

節点ベース要素を用いた混合型剛塑性有限要素解析への アダプティブ法の適用

APPLICATION OF ADAPTIVE METHOD TO RIGID PLASTIC ANALYSIS WITH NODE-BASED ELEMENTS

春日井 健太¹⁾, 西藤 潤²⁾, 小林 俊一³⁾,

Kenta KASUGAI, Jun SAITO and Shun-ichi KOBAYASHI

- 1) 京都大学工学研究科 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C1, E-mail: kasugai@basewall.kuciv.kyoto-u.ac.jp)
2) 京都大学工学研究科 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C1, E-mail: saito.jun.3n@kyoto-u.ac.jp)
3) 金沢大学理工研究域 (〒 920-1192 金沢市角間町, E-mail: koba@se.kanazawa-u.ac.jp)

The purpose of this study is to apply the adaptive remeshing to the rigid plastic finite element analysis with node-based elements. Unlike conventional finite element analysis, a node-based element is associated with a single node. Rigid plastic finite element analysis with node-based elements can prevent locking phenomena. Adaptive remeshing enables us to predict the collapse load accurately with less number of elements. The efficiency of the proposed technique is demonstrated by analyses of two classical problems; namely a uniaxial strength of a slab with a circular cutout and a limit load of a direct extrusion.

Key Words: Limit Analysis, Node-based Element, Adaptivity

1. はじめに

剛塑性解析とは、塑性変形に比べて弾性変形が十分小さい時に用いられる解析手法であり、終局状態に至る崩壊荷重や終局状態における応力状態、崩壊メカニズムなどを知ることができる。逐次計算を行う弾塑性解析では一般的に終局状態の計算を行うことが困難であるのに対して、剛塑性解析では終局状態を直接求めるため、計算が数値的に安定するという特徴を有している。また、弾性解析と比較して少ないパラメータで計算可能であり、地盤の支持力解析や金属加工の分野において、簡便な数値解析手法として用いられている。

剛塑性体を対象とする数値解析法はいくつか定式化がなされているが、Zouain ら⁽¹⁾の提案した下界定理に基づく定式化は汎用性が高い手法である。Zouain らの手法は、塑性の問題に対して通常の三角形要素を用いているため、境界値問題の設定によってはロッキングが生じ、解を実際よりも剛に評価することがある。そのため、Borges ら⁽²⁾は、Zouain らの手法に対してアダプティブ法を適用し、理論解の知られた問題を解くことで、数値解が解析解に近づくことを示した。鋭い滑り線が生じるような剛塑性境界値問題においては、塑性化する領域では細かいメッシュ分割が必要となる一方で、塑性化しない領域は細かいメッシュ分割が不要となるため、

剛塑性解析とアダプティブ法の相性は非常に良いと言える。Lyamin ら⁽³⁾は、Zouain らの手法に応力の不連続性を導入することで、ロッキングの生じない定式化を示しており、その手法に対してさらにアダプティブ法を適用している⁽⁴⁾。ただし、Lyamin らの手法は速度場が得られないという欠点を有している。

著者ら⁽⁵⁾も Zouain らの手法に対して、ロッキングの問題を回避するため節点ベース要素を適用し、少ない要素数で正解に近い値を得ることができる定式化を提案している。本研究では、さらに効率的に計算を行うため、この手法にアダプティブ法の適用を試みその有効性を検証する。なお、節点ベース有限要素解析は三角形要素による要素分割を行うため、容易にメッシュ分割の自動化やメッシュ再分割を行うことができる。

2. 混合型剛塑性有限要素解析

非斉次ディリクレ条件を含まない問題（荷重係数を求める問題）と非斉次ディリクレ条件を含む問題（変位速度制御の問題）における最適化問題の定式化をそれぞれ以下に示す。

2.1. 非斉次ディリクレ条件を含まない剛塑性境界値問題

2.1.1. 問題の設定

剛塑性体からなる物体を対象とし、境界は変位速度を 0 とする斉次ディリクレ境界とトラクションを与えるノイマン境

界とする。領域およびノイマン境界に対して、荷重 αb_0 と b_1 を作用させ、物体が塑性崩壊するときの荷重係数 α 、応力分布、崩壊メカニズムを求める境界値問題を考える。

