

変分法を用いた自由表面を含む非ニュートン流体の 三次元解析の基礎的研究

THREE DIMENSIONAL ANALYSIS OF NON-NEWTONIAN FLUID WITH FREE SURFACE USING VARIATIONAL PRINCIPLE

西藤 潤¹⁾, 島越 貴之²⁾

Jun SAITO and Takayuki SHIMAKOSHI

1) 京都大学工学研究科 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C1, E-mail: saito.jun.3n@kyoto-u.ac.jp)

2) 首都高速道路株式会社 (〒 100-8930 東京都千代田区霞が関 1-4-1, E-mail: shimakoshi@basewall.kuciv.kyoto-u.ac.jp)

This paper proposes formulation for three dimensional computational analysis of Non-Newtonian fluid. We split equation of motion into 3 equations; advection part, body force part, and stress divergence part. The advection equation is solved with the Particle-In-Cell method and body force part is solved with Euler method. Equation of stress divergence is replaced with a min-max problem which is equivalent to it. The equivalence is proved through variational principle. This formulation enables us to avoid complicate treatment of free surface. To check the plausibility, we calculate three kinds of non-Newtonian fluid; Bingham fluid, dilatant fluid, pseudoplastic fluid.

Key Words: Non-Newtonian Fluid, Free Surface, Variational Principle

1. 序論

土木工学の分野においてしばしば研究対象となるフレッシュコンクリートや土石流, 雪崩などの現象は, 非ニュートン流体としてモデル化されるため, 非ニュートン流体の数値計算は工学的に有用なツールとなる. これまで, 非ニュートン流体の流動解析は, 有限要素法, 差分法, 有限体積法などを用いた研究が多かったが (例えば, 文献⁽¹⁾⁽²⁾など), 近年では粒子法の発展により粒子法による手法も開発されている⁽³⁾⁽⁴⁾. いずれの方法においても, 非ニュートン流体の自由表面はラグランジュ的なアプローチで解かれることが多い. 自由表面をオイラー的なアプローチで解く手法も開発されているが, 自由表面の境界条件を直接扱うため, 煩雑な計算が必要となる⁽⁵⁾⁽⁶⁾.

本論文では, 自由表面における煩雑な境界条件の取り扱いを避けるため, 自由表面の境界条件と等価なミニマックス問題に置き換えて解く. 非ニュートン流体の境界値問題とミニマックス問題が等価であることは, 変分原理を用いて証明される. 西藤・小野⁽⁷⁾はこの定式化を用いて二次元のビンガム流体の解析を行ったが, 本手法はそれを三次元に拡張し, また非ニュートン流体としてビンガム流体の他にダイラタント流体, 擬塑性流体を扱う.

2. 流体場における支配方程式

2.1. 運動方程式と境界条件

流体の運動方程式は次式で与えられる.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\mathbf{g} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1)$$

ここに, 式 (1) において, t は時間, ρ は密度, \mathbf{u} は速度, \mathbf{g} は重力加速度, $\boldsymbol{\sigma}$ は応力である.

自由表面の境界条件は, トラクションがゼロとなるトラクションフリーの条件を用いる. すなわち, 次式で与えられる.

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_F = \mathbf{0} \quad (2)$$

ここに, \mathbf{t} はトラクション, \mathbf{n}_F は流体の自由表面の法線ベクトルである.

固体壁面の境界条件は, トラクションの壁面接面方向成分がゼロ, 流体と壁面の相対速度の壁面法線方向がゼロとなるフリースリップ条件を用いる. すなわち, 次式で与えられる.

$$(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_S) \times \mathbf{n}_S = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S = 0 \quad (4)$$

ここに, \mathbf{n}_S は固体壁面の法線ベクトルである.

