を持つ系の従来法による数値解析解は、式(12)を用いた境界要素法による解とは一致しない。それは、式(12)は式(14)（参考文献21の式(3.2)）と形式的に同等であることを示す過程において、点状散乱体の位置の波動関数 $\{\psi(\mathbf{R}_n)\}$ のみを未知変数として境界積分で表された波動関数 ψ_0 により表現したが、従来法による数値計算では境界上の波動関数の法線微分と点状散乱体の位置の波動関数が同時に未知変数となるからである。このため、従来法では見かけ

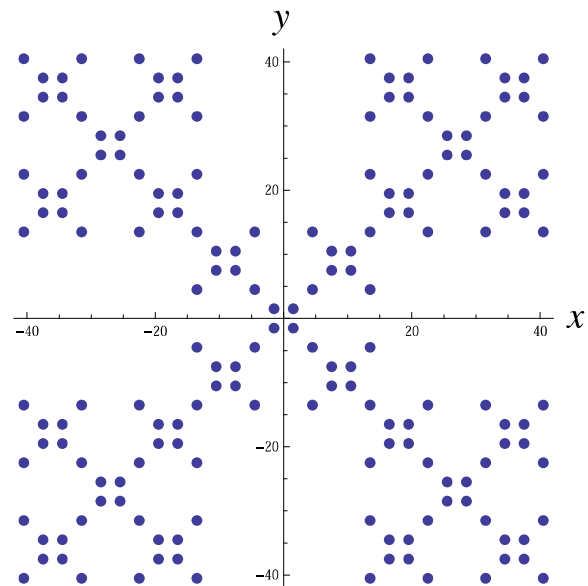


Fig. 3 The configuration of point-like scatterers in the 3rd generation.

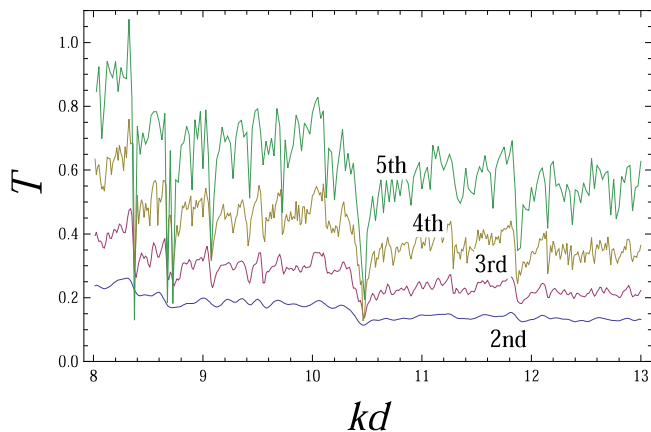


Fig. 4 The transmission spectra in the 2nd, 3rd, 4th and 5th generations.

の固有状態の励起の問題が発生することが分かっているが、本論文で提案した境界要素法ではこの問題が克服できると期待される。

本論文で提案した手法と従来法では非摂動のグリーン関数の対角成分の置き換えにおいて定数項の違いが見られるが、それは有効散乱半径として解釈でき、繰り返し可能である。本論文では垂直一様磁場がかかった2次元電子系のグリーン関数を示したが、磁場がかかっていない場合、すなわち、ヘルムホルツ方程式の場合にも容易にグリーン関数を求めることができる。

境界がない場合、本論文で提案されている計算法は従来法に帰着することから、従来法を用いて、点状散乱体がフラクタル的に配列している系の透過スペクトルを計算し、構造のフラクタル性が透過スペクトルの構造に反映されることを示した。

しかしながら、本論文で示したグリーン関数を用いた境

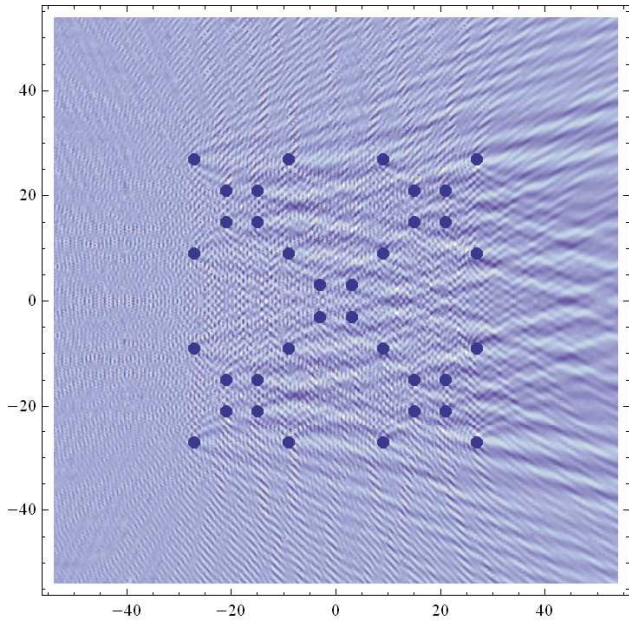


Fig. 5 The wavefunction of the 2nd generation at $kd = 8.298$.