2.1.2. 定式化

下界定理より、応力場が力の釣り合い式および降伏条件を満足するとき、荷重係数 α は真の崩壊時の荷重係数 α^* を上回らないことが知られている。つまり、力の釣り合い式および降伏条件を制約条件とし、荷重係数 α の値を最大化することで荷重係数 α の近似解が得られる。

$$\begin{aligned} & \max_{\sigma, \alpha} \alpha \\ & \text{subject to } \begin{cases} B^T \sigma = \alpha b_1 + b_0 \\ f(\sigma) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

ひとつめの制約条件は力のつりあい式である。行列 B は微分作用素であり、具代的な式については次章で述べる。 σ は各要素の応力成分を並べたベクトルである。この力のつりあい式はディリクレ境界に相当する成分を含んでいない。ふたつめの制約条件は、降伏条件であり、応力が降伏曲面の内部に存在することを表して示す。ベクトル関数 f は各要素の積分点における降伏関数を並べたベクトルである。なお、ベクトル同士の不等式は、全ての成分において成り立つことを意味する。

2.2. 非斉次ディリクレ条件を含む剛塑性境界値問題

2.2.1. 問題の設定

非ゼロの変位速度を与える非斉次ディリクレ境界を含む問題、すなわち崩壊メカニズムの一部を陽に与え、変位速度を制御する問題を考える。領域およびノイマン境界に作用する荷重を b とおく。非斉次ディリクレ境界に与える変位速度を v とし、その境界上の反力を p とする。

2.2.2. 定式化

下界定理より、応力場が力の釣り合い式および降伏条件を満たすとき、外部仕事率は真の崩壊時の外部仕事率の下界値を与えるため、外部仕事率を最大化することで近似解が得られる。すなわち、以下の非線形最適化問題を解けばよい。

$$\begin{aligned} & \max_{\sigma, p} v^T p \\ & \text{subject to } \begin{cases} B'^T \sigma = b' + p' \\ f(\sigma) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

ひとつめの制約条件は、以下の2つの力のつりあい式をまとめた式である。

$$B^T \sigma = b \quad (3)$$

$$B_D^T \sigma = b_D + p \quad (4)$$

式(3)はディリクレ境界以外の成分の力のつりあい式、式(4)は非斉次ディリクレ境界条件に相当する成分の力のつりあい式である。外力 b_D は非斉次ディリクレ境界に作用する既知の物体力である。 B', b', p' は以下の通り定義する。

$$B' = [B, B_D], \quad b' = \begin{Bmatrix} b \\ b_D \end{Bmatrix}, \quad p' = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix} \quad (5)$$

2.3. 制約条件付きの最適化問題の解法

先に示した2つの制約条件付きの最適化問題は、いずれもラグランジアンから最適性条件を導出し、それを満足する変数をニュートンラフソン法によって求めることで解が得られる。ニュートンラフソン法で問題を解く際に、数式を縮約すると、最終的に解くべき線形方程式の行列はバンド型の正定値対称行列となる⁽¹⁾。なお、力のつりあい式に対するラグランジュの未定乗数の物理的意味は変位速度であり、塑性条件に対するそれは塑性乗数に相当する。

3. 節点ベース要素の剛塑性有限要素解析への適用

制約条件付きの最適化問題(式(1), (2))における行列 B は、Dohrmannら⁽⁶⁾が提案した節点ベース要素における微分作用素を用いる。節点ベース要素とは、節点を中心とする要素のことであり、その節点に隣接する三角形要素から作られる。本研究では、各三角形要素の1/3がそれぞれの頂点における節点ベース要素を構成することとする。例えば、節点 L における節点ベース要素の面積 \hat{S}_L は、節点 L に隣接する三角形要素 J の面積 S_J を用いて以下のように定める。

$$\hat{S}_L = \sum \frac{1}{3} S_J \quad (6)$$

節点 L における節点ベース要素の微分作用素 \hat{B}_L をこの面積 \hat{S}_L を用いて以下のように定義する。

$$\hat{B}_L = \begin{bmatrix} B_{L11} & 0 & \dots & B_{L1N} & 0 \\ 0 & B_{L21} & \dots & 0 & B_{L2N} \\ B_{L21} & B_{L11} & \dots & B_{L2N} & B_{L1N} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$B_{LiI} = \frac{\partial \hat{S}_L}{\partial x_{iI}} \quad (8)$$

