

# 音響波動-弾性波動連成問題に対する陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQ-FMBEM

## IMPLICIT RUNGE-KUTTA BASED CQ-FMBEM FOR COUPLED ACOUSTIC-ELASTIC WAVE PROBLEMS

丸山 泰蔵<sup>1)</sup>, 斎藤 隆泰<sup>2)</sup>, 廣瀬 壮一<sup>3)</sup>

Taizo MARUYAMA, Takahiro SAITOH, and Sohichi HIROSE

- 1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: maruyama.t.ag@m.titech.ac.jp)  
 2) 群馬大学大学院理工学府 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail: t-saitoh@gunma-u.ac.jp)  
 3) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp)

In this work, we propose a new three-dimensional (3D) approach for solving transient wave scattering problems of fluid-filled inclusions using the time-domain boundary element method (BEM) accelerated by the fast multipole method (FMM). The implicit Runge-Kutta based convolution quadrature method (IRK-based CQM) is utilized for the discretization of convolution integrals in boundary integral equations (BIEs) in order to improve the accuracy and stability of time-marching process. Generally, the BIEs for time-domain coupled acoustic-elastic wave problems include the second-order time differentiation of displacement. We propose the solution to this issue using the CQM formulation. As numerical examples, the comparison of far-field scattered waves by spherical fluid-filled and elastic inclusions and cavities is presented.

**Key Words** : Time-Domain BEM, Implicit Runge-Kutta Method, Convolution Quadrature Method, Fast Multipole Method, Acoustic-Elastic Wave

### 1. はじめに

時間領域境界要素法 (TD-BEM) は (半) 無限領域を扱う非定常な波動問題の解析において有効な手法であると考えられる。しかしながら、時間に関する畳込み積分に対して、近似基底を導入し離散化するいわゆる従来型の TD-BEM は、時間増分が小さい場合、数値解の安定性に問題があった<sup>(1)</sup>。

一方、Lubich が提案した線形多段法を用いた演算子積分法<sup>(2)</sup>(CQM) によって時間に関する畳込み積分を離散化する演算子積分時間領域境界要素法 (CQ-BEM) は、従来の TD-BEM と比較して、同程度の精度を得るために比較的小さい時間増分を用いる必要があるものの、安定に時間ステップ解析を行うことが可能である。さらに、CQ-BEM では、時間領域ではなくラプラス変換領域の基本解を用いて影響関数を構成するため、粘弾性体や飽和多孔質弾性体のように波動が分散性を有する問題に対しても特別な工夫を施すことなく適用が可能である<sup>(3,4,5)</sup>。また、近年、陰的 Runge-Kutta 法 (IRK 法) を用いた CQM<sup>(6)</sup> の TD-BEM への応用も検討され、従来の線形多段法を用いた CQ-BEM と比べて、時間ステップあたりの計算コストは増大するものの、比較的大きな時間増分を用いた場合でも高い精度を発現できることが報告されている<sup>(7,8)</sup>。

一方、線形多段法、IRK 法のいずれを用いた CQ-BEM も計算量は総時間ステップ数  $N$  に対して  $\mathcal{O}(N^2)$  であり、従来の TD-BEM と同様のオーダーではあるが、影響関数の計算時間や IRK 法の標本点等を考慮すると、実質的な計算時間は CQ-BEM の方が大きい。また、要素数  $M$  に対する計算量は  $\mathcal{O}(M^2)$  であるため、大規模問題への適用は困難である。そのため、要素数増大による計算コストを低減させるために、高速多重極法<sup>(9,10)</sup>(FMM) を CQ-BEM に適用した CQ-FMBEM の開発が精力的に進められてきた<sup>(4,8)</sup>。また、ACA<sup>(11)</sup>(Adaptive Cross Approximation) を用いた高速化も提案されている<sup>(12,13,14)</sup>。その中でも、IRK 法を用いた CQ-FMBEM では、要素数のみならず、IRK 法の段数に対しても高速化の効果が報告されている<sup>(8)</sup>。

本研究では、様々な工学問題への応用を見据えて、3次元音響波動-弾性波動連成問題に対する IRK 法を用いた CQ-FMBEM について検討を行う。音響波動-弾性波動連成問題は、例えば、超音波を用いた非破壊検査 (超音波法) シミュレーションでは、流体領域から超音波を入射し固体内部の探傷を行う水浸探傷法、非接触法である空気超音波法、固体内部の流体インクルージョン検出等への応用が考えられる。このように様々な問題へ応用できるにもかかわらず、流体-弾性体界面における境界