界要素法の応用はまだなされていない。今後の実用化が望まれる。

参考文献

- (1) D. R. Hofstadter: Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields, *Phys. Rev. B*, **14** (1976), pp. 2239–2249.
- (2) D. Weiss, M. L. Roukes, A. Menschig, P. Grambow, K. von Klitzing and G. Weimann: Electron Pinball and Commensurate Orbits in a Periodic Array of Scatterers, *Phys. Rev. Lett.*, **66** (1991), pp. 2790–2793.
- (3) D. Weiss, K. Richter, A. Menschig, R. Bergmann, H. Schweizer and K. von Klitzing: Quantized Periodic Orbits in Large Antidot Arrays, *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993), pp. 4118–4121.
- (4) F. Nihey, S. W. Hwang and K. Nakamura: Observation of Large $h/2e$ Oscillations in Semiconductor Antidot Lattices, *Phys. Rev. B*, **51** (1995), pp. 4649–4652.
- (5) R. Schuster, E. Ensslin, J. P. Kotthaus, G. Böhm and W. Klein: Classical and Quantum Transport in Rectangular Antidot Superlattices, *Phys. Rev. B*, **55** (1997), pp. 2237–2241.
- (6) S. Ishizaka, F. Nihey, K. Nakamura, J. Sone and T. Ando: Quantum Transport in Antidot Arrays in Magnetic Fields, *Phys. Rev. B*, **51** (1995), pp. 9881–9890.
- (7) T. Nagao: Magnetotransport through Random Antidot Lattices, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **65** (1996), pp. 2606–2609.
- (8) T. Ueta: Lattice Green function in uniform magnetic fields, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **30** (1997), pp. 5339–5350.

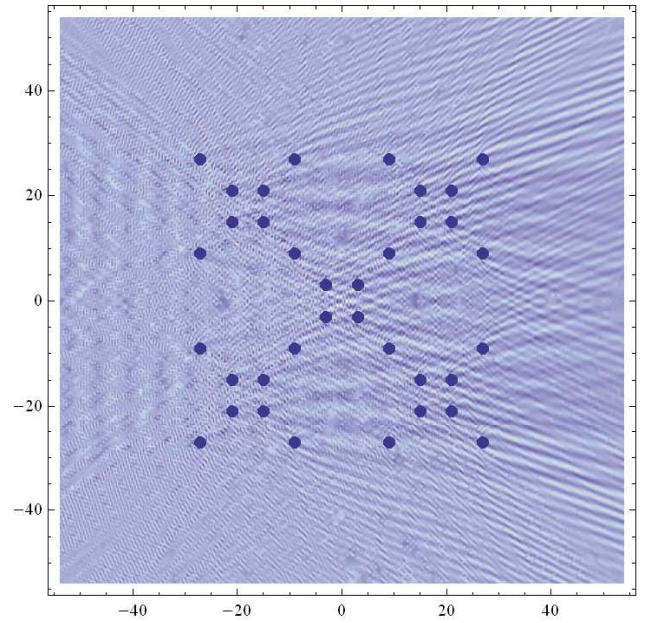


Fig. 6 The wavefunction of the 2nd generation at $kd = 10.46$.

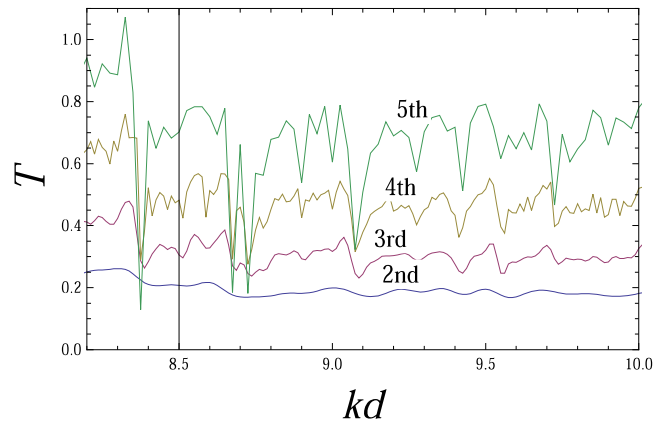


Fig. 7 The expanded transmission spectra in $kd = 8.3$ to 10.0 .