ここに、 N は全節点数、 I は節点番号、 $i(=1, 2)$ は方向を表す。

式(7)で得られた \hat{B}_L を並べた行列を B とし、前章における力のつりあい式に用いる。通常の有限要素解析では、応力、降伏関数、塑性乗数は三角形要素の中心で与えられるが、節点ベース要素では、これらの変数は節点ベース要素の中央、すなわち節点ごとに与えられる。通常の有限要素解析では制約条件の数は三角形要素の数に比例するが、節点ベース要素を用いると節点の数に比例する。三角形要素を配置すると、通常、三角形要素の数は節点数の2倍程度の値となる。そのため、節点ベース要素を使うことで、制約条件の数を減らすことができ、その結果、ロッキングを回避できる。

なお、弾性体に対して節点ベース要素を適用すると、小さなエネルギーでスプリアモードが生じたり、微圧縮材料では応力振動が発生したりする問題が生じることが知られている⁽⁷⁾。本論文で示す数値解析例では上記の問題は生じなかったが、剛塑性解析でも同様のことが起こることが考えられる。これについては、今後の課題としたい。

4. アダプティブ法

アダプティブ法に用いる誤差指標は、数値解析結果とそれを平滑化した関数の差より求める^{(8) (9) (10)}。評価の対象と

する変数は、Lyamin ら⁽⁴⁾ に倣い、ラグランジュ乗数 λ とする。

三角形要素 T の誤差指標 η_T を次式で定義する。

$$\eta_T = \sqrt{\int_{S_T} (\lambda^{Re}(\mathbf{x}) - \lambda^h(\mathbf{x}))^2 dS} \quad (9)$$

λ^h は数値解析で得られたラグランジュ乗数であり、節点ベース要素内で一定の値とする。 λ^{Re} は λ^h を平滑化したラグランジュ乗数であり、数値解析で得られた節点上のラグランジュ乗数の値を三角形要素内で線形補間する。

$$\lambda^{Re}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^3 N_I(\mathbf{x}) \lambda_I^h \quad (10)$$

ここに、 N_I は三角形一次要素の節点 I における形状関数、 λ_I^h は数値解析で得られた節点 I におけるラグランジュ乗数である。式 (9) は、三角形要素を3つの四角形に分割し、それぞれで数値積分して計算する⁽¹⁰⁾。

領域全体の誤差指標 η 、目標とする誤差指標の平均値 η^* をそれぞれ以下の通り定義する。

$$\eta = \left(\sum_{T=1}^{N_{old}} \eta_T^2 \right)^{1/2}, \quad (11)$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{\sqrt{N_{new}}} \quad (12)$$

N_{old}, N_{new} はそれぞれ、メッシュ再分割前の三角形要素数、メッシュ再分割後の三角形要素数の目標値であり、本研究では $N_{new} = 2N_{old}$ とする。

特性長（三角形要素の一辺の長さ）の変化率は以下のように求める⁽¹¹⁾。

$$\beta_T = \left(\frac{\eta^*}{\eta_T} \right)^{1/3} \quad (13)$$

ここで得られた変化率 β_T と再分割前の特性長 h_{Told} を用いて、新しい特性長 h_{Tnew} を以下のように求める。

$$h_{Tnew} = \beta_T h_{Told} \quad (14)$$

本研究では、メッシュの再分割にフリーソフト gmsh⁽¹²⁾ を用いた。「境界条件を含む幾何情報」と「メッシュ再分割前の三角形要素の節点に式 (14) で得られた特性長 h_{Tnew} を与えたメッシュの情報」を gmsh に与えると、特性長に応じてメッシュを再分割する。

5. 数値解析例

本手法の妥当性を確認するため、理論解の知られている有円孔平板問題と押し出し問題を解いた。

5.1. 有円孔平板問題

5.1.1. 問題の設定

Fig. 1 に示すように、一辺の長さ L の正方形の中央に直径 $L/5$ の円孔がある平板を対象とする。外力として、鉛直方向に等分布荷重 p を作用させ、崩壊に至る荷重 p_c を求める。平面応力状態を仮定し、降伏関数として von Mises の破壊基準を用いる。解析対象とする領域は、問題の対称性から右上