2.2. 構成則

2.2.1. 流体の構成式

ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ は、応力 σ に関するポテンシャル関数 f から得られると仮定する。本研究では、非圧縮性流体を対象とするため、ポテンシャル関数 f は偏差応力 \mathbf{s} の第二不変量 J_2 の平方根からなる関数とする。

$$\dot{\epsilon} = \nabla_{\sigma} f(\sqrt{J_2}) \quad (5)$$

これより、

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial f(\sqrt{J_2})}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\partial \sqrt{J_2}}{\partial \sigma} = \frac{\partial f(\sqrt{J_2})}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{\mathbf{s}}{2\sqrt{J_2}} \quad (6)$$

を得る。式 (6) より $\text{tr}\dot{\epsilon} = 0$ となるので、非圧縮性流体であることが分かる。

流体計算では、ポテンシャル関数から構成式を導出することは一般的でないため、以下にビンガム流体、ダイラタント流体、擬塑性流体の構成式の計算を示す。

2.2.2. ビンガム流体の構成式と粘性係数

ビンガム流体⁽⁸⁾ の降伏関数 F は、Von-Mises の降伏基準に従えば、

$$F = \sqrt{J_2} - \frac{Y}{\sqrt{3}} \quad (7)$$

と書ける。ここに、 Y は降伏応力である。この F を用いて、関数 f を次式で定義する。

$$f(\sqrt{J_2}) = \frac{1}{2\bar{\mu}} \langle F \rangle^2 \quad (8)$$

ここに、 $\bar{\mu}$ は擬似粘性係数であり、定数である。 $\langle F \rangle$ は次式で表される関数である。

$$\langle F \rangle = \begin{cases} F & (F > 0) \\ 0 & (F \leq 0) \end{cases} \quad (9)$$

すなわち、式 (7)~(9) より、構成式 (5) は次式で表される。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{1}{\bar{\mu}} \langle F \rangle \nabla_{\sigma} \langle F \rangle \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\bar{\mu}} \left(\sqrt{J_2} - \frac{Y}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{J_2}} \mathbf{s} \right) & \left(\sqrt{J_2} > \frac{Y}{\sqrt{3}} \right) \\ 0 & \left(\sqrt{J_2} \leq \frac{Y}{\sqrt{3}} \right) \end{cases} \quad (10) \end{aligned}$$

式 (10) より、一定のせん断応力が働かなければひずみ速度が生じないことがわかる。なお、式 (11) との比較からわかるように、 $Y = 0$ のときはニュートン流体となる。

次に、ビンガム流体における粘性係数 μ を計算する。偏差応力とひずみ速度の関係式

$$\mathbf{s} = 2\mu\dot{\epsilon} \quad (11)$$

と式 (10) の比較により、次式を得る。

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\bar{\mu}} \left(\sqrt{J_2} - \frac{Y}{\sqrt{3}} \right) \frac{1}{\sqrt{J_2}} \quad (12)$$

ここで、式 (11) より、以下の関係式を得る。

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} = \mu \sqrt{2\dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}} = \mu \dot{\epsilon} \quad (13)$$

式 (13) を式 (12) に代入して整理すると、よく知られたビンガム流体における粘性係数を得る。

$$\mu = \frac{Y}{\sqrt{3}\dot{\epsilon}} + \bar{\mu} \quad (14)$$

2.2.3. ダイラタント流体・擬塑性流体の構成式と粘性係数

関数 $f(\sqrt{J_2})$ を次式のように定義する。

$$f(\sqrt{J_2}) = \frac{1}{2\bar{\mu}} \sqrt{J_2}^{\frac{1}{n}+1} \quad (15)$$

これより以下の構成式を得る。

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{4\bar{\mu}} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \sqrt{J_2}^{\frac{1}{n}-1} \mathbf{s} \quad (16)$$

式 (11) と式 (16) の比較により、次式を得る。

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2\bar{\mu}} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) \sqrt{J_2}^{\frac{1}{n}-1} \quad (17)$$

式 (13) を用いると、以下の粘性係数を得る。

$$\mu = \left(\frac{2n\bar{\mu}}{n+1} \right)^n \dot{\epsilon}^{n-1} = K \dot{\epsilon}^{n-1} \quad (18)$$

ただし、 K は次式で表される定数である。

$$K = \left(\frac{2n\bar{\mu}}{n+1} \right)^n \quad (19)$$

式 (18) より、 $n > 1$ のときはひずみ速度が大きいほど流動しにくく、 $n < 1$ のときはひずみ速度が大きいほど流動しやすい挙動を示すことがわかる。つまり、 $n > 1$ のときがダイラタント流体、 $n < 1$ のときが擬塑性流体をそれぞれ表している。

3. 流体解析の手順

3.1. 演算子分割

運動方程式 (1) を演算子分割し、以下のように分けて考える。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\mathbf{g} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (22)$$