条件は変位の時間に関する二階微分項を含むため、境界微積分方程式を連立させて線形一次方程式に帰着させる際に、何らかの処理が必要となる。

本論文では、CQM の特性を生かすことによって容易に二階微分項を処理し、時間領域において直接境界値問題を解く方法を提案する。以下では、最初に IRK 法を用いた CQM の定式化を簡潔に説明し、音響波動-弾性波動連成問題に対する境界微積分方程式を示す。その後、IRK 法を用いた CQM による離散化、及び変位の二階微分項の処理方法を示す。最後に、数値解析例として、流体インクルージョンによる散乱問題の解析結果を示し、本手法の有効性について検討する。

## 2. IRK 法を用いた CQM

まず、Lubich らによって提案された IRK 法を用いた CQM<sup>(6)</sup> について説明しておく。本論文では、Lubich らに倣い、A 安定な IRK 法の一つである  $m$  段の Radau IIA 法を用いた CQM によって、時間  $t$  に対する次の畳込み積分

$$u(t) = (k * g)(t) \left( \equiv \int_0^t k(t-\tau)g(\tau)d\tau \right), \quad t > 0 \quad (1)$$

を離散化することを考える。Radau IIA 法では、Butcher の係数パラメータ

$$\begin{cases} \mathbf{A} = (a_{ij}), & (1 \leq i, j \leq m) \\ \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \\ \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)^T \end{cases} \quad (2)$$

は次の条件

$$0 < c_1 < \dots < c_m = 1, \quad b_i = a_{mi}, (i = 1, \dots, m) \quad (3)$$

を満足する。Radau IIA 法における係数パラメータの計算手法の詳細に関しては、例えば文献<sup>(15)</sup>を参照されたい。

IRK 法を用いた CQM を適用し、時間  $t$  を時間増分  $\Delta t$  を用いて  $t \simeq n\Delta t$  と表せば、式 (1) を次のように近似することができる。

$$U_n \simeq \Delta t \sum_{k=0}^n W_{n-k} G_k, \quad (n = 0, \dots, N-1) \quad (4)$$

ここで、 $N$  は総時間ステップ数として定義している。また、 $U_n$ ,  $G_n$  は IRK 法の標本点により構成される  $m$  個の成分を持つベクトルであり、それぞれ次のように表される。

$$U_n = (u((n+c_j)\Delta t))_{j=1}^m \quad (5)$$

$$G_n = (g((n+c_j)\Delta t))_{j=1}^m \quad (6)$$

一方、式 (4) の  $W_n$  は  $m \times m$  の成分を持つ第  $n$  ステップ目の重み関数行列であり、変数を  $\zeta$  とする生成多項式の表現を用いて次のように表される。

$$\Delta t \sum_{n=0}^{\infty} W_n \zeta^n = \sum_{\beta=1}^m \hat{k}(\lambda_\beta) \mathbf{E}_\beta(\zeta) \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_\beta(\zeta) = \lim_{s \rightarrow \lambda_\beta} (\lambda_\beta - s) \left( \frac{\Upsilon(\zeta)}{\Delta t} - sI \right)^{-1} \quad (8)$$

$$\Upsilon(\zeta) = \left( \mathbf{1} \mathbf{b}^T \frac{\zeta}{1-\zeta} + \mathbf{A} \right)^{-1} \quad (9)$$

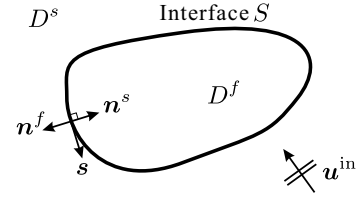


Fig.1 Analysis model for coupled acoustic-elastic wave problem.