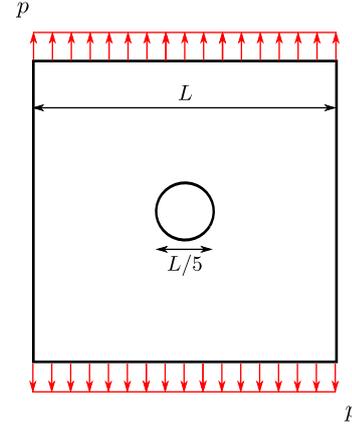


Fig. 1 A slab with a circular cutout subjected to a uniaxial tension

の1/4のみとした。なお、この問題は非斉次ディリクレ条件を含まない剛塑性境界値問題である。

5.1.2. 解析結果・考察

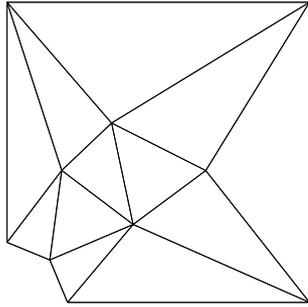
Fig. 2 にメッシュ分割の様子を示す。本解析で用いたメッシュのうち、もっとも細かいメッシュの要素数は873であり、そのメッシュを用いて得られたひずみ速度の大きさの分布をFig. 3 に示す。滑り線が形成されている領域に沿って細かいメッシュ分割が行われており、適切な再分割が行われている様子が分かる。

要素数と崩壊荷重の関係をFig. 4 に示す。横軸は三角形要素の数である。縦軸は、円孔のない平板の崩壊荷重 p'_c に対する有円孔平板の崩壊荷重 p_c の比 p_c/p'_c である。この問題の理論解は0.8である。初期のメッシュにおける崩壊荷重の値は大きいため、グラフには初期のメッシュにおける値はプロットしていない。また、図にはアダプティブ法を用いず、ほぼ均一の大きさの要素からなるメッシュを用いて計算した結果を併せて示している。このメッシュの要素数はアダプティブ法で得られたメッシュの要素数に近い値を取るよう定めた。

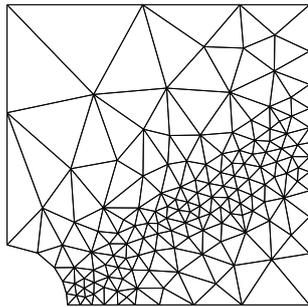
Fig. 4 から分かるように、要素数の増加とともに数値解は理論解に漸近している。最も細かいメッシュを用いた解析で得られた解は0.8004であり、正解との誤差は約0.05%と良好な結果を示している。また、均一の大きさの要素を用いた場合と比較して、理論解に近い値を取っている。

しかし、一方で、式 (12) において三角形要素の数 N_{new} は、再分割前の要素数 N_{old} の2倍に設定しているが、必ずしも2倍に近い値になっていない。これは、塑性化する領域と塑性化しない領域で、ラグランジュ乗数 λ の値が大きく異なり、それに伴い式 (14) から得られる特性長の値（目標値）も大きく異なるため、両領域の境界付近において再分割後の特性長の値（実際値）と目標値に差が出るのが原因のひとつであると著者らは考えている。また、単調に理論解に漸近していない。この理由としては、再分割を局所的ではなく、常に領域全体で行っているため、再分割の過程で問題に適したメッシュが得られたためと考える。いずれの問題においても、再分割手法に関する検討が必要であり、今後の課題としたい。

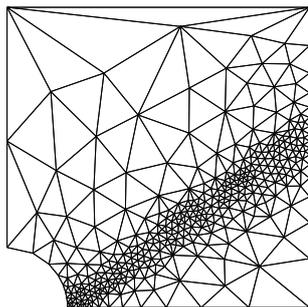
5.2. 押し出し問題



(a) 12 elements (Initial mesh)



(b) 282 elements



(c) 873 elements

Fig. 2 Mesh adaptation progress for a slab with a circular cutout problem



Fig. 3 Distribution of magnitude of strain rate (873 elements)