式 (20) の移流方程式は、Particle-in-Cell 法 (PIC 法)⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾ によって行う。PIC 法はセル内に質量のない粒子を配置させ、それぞれの粒子をラグランジュ的観測により移流計算を行う数値解法である。また、グリッド上では速度や応力などをオイラー的観測により計算する。式 (21) の物体力計算と式 (22) の応力発散の計算についてはオイラー的観測により行う。計算のフローチャートを Fig. 1 に示す。

計算に用いるグリッドは、スタaggerドグリッドを用いる。ある 1 セルにおける各変数の配置を Fig. 2 に示す。速度は面上に配置し、せん断応力は辺上に、直応力はセル中心に配置する。

3.2. 粒子の配置

流体で満たされたセルには、計算開始前に $27 (= 3 \times 3 \times 3)$ 個の粒子を配置させる。本研究では粒子の半径 r をセル間隔

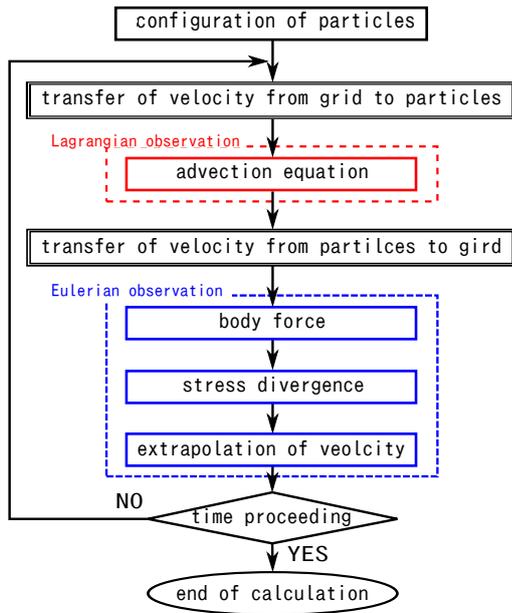


Fig. 1 Flow chart of calculation

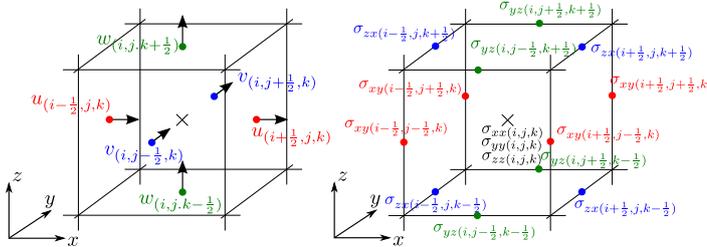


Fig. 2 Location of velocity and stress in grid

Δx の $1/4$ とする。そのため、粒子の中心は流体領域の境界面から $\Delta x/4$ 以上離して配置する。

3.3. ラグランジュ的観測に基づく計算

まず、グリッド上の速度を内挿し、粒子の速度を求める。例えば、 x 方向の速度 u を内挿する場合、速度が与えられている点を頂点とする正六面体を考え、その内部にある粒子は有限要素法におけるアイソパラメトリック要素の形状関数を重みとする重み付き平均によって求める。この粒子を移流させて、移流方程式を解く。計算では、粒子が固体壁面を越えてしまうことを防ぐため、短い時間間隔を用いる。本研究では、CFL 条件を満足する Δt の間に、 $\Delta t/5$ ごとに 5 回移流計算を行う。また、そのそれぞれの移流計算には 2 階の Runge-Kutta 法を用いる。移流計算の後、グリッド上の点を粒子に移動させる。この際も同じ重みを用いて重み付き平均によって速度を計算する。

3.4. オイラー的観測に基づく計算

オイラー的な観測では、粒子を含む流体セルのみを対象として流体の速度や応力を計算する。そのため、計算負荷は、計算領域の取り方によらず、流体の占める領域によって決まる。