ここで、 $\mathbf{1}$  は  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$ ,  $I$  は単位行列、 $\lambda_\beta$  は  $m \times m$  行列  $\Upsilon(\zeta)/\Delta t$  の固有値であり、 $\hat{k}(s)$  は  $k(t)$  のラプラス変換、 $s$  はラプラスパラメータを表す。式 (7) をコーシーの積分公式、及び台形則を用いて離散近似すると以下の表現を得る。

$$\begin{aligned} \Delta t W_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\mathcal{R}} \left[ \sum_{\beta=1}^m \hat{k}(\lambda_\beta) \mathbf{E}_\beta(\zeta) \right] \zeta^{-n-1} d\zeta \\ &\simeq \mathcal{F}_l^n \left[ \sum_{\beta=1}^m \hat{k}(\lambda_\beta^l) \mathbf{E}_\beta(\zeta_l) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

このとき、 $\zeta_l$  は半径  $\mathcal{R} < 1$  の円周上の等分点  $l = 0, \dots, L-1$  を考えることによって、 $\zeta_l = \mathcal{R} \exp(2\pi i l / L)$  と表される。ここで、 $i$  は虚数単位である。一方、 $\mathcal{F}_l^n$  は次式で定義される離散フーリエ変換を表している。

$$\mathcal{F}_l^n[\phi_l] = \frac{\mathcal{R}^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \phi_l e^{-\frac{2\pi i n l}{L}} \quad (11)$$

ここで、 $\mathcal{R}$ ,  $L$  は CQM のパラメータであり、本研究では精度パラメータ  $\epsilon$  を用いて  $\mathcal{R}^L = \sqrt{\epsilon}$ ,  $L = N$  と設定した。このパラメータの選択方法の場合、式 (11) で表される離散フーリエ変換は高速フーリエ変換 (FFT) を用いて  $\mathcal{O}(L \log L)$  のオーダーで計算でき、式 (10) の近似による相対誤差は  $\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon})$  となる<sup>(2)</sup>。また、 $\Upsilon(\zeta_l)/\Delta t$  の固有値  $\lambda_\beta^l$  は、3 段以上の IRK 法を用いる場合、丸め誤差の影響を回避するために反復法によって求めることが望ましい。 $\Upsilon(\zeta_l)/\Delta t$  は複素非対称行列であるため、本研究では QR 法によって  $\lambda_\beta^l$  を求めた。

## 3. 時間領域境界微積分方程式

Fig. 1 のように、流体領域  $D^f$ , 弾性体領域  $D^s$  が界面  $S$  によって隔てられていると考える。また、本研究では、入射波  $\mathbf{u}^{\text{in}}$  は  $D^s$  に存在すると仮定する。 $\mathbf{s}$  は接線方向ベクトルであり、法線方向ベクトル  $\mathbf{n}^f$ ,  $\mathbf{n}^s$  はそれぞれの領域に対して外向きに定義している。物体力を無視すると、 $D^f$  中の圧力  $p$ ,  $D^s$  中の変位  $\mathbf{u}$  は次の支配方程式をそれぞれ満足する。

$$c_f^2 \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) = \ddot{p}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in D^f \quad (12)$$

$$c_T^2 \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (c_L^2 - c_T^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in D^s \quad (13)$$

ここで、 $c_f$  は  $D^f$  中を伝搬する波動の速度、 $c_L$ ,  $c_T$  は  $D^s$  中の P 波、S 波の速度を表している。また、 $(\cdot)$  は時間  $t$  に関する微分である。界面  $S$  における境界条件は法線方向の変位、及び応力の連続条件、接線応力ゼロの条件により、次のように与えられる。

$$-\rho_f \mathbf{n}^f(\mathbf{x}) \cdot \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n}^f(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t) \left( \equiv q(\mathbf{x}, t) \right), \quad (14)$$

$$\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \left( \equiv \eta(\mathbf{x}, t) \right) = -p(\mathbf{x}, t), \quad (15)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S \quad (16)$$

ここで、 $\rho_f$  は流体の密度、 $\mathbf{t}$  は表面力である。また、 $q$  は圧力勾配の法線方向成分、 $\eta$  は表面力の法線方向成分として定義している。

一方、初期条件として次の静止過去の条件を仮定する。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}, 0), \quad \mathbf{x} \in D^s \quad (17)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in S \quad (18)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = \dot{p}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in D^f, S \quad (19)$$