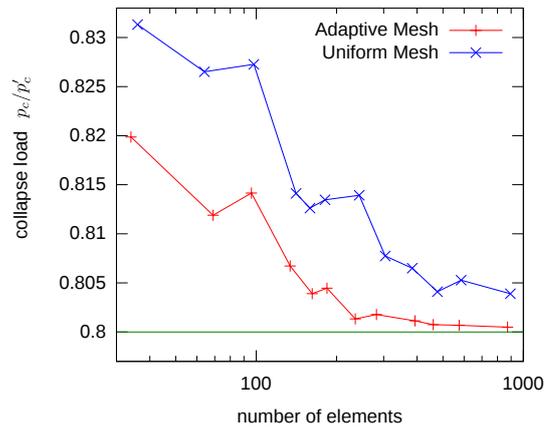


Fig. 4 Collapse load p_c/p'_c for a slab with a circular cutout problem

5.2.1. 問題の設定

Fig. 5 に示す押出加工の問題を考える。ビレットの幅に対するダイスの幅の比を $1/3$ とする。問題は二次元として平面ひずみ状態を考え、降伏関数は von Mises の破壊基準を用いる。コンテナとビレットには摩擦は作用しないと仮定する。ダミーブロックは変形することなく水平方向に移動するものとし、変位速度制御問題（非斉次ディレクレ条件を含む問題）として扱う。解析領域は、対称性より上半分のみとする。

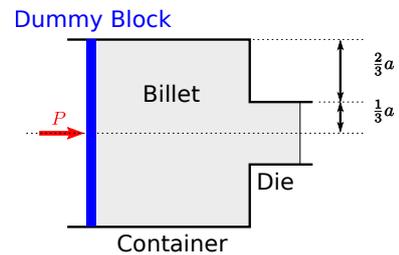


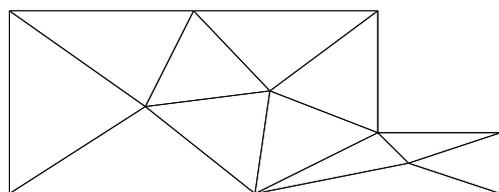
Fig. 5 Direct extrusion process

5.2.2. 解析結果・考察

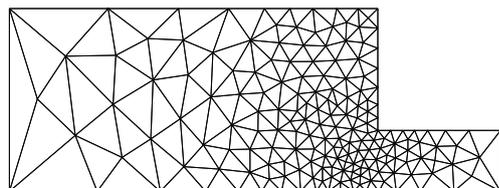
Fig. 6 に初期のメッシュおよび再分割で得られたメッシュの一部を示す。この一連の解析の中で最も細かいメッシュ (Fig. 6(d) 要素数 13617) を用いて解析した結果、得られたひずみ速度の大きさの分布を Fig. 7 に示す。この図より、塑性化する領域付近で要素が細分化されていることが見て取れる。Fig. 7 の滑り線は解析的に得られる滑り線⁽¹³⁾とよく似た形状をしている。

崩壊に至る荷重と要素数の関係を Fig. 8 に示す。横軸は三角形要素の数である。縦軸は、ダミーブロックに作用する荷重 P をダミーブロックの面積 A で除した応力 $p (= P/A)$ をさらに破壊強度 c_Y で除した値 p/c_Y である。初期のメッシュにおける崩壊荷重の値は大きいためプロットしていない。また、ほぼ均一の大きさの要素からなるメッシュを用いて計算した結果を併せて示している。

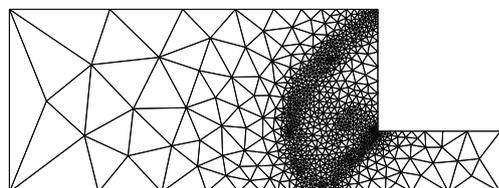
Fig. 8 から分かるように、本論文で示した手法により求め



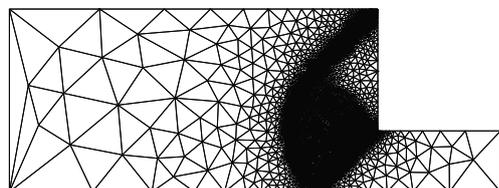
(a) 12 elements (Initial mesh)