物体力の計算 (式 (21)) では、移流計算の結果得られた速度を用いる。本研究では物体力として重力のみを考えるの

で、オイラー陽解法を用いる。

応力発散の計算 (式 (22)) は、物体力の計算で得られた速度を用いて計算する。具体的な計算方法については次章で示す。

前述の物体力の計算および応力発散の計算では、流体セルにおける速度は計算するが、気体セルの速度は計算しない。しかし、グリッドの速度から粒子の速度を内挿する際に、粒子を含まない気体セルにおける速度も必要になることがある。このような自由表面近くの気体セルにおける速度は、外挿を用いて求める。外挿される気体領域の速度は、その点から最も近い自由表面上の点における速度と等しいと仮定すると、例えば、 x 方向の速度 u に関して次式を満足する。

$$\nabla u \cdot \nabla \phi = 0 \quad (23)$$

ϕ は距離関数であり、粒子の位置によって決まる値である。この式を満足するように気体中のグリッドの速度を決定する。

4. 応力発散の計算

4.1. ミニマックス問題の定義

まず、式 (22) を離散化し、次式を得る。

$$\frac{\rho}{\Delta t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (24)$$

\mathbf{u}^* は移流計算および物体力計算をした速度である。

ここで、境界条件式 (2), (3), 構成式 (5), 応力発散の式 (24) と等価なミニマックス問題を定義するため、以下に示す汎関数を定義する。

$$I = \frac{\rho}{2\Delta t} \int_D \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|^2 dV + \int_D \dot{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_D f(\sqrt{J_2}) dV \quad (25)$$

ここに、 D は流体領域である。この I を速度 \mathbf{u} に関して最小化し、応力 $\boldsymbol{\sigma}$ に関して最大化する問題を考える。

4.2. 変分法を用いた同値性の証明

式 (25) の汎関数に対するミニマックス問題から、式 (2), (3), (5), (24) が導出されることを示す。まず、汎関数 I に対して速度の変分 $\delta \mathbf{u}$ を取る。ただし、変分 $\delta \mathbf{u}$ は壁面で式 (4), すなわち $\mathbf{n}_S \cdot \delta \mathbf{u} = 0$ を満足するものとする。

$$\delta_u I = \int_D \left\{ \frac{\rho}{\Delta t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right\} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_F \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0 \quad (26)$$

ここに、 S_F は自由表面である。 $\delta \mathbf{u}$ は任意の値をとるので、第一項から応力発散の式 (24) を、第二項から境界条件式 (2), (3) を得る。

次に、汎関数 I に対して応力の変分 $\delta \boldsymbol{\sigma}$ を取ると次式を得る。

$$\delta_\sigma I = \int_D (\dot{\epsilon} - \nabla_\sigma f) : \delta \boldsymbol{\sigma} dV = 0 \quad (27)$$

$\delta \boldsymbol{\sigma}$ は任意の値をとるので、構成式 (5) を得る。

以上より、式 (25) で表される I のミニマックス問題を解くことで、境界条件、構成式、応力発散の式を同時に満足することが示された。

4.3. ミニマックス問題の離散化

式 (25) で与えられるのは体積積分のみからなり、面積積分を含んでいない。数値計算ではこの汎関数をまず離散化してから、速度および応力に関してミニマックス問題として解く。離散化において、速度あるいは応力の変数は、その変数を定義した点を中心とするセルの内部で一定とする。そのセルにおいて流体が占める体積が分かれば、そのセルにおける体積積分は変数と体積積分の乗算のみで得られる。

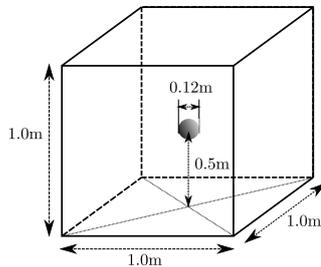
4.4. セルの体積計算

各セルにおいての流体が占める体積を計算するために、距離関数 ϕ を導入する。距離関数は界面からの距離を表し、気体中で正、液体中で負になる関数である。気体側の距離関数は単純に粒子からの距離で求め、液体内部の距離関数は、気体中の距離関数をもとにファストマーチングメソッド⁽¹¹⁾ を使って算出する。セルで流体が占める領域の体積 V は、セル中心の距離関数から計算する。自由表面がセルのいずれかの面と平行であると仮定すると、精度は落ちるものの、自由表面の複雑な形状を再現することなく、容易に体積を求めることができる⁽¹²⁾。