式(17)-(19)を考慮し、支配方程式(12),(13)から $D^f, D^s$ に対する積分方程式を導出し、界面 $S$ に対して極限操作を行うことによって、境界積分方程式を導出することができる。導出後、界面における境界条件式(14)-(16)を代入すれば、次の境界微積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} -C(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \text{p.v.} \int_S H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \eta(\mathbf{y}, \tau) dS_y d\tau \\ -\rho_f \int_0^t \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \mathbf{n}^f(\mathbf{y}) \cdot \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \tau) dS_y d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_S \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \cdot \mathbf{n}^s(\mathbf{y}) \eta(\mathbf{y}, \tau) dS_y d\tau \\ - \int_0^t \text{p.v.} \int_S \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau) dS_y d\tau + \mathbf{u}^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $C(\mathbf{x})$ 、 $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  は $\mathbf{x}$ における境界形状に依存する自由項<sup>(16)</sup>であり、p.v. は積分をコーシーの主値の意味で評価することを表している。また、 $G, H$  は3次元音響波動問題に対する基本解、及び二重層核であり、 $\mathbf{U}, \mathbf{T}$  は3次元弾性波動問題に対する基本解、二重層核である。式(20),(21)を離散化し、それらを連立することで $S$ 上の未知量を求めることができるが、式(20)右辺第二項に変位の時間に関する二階微分が存在するため、何らかの処理が必要となる。

本研究では、変位の二階微分項をCQMの定式化を用いて処理する。次の畳込み積分の性質

$$\frac{d}{dt} (k * g)(t) = (\dot{k} * g)(t) + k(0)g(t) \quad (22)$$

及び式(18)を用いると、式(20)右辺第二項は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} -\rho_f \int_0^t \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \mathbf{n}^f(\mathbf{y}) \cdot \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{y}, \tau) dS_y d\tau \\ = -\rho_f \int_0^t \int_S \ddot{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \mathbf{n}^f(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}, \tau) dS_y d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

以上により、変位の時間に関する二階微分を式(20)から取り除くことができた。以下では、IRK法を用いたCQMによる離散化と共に、時間微分を含む基本解 $G$ の計算手法を示す。

#### 4. 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM による離散化

式(23)を考慮し、境界微積分方程式(20),(21)を離散化する。界面 $S$ を $M$ 個の一定要素で離散近似し、時間に関する畳込み積分をIRK法を用いたCQMで離散化すれば、第 $n$ ステッ

プ、第 $i$ サブステップにおける境界積分方程式は、それぞれ次の表現となる。

$$\frac{1}{2} \eta_{\gamma}^{i;n} = \sum_{k=0}^n \sum_{\alpha=1}^M \sum_{j=1}^m \left[ \rho_f \tilde{G}_{\gamma\alpha}^{ij;n-k} \mathbf{n}_{\alpha}^f \cdot \mathbf{u}_{\alpha}^{j;k} - \mathcal{H}_{\gamma\alpha}^{ij;n-k} \eta_{\alpha}^{j;k} \right] \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\gamma}^{i;n} &= \mathbf{u}_{\gamma}^{\text{in};i;n} \\ &+ \sum_{k=0}^n \sum_{\alpha=1}^M \sum_{j=1}^m \left[ \mathcal{U}_{\gamma\alpha}^{ij;n-k} \cdot \mathbf{n}_{\alpha}^s \eta_{\alpha}^{j;k} - \mathcal{T}_{\gamma\alpha}^{ij;n-k} \cdot \mathbf{u}_{\alpha}^{j;k} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

( $i = 1, \dots, m$ ), ( $n = 0, \dots, N - 1$ )

ここで、下付き添え字の $\alpha, \gamma$ は要素番号を表している。また、離散化された境界値、入射波は次のように表される。

$$\phi_{\alpha}^{i;n} = \phi(\mathbf{x}_{\alpha}, (n + c_i)\Delta t), \quad (\phi = \mathbf{u}^{\text{in}}, \mathbf{u}, \text{ or } \eta) \quad (26)$$

ただし、 $\mathbf{x}_{\alpha}$  は $\alpha$ 番目の要素の重心である。式(24),(25)中の $\tilde{G}_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$ 、 $\mathcal{H}_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$ 、及び $\mathcal{U}_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$ 、 $\mathcal{T}_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa}$  はそれぞれ流体、弾性体領域における基本解、二重層核に対応する影響関数であり、次のように表される。

$$\tilde{G}_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa} = \mathcal{F}_l^{\kappa} \left[ \sum_{\beta=1}^m (\lambda_{\beta}^l)^2 \{ \mathbf{E}_{\beta}(\zeta_l) \}_{ij} \int_{S_{\alpha}} \hat{G}(\mathbf{x}_{\gamma}, \mathbf{y}, \lambda_{\beta}^l) dS_y \right] \quad (27)$$