(b) 316 elements



(c) 1723 elements



(d) 13617 elements

Fig. 6 Mesh adaptation progress for extrusion problem

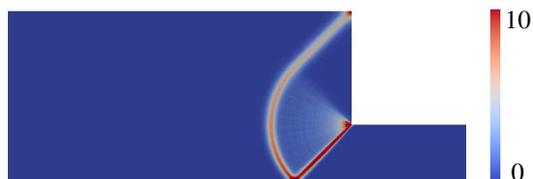


Fig. 7 Distribution of magnitude of strain rate

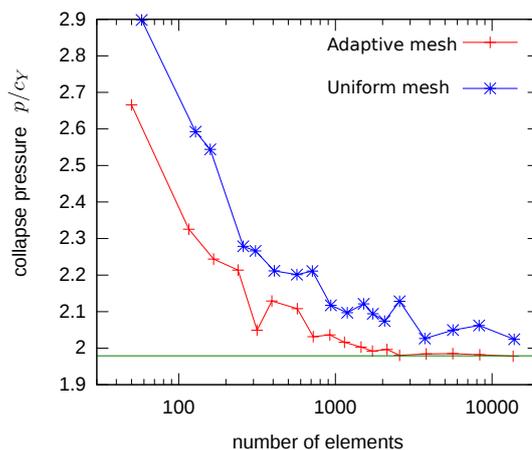


Fig. 8 Collapse extrusion pressure p/cy

た数値解は、均一の大きさの要素を用いた場合より理論解に近い値を取っている。また、本グラフには示していないが、通常の三角形要素を用いた Borges ら⁽²⁾の方法と比較しても、本手法の方が理論解に近い値を取っている。本解析で最も要素数が多いメッシュ (Fig. 6(d))13617 要素で解析した結果、降伏に至る崩壊荷重 p/cy は 1.9779 であった。この数値解析結果と理論解 1.9789⁽¹³⁾ との誤差は約 0.05% である。

6. 結言

本論文では、節点ベース要素を用いた混合型剛塑性有限要素解析へのアダプティブ法の適用を試みた。数値解析を行った結果、少ない要素数で理論解に近い値を取ることが分かった。このことから、節点ベース要素を用いた剛塑性解析でも他の定式化の手法と同様に、ラグランジュ乗数 λ を誤差評価の対象とするアダプティブ法が有用であることが言える。

今後の課題としては、支持力問題 (ブロックの押し込み問題) など与えられる表面力が不連続になる問題を解くことがあげられる。本論文で示した手法を支持力問題に用いたところ、理論解に近い値は取るものの、要素数を増やしても理論解に漸近しないという結果が得られている。また、3章で述べたように、アダプティブ法を適用した際の、スプリアスモードや応力振動の発生する可能性について検証したい。さらに、5章で述べたように、メッシュの再分割手法を改善することで、要素数と計算精度の制御性を向上させる必要がある。

参考文献

- (1) Zouain, N., Herskovits, J., Borges, L. A. and Feijóo, R. A. : An iterative algorithm for limit analysis with nonlinear yield functions, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No. 10, pp. 1397–1417, 1993.
- (2) Borges, L., Zouain, N., Costa, C. and Feijóo, R. : An adaptive approach to limit analysis, *International Jour-*

nal of Solids and Structures, Vol. 38, No. 10, pp. 1707–1720, 2001.

- (3) Lyamin, A. V. and Sloan, S. : Lower bound limit analysis using non-linear programming, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 55, No. 5, pp. 573–611, 2002.
- (4) Lyamin, A. V., Sloan, S. W., Krabbenhøft, K. and Hjiaj, M. : Lower bound limit analysis with adaptive remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 63, No. 14, pp. 1961–1974, 2005.
- (5) 西藤潤, ガンバットエンクタイファン, 小林俊一 : 節点ベース均一ひずみ要素を用いた剛塑性有限要素法の開発, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol. 69, No. 2, pp. I.247–I.253, 2013.
- (6) Dohrmann, C., Heinstein, M., Jung, J., Key, S. and Witkowski, W. : Node-based uniform strain elements for three-node triangular and four-node tetrahedral meshes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, No. 9, pp. 1549–1568, 2000.
- (7) Puso, M. and Solberg, J. : A stabilized nodally integrated tetrahedral, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, No. 6, pp. 841–867, 2006.
- (8) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z. : The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, No. 7, pp. 1331–1364, 1992.
- (9) Zienkiewicz, O. C. and Zhu, J. Z. : The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, No. 7, pp. 1365–1382, 1992.
- (10) Nguyen-Thoi, T., Liu, G., Nguyen-Xuan, H. and Nguyen-Tran, C. : Adaptive analysis using the node-based smoothed finite element method (NS-FEM), *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, Vol. 27, No. 2, pp. 198–218, 2011.
- (11) 日本計算工学会: アダプティブ有限要素法, 丸善, 2003.
- (12) Geuzaine, C. and Remacle, J.-F. : Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 79, No. 11, pp. 1309–1331, 2009.
- (13) Lubliner, J.: *Plasticity Theory*, Maxwell Macmillan international editions in engineering, Macmillan, 1990.