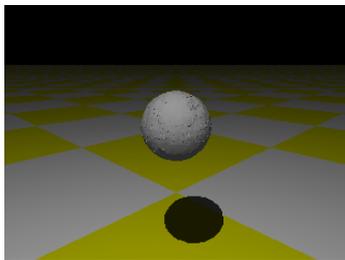
5. 数値解析例

数値解析例として、水球落下の問題と、スランプ試験の問題を解いた。解析はいずれも三次元で行っており、外力は重力 $g = 9.8\text{m/s}^2$ のみが下向きにかかっている。

5.1. 水球落下



(a) Lengths of fluid shpere



(b) Initial shape of fluid sphere

Fig. 3 Problem of fluid sphere

Fig. 3 に示すように、粘性を持つ水球の自由落下問題を扱う。解析領域を $1.0\text{m} \times 1.0\text{m} \times 1.0\text{m}$ とし、セル数は $50 \times 50 \times 50$ とした。すなわち、セル幅 Δx は $\Delta x = 0.02\text{m}$ である。また、密度 ρ は $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ とした。Table 1 に示すように、ケース 1-4 のパラメータで解析した。ケース 1 はニュートン流体、

ケース 2-4 は非ニュートン流体である。擬似粘性係数は全て $\bar{\mu} = 50\text{kg}/(\text{ms})$ とし、各流体の挙動を比較した。

Table 1 Parameters for free fall of fluid sphere

| | $\bar{\mu}$ kg/(ms) | Y kg/(ms ²) | n |
|---------------------|---------------------|---------------------------|-----|
| Newton Fluid | 50 | 0 | - |
| Bingham Fluid | 50 | 500 | - |
| Dilatant Fluid | 50 | - | 1.2 |
| Pseudoplastic Fluid | 50 | - | 0.8 |

時間が 0.4 秒経過したときの、流体の様子を Fig. 4 に示す。水球が着地した瞬間は応力が大きいため、ニュートン流体とビンガム流体の挙動は似ているが、着地してしばらくしてからには応力が小さくなる。そのため、Fig. 4(a), (b) が示すように、ビンガム流体はニュートン流体と比較して変形が小さくなっている様子が分かる。また、着地時には大きなひずみが生じるため、ダイラタント流体は粘性が大きくなり、擬塑性流体は粘性が小さくなる。Fig. 4(c), (d) を見るとその特性がよく現れていることが分かる。

5.2. スランプ試験

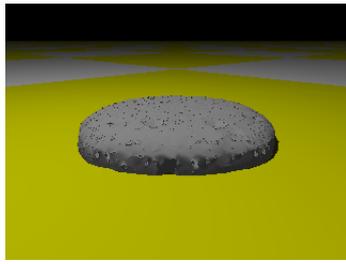
スランプ試験を模した解析を行う。Fig. 5(a) に示すように、対称性を利用して、4 分の 1 を解析対象とする。解析領域を $0.5\text{m} \times 0.5\text{m} \times 0.5\text{m}$ とし、セル数は $50 \times 50 \times 50$ とした。すなわち、セル幅 $\Delta x = 0.01\text{m}$ である。また、密度 ρ は $\rho = 3000\text{kg/m}^3$ とした。Table 2 に示すように、ケース 1-4 のパラメータで解析を行った。

Table 2 Parameters for slump test

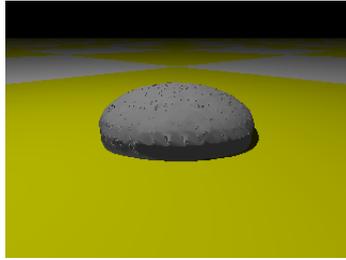
| | $\bar{\mu}$ kg/(ms) | Y kg/(ms ²) | n |
|---------------------|---------------------|---------------------------|-----|
| Newton Fluid | 1000 | 0 | - |
| Bingham Fluid | 1000 | 1000 | - |
| Dilatant Fluid | 1000 | - | 1.2 |
| Pseudoplastic Fluid | 1000 | - | 0.8 |

解析結果を Fig. 6 に示す。Fig. 6(a)(b)(c) は、解析開始から $t = 0.80\text{s}$ 通過したときの様子である。Fig. 6(d) は、擬塑性流体の解析結果で、 $t = 0.30\text{s}$ 経過したときの様子を示している。擬塑性流体の解析結果では、他の流体と比較して大きく流動するため、短い経過時間における変形の様子を示した。