$$\mathcal{H}_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa} = \mathcal{F}_l^{\kappa} \left[ \sum_{\beta=1}^m \{ \mathbf{E}_{\beta}(\zeta_l) \}_{ij} \text{p.v.} \int_{S_{\alpha}} \hat{H}(\mathbf{x}_{\gamma}, \mathbf{y}, \lambda_{\beta}^l) dS_y \right] \quad (28)$$

$$\mathcal{U}_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa} = \mathcal{F}_l^{\kappa} \left[ \sum_{\beta=1}^m \{ \mathbf{E}_{\beta}(\zeta_l) \}_{ij} \int_{S_{\alpha}} \hat{U}(\mathbf{x}_{\gamma}, \mathbf{y}, \lambda_{\beta}^l) dS_y \right] \quad (29)$$

$$\mathcal{T}_{\gamma\alpha}^{ij;\kappa} = \mathcal{F}_l^{\kappa} \left[ \sum_{\beta=1}^m \{ \mathbf{E}_{\beta}(\zeta_l) \}_{ij} \text{p.v.} \int_{S_{\alpha}} \hat{T}(\mathbf{x}_{\gamma}, \mathbf{y}, \lambda_{\beta}^l) dS_y \right] \quad (30)$$

ここで、 $\hat{(\cdot)}$  はラプラス変換された関数であることを表しており、 $S_{\alpha}$  は $\alpha$ 番目の要素領域である。CQ-BEMではラプラス変換領域の積分核を用いるため、時間に関する微分項を含む影響関数は、ラプラス変換の性質

$$\mathcal{L} \left[ \dot{k}(t) \right] = s \hat{k}(s) \quad (31)$$

を考慮することによって、容易に計算できる。ここで、 $\mathcal{L}$  はラプラス変換を意味している。そのため、式(27)は時間に関する二階微分の影響によって、 $(\lambda_{\beta}^l)^2$  を掛けてから離散フーリエ変換を行う形式となっている。

以上により、式(24),(25)を連立し、ゼロステップ目から順に解析を行うことで、境界 $S$ 上の未知量を求めることが可能である。このように、本定式化では、式(27)に含まれる $(\lambda_{\beta}^l)^2$  以外に特別な計算を行うことなく、容易に変位の二階微分項を処理できる。

#### 5. 二階微分項を含む畳込み積分に対する CQM の数値誤差

前節までに説明を行った時間に関する二階微分項を含む畳込み積分の、CQMを用いた計算手法の数値誤差に関して、数値実験を用いた検討を行う。ここでは、次の畳込み積分を計算

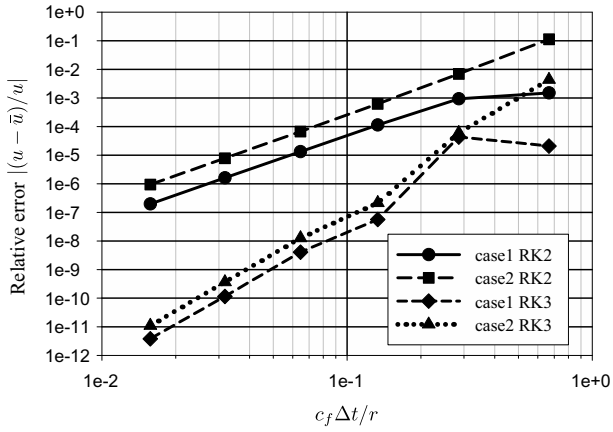


Fig.2 Relative computational errors for convolution integral (32) vs. time increments using IRK-based CQM with RK2 and RK3.

することを考える.

$$u(t) = \int_0^t G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \ddot{\psi}(\tau) d\tau, \quad t > 0 \quad (32)$$

$$\psi(t) = \begin{cases} t^3 e^t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (33)$$

3次元音響波動問題に対する時間領域基本解  $G$  の具体的な表現は次式で与えられる.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c_f}\right) \quad (34)$$

ここで,  $r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$ ,  $\delta(\cdot)$  はディラックのデルタ関数である. そのため, 式 (32) の解析解は次のように与えられる.

$$u(t) = \frac{1}{4\pi r} \ddot{\psi}\left(t - \frac{r}{c_f}\right) \quad (35)$$

式 (32) を以下の2つの方法で解いた場合の解析解 (35) との相対誤差を調べる.