- (9) V. A. Geyler, B. S. Pavlov and I. Yu. Popov: Spectral properties of a charged particle in antidot array: A limiting case of quantum billiard, *J. Math. Phys.*, **37** (1996), pp. 5171–5194.
- (10) M. Y. Azbel': Quantum particle in a random potential: Implications of an exact solution, *Phys. Rev. Lett.*, **67** (1991), pp. 1787–1790.
- (11) M. G. Krein: Concerning the resolvents of a Hermitian operator with the deficiency index (m, m) , *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **52** (1946), pp. 651–654.
- (12) B. S. Pavlov: The theory of extensions and explicitly-soluble models, *Russian Math. Surveys*, **42** (1987), pp. 127–168.
- (13) V. A. Geyler: The two-dimensional Schrödinger operator with a uniform magnetic field, and its perturbation

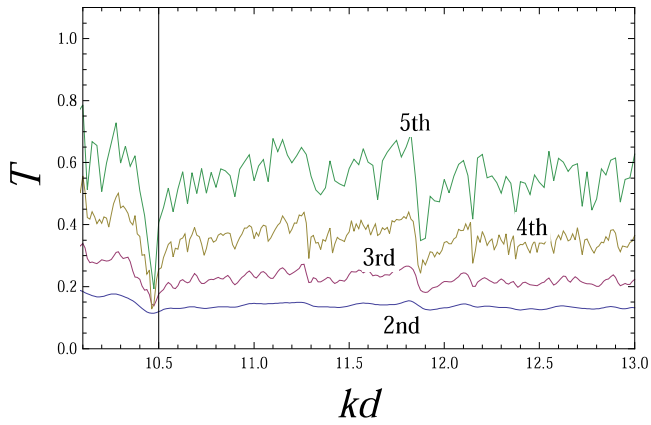


Fig. 8 The expanded transmission spectra in $kd = 10.1$ to 13.0 .

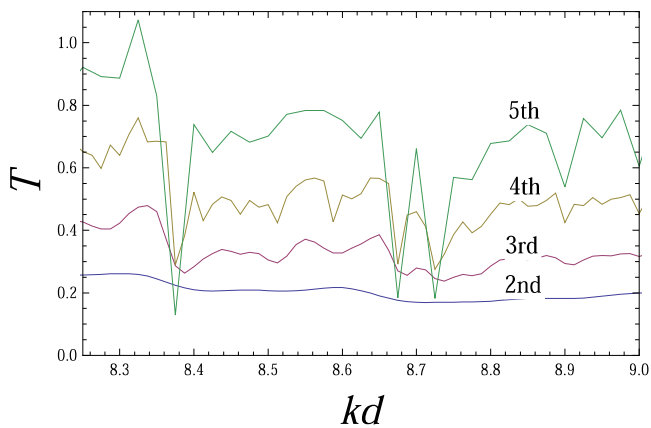


Fig. 9 The expanded transmission spectra in $kd = 8.25$ to 9.0 .

by periodic zero-range potentials, *St. Petersburg Math. J.*, **3** (1992), pp. 489–532.

- (14) S. Gredeskul, Y. Avishai and M. Ya. Azbel: Two-dimensional electron gas in a magnetic field and point potentials, *Low Temp. Phys.*, **23** (1997), pp. 15–26.
- (15) V. A. Geyler, I. Yu. Popov, A.V. Popov and A. A. Ovechkina: Fractal spectrum of periodic quantum systems in a magnetic field, *Chaos, Solitons & Fractals*, **11** (2000), pp. 281–288.
- (16) V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man'ko : The green function of the stationary schrödinger equation for a particle in a uniform magnetic field, *Phys. Lett. A*, **51** (1975), pp. 133–134.
- (17) T. Ueta : Green's Function of a Charged Particle in Magnetic Fields, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **61** (1992), pp. 4314–4324.
- (18) M. Abramowitz and I. A. Stegun : *Handbook of mathematical functions*, Dover Press, New York, (1970) pp. 358–433.

- (19) L. R. Ram-Mohan : *Finite Element and Boundary Element Applications in Quantum Mechanics*, Oxford University Press, (2002).
- (20) T. Ueta: Boundary Element Method for Electron Waves in Uniform Magnetic Fields, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **17** (1996), pp. 69–74.
- (21) T. Ueta : Boundary Element Method for Electron Transport in the presence of pointlike scatterers in magnetic fields, *Phys. Rev. B*, **60** (1999), pp. 8213–8217.
- (22) M. Wada Takeda, S. Kirihara, Y. Miyamoto, K. Sakoda and K. Honda: Localization of Electromagnetic Waves in Three-Dimensional Fractal Cavities, *Phys. Rev. Lett.*, **92** (2004), 093902.
- (23) N. Aoki, L. Lin, T. Morimoto, T. Sasaki, J. Song, K. Ishibashi, J. P. Bird, A. Budiyo, K. Nakamura, T. Harayama and Y. Ochiai: Fractal behavior in magneto-conductance in coupled quantum dot systems, *Physica E*, **22** (2004), pp. 361–364.
- (24) Y. Miyagawa and T. Ueta: A novel numerical method for the analysis of electron transport in the presence of pointlike magnetic scatterers, *J. Phys.: Condens. Matter*, **20** (2008) 365208.