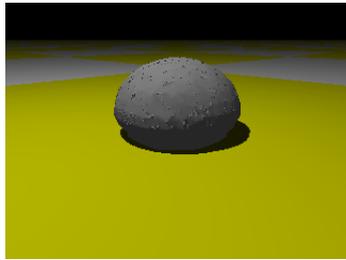
解析開始直後はスランプ形状の下部では応力が大きく、上部での応力はそれと比較して小さい。そのため、ビンガム流体では、スランプ形状の下部だけ変形が生じ、上部では降伏応力に達しないため剛体移動が生じる。Fig. 7 に $t = 0.80\text{s}$ のときのビンガム流体における降伏関数 f の分布を表す。Fig. 6(c)(d) では、水球の問題と同様に、ダイラタント流体はほとんど変形しない一方で、擬塑性流体は大きく変形している



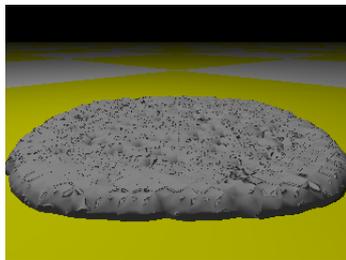
(a) Newton Fluid



(b) Bingham Fluid



(c) Dilatant Fluid



(d) Pseudoplastic Fluid

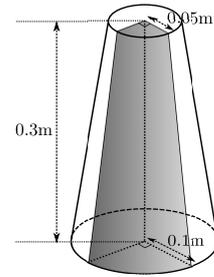
Fig. 4 Deformed shape of fluid sphere ($t = 0.4s$)

様子が分かる.

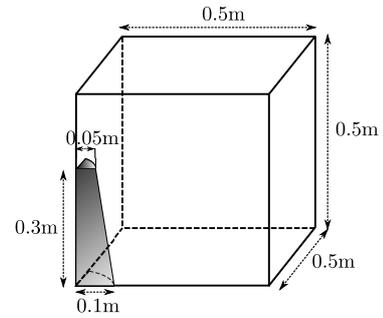
6. 結論

本研究で以下の結果を得た.

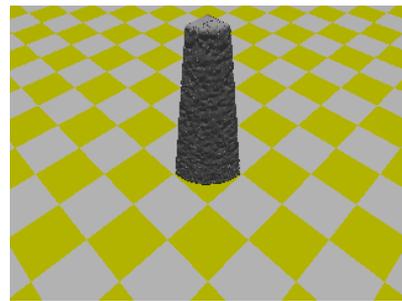
- 変分法を用いて、流体場の運動方程式、境界条件、構成式を同時に満足するミニマックス問題を定義し、定式化を行った. これにより、自由表面でトラクションフリー条件を満足することができ、かつ、非ニュートン流体の構成式を組み込むことが可能となった.
- Particle-in-Cell 法を用いて、非ニュートン流体の挙動を3次元解析するプログラムコードを開発した. 応力発散の計算については、Newton-Raphson 法を用いて



(a) Lengths of slump cone



(b) Domain of numerical simulation for slump test



(c) Initial shape of slump

Fig. 5 Problem of slump test

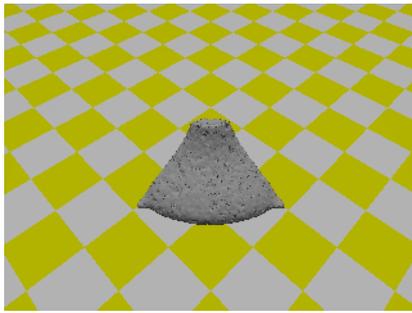
離散化したミニマックス問題を解くことに成功した.

- 開発したプログラムコードを用いて、様々な非ニュートン流体 (ビンガム流体, ダイラント流体, 擬塑性流体) の挙動を解析し、各流体の特性が表れていることを確認した.

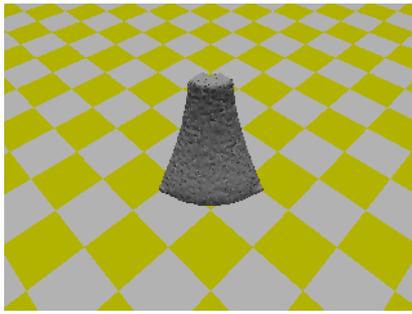
本研究のみでは、妥当性の検証が不十分であるので、パラメータを変更し多くの解析を行う必要があると考えている. また、他の数値解析手法や実験と比較を行いたいと考えている.

参考文献

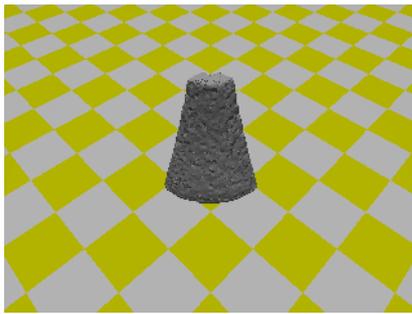
- (1) Luo, X.-L. : Numerical simulation of Weissenberg phenomena—the rod-climbing of viscoelastic fluids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 180, No. 3, pp. 393–412, 1999.
- (2) Bousfield, D., Keunings, R., Marrucci, G. and Denn, M. : Nonlinear analysis of the surface tension driven



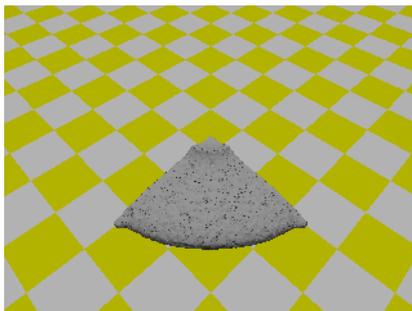
(a) Newton Fluid ($t = 0.80s$)



(b) Bingham fluid ($t = 0.80s$)



(c) Dilatant Fluid ($t = 0.80s$)



(d) Pseudoplastic fluid ($t = 0.30s$)

Fig. 6 Deformed shape of slump test

breakup of viscoelastic filaments, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 21, No. 1, pp. 79–97, 1986.

- (3) Shao, S. and Lo, E. Y. : Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface, *Advances in Water Resources*, Vol. 26, No. 7, pp. 787–800, 2003.

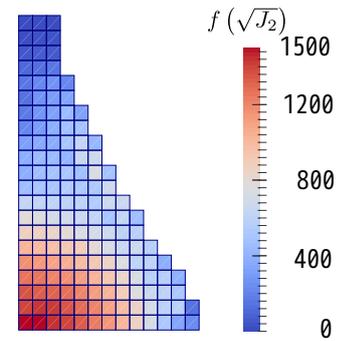


Fig. 7 Distribution of $f(\sqrt{J_2})$ (Bingham fluid, $t = 0.80s$)

- (4) 富山潤, 入部綱清, 崎原康平, 伊良波繁雄, 山田義智 : フレッシュコンクリートの流動解析における MPS 法の適用, *構造工学論文集 A*, Vol. 55A, pp. 164–171, 2009.
- (5) Kim, J. M., Ahn, K. H., Lee, S. J. and Lee, S. J. : Numerical simulation of moving free surface problems in polymer processing using volume-of-fluid method, *Polymer Engineering & Science*, Vol. 41, No. 5, pp. 858–866, 2001.
- (6) Tomé, M. F., Grossi, L., Castelo, A., Cuminato, J. A., Mangiavacchi, N., Ferreira, V. G., De Sousa, F. and McKee, S. : A numerical method for solving three-dimensional generalized Newtonian free surface flows, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 123, No. 2, pp. 85–103, 2004.
- (7) 西藤潤, 小野耕平 : 自由表面を有する非ニュートン流体の数値計算に関する基礎的研究, *応用力学論文集*, Vol. 15, pp. I.179–I.186, 2012.
- (8) Zienkiewicz, O. and Godbole, P. : Flow of plastic and visco-plastic solids with special reference to extrusion and forming processes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, No. 1, pp. 1–16, 1974.
- (9) Harlow, F. H. : The particle-in-cell method for numerical solution of problems in fluid dynamics, Technical report, Los Alamos Scientific Lab., N. Mex., 1962.
- (10) Harlow, F. H., Welch, J. E. et al. : Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of fluids*, Vol. 8, No. 12, p. 2182, 1965.
- (11) Sethian, J. A. : A fast marching level set method for monotonically advancing fronts, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 93, No. 4, pp. 1591–1595, 1996.
- (12) Bridson, R. : *Fluid Simulation for Computer Graphics*, A K Peters, Ltd, 2008.