**case 1:** 境界値を微分してから CQM で計算を行う. すなわち, 次式を計算する.

$$\bar{u}(t) = \int_0^t G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) (\tau^3 + 6\tau^2 + 6\tau) e^\tau d\tau \quad (36)$$

**case 2:** 本提案手法と同様に, 二階微分された基本解を用いて CQM で計算を行う. すなわち, 次式を計算する.

$$\bar{u}(t) = \int_0^t \ddot{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - \tau) \tau^3 e^\tau d\tau \quad (37)$$

計算パラメータは,  $c_f t / r = 2$  とし, 時間増分  $c_f \Delta t / r$  を変化させた. また, CQM には2段, 及び3段の Radau II A 法 (RK2, RK3) を用いた. それぞれの計算手法による相対誤差  $|(u - \bar{u})/u|$  を Fig. 2 に示す. Fig. 2 より,  $c_f \Delta t / r$  が大きい場合は一定の挙動を示していない. しかしながら, 相対誤差が  $10^{-4}$  より小さくなる程度,  $c_f \Delta t / r$  が小さい場合においては, case2 の相対誤差が case1 よりも若干大きい状態で安定している. この理由として, 時間に関する微分を含むことによって, 影響関数の変動がより急激になるため数値誤差が大きくなっていることが考えられる. しかしながら,  $c_f \Delta t / r$  を小さくとれば, case2 の手法は, 若干の誤差の増大は伴うものの使用可能である.

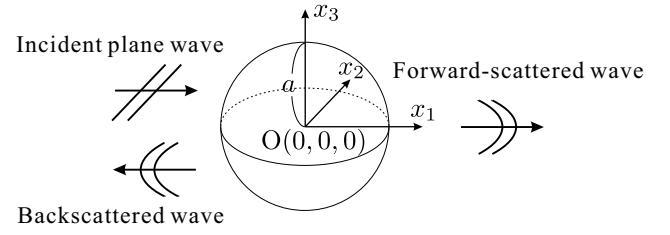


Fig.3 Scattering problem of an incident plane wave by a spherical obstacle in unbounded elastic solid.

## 6. 高速多重極法の適用

本節では, 遅延ポテンシャル計算に対する高速多重極法の適用方法の説明を行うが, CQ-BEM に対する高速多重極法の適用はすでに著者らのグループ等により提案されているため, 本論文では適用箇所の簡潔な説明のみにとどめる. IRK 法を用いた CQ-BEM における高速多重極法の適用方法, 及び計算手順等は文献<sup>(8)</sup>を参照されたい.

式 (24), (25) は, 第  $n$  ステップ目の未知の境界値を含む項を左辺, その他を全て右辺に移項すれば次のような表現となる.

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^M \sum_{j=1}^m \left[ \left( \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{\alpha\gamma} + \mathcal{H}_{\gamma\alpha}^{ij;0} \right) \eta_{\alpha}^{j;n} - \rho_f \tilde{\mathcal{G}}_{\gamma\alpha}^{ij;0} \mathbf{n}_{\alpha}^f \cdot \mathbf{u}_{\alpha}^{j;n} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{j=1}^m \left[ \rho_f \tilde{\mathcal{G}}_{\gamma\alpha}^{ij;n-k} \mathbf{n}_{\alpha}^f \cdot \mathbf{u}_{\alpha}^{j;k} - \mathcal{H}_{\gamma\alpha}^{ij;n-k} \eta_{\alpha}^{j;k} \right] \\ & \sum_{\alpha=1}^M \sum_{j=1}^m \left[ \left( \frac{1}{2} I \delta_{ij} \delta_{\alpha\gamma} + \mathcal{T}_{\gamma\alpha}^{ij;0} \right) \cdot \mathbf{u}_{\alpha}^{j;n} - \mathcal{U}_{\gamma\alpha}^{ij;0} \cdot \mathbf{n}_{\alpha}^s \eta_{\alpha}^{j;n} \right] \\ &= \mathbf{u}_{\gamma}^{\text{in};i;n} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\alpha=1}^M \sum_{j=1}^m \left[ \mathcal{U}_{\gamma\alpha}^{ij;n-k} \cdot \mathbf{n}_{\alpha}^s \eta_{\alpha}^{j;k} - \mathcal{T}_{\gamma\alpha}^{ij;n-k} \cdot \mathbf{u}_{\alpha}^{j;k} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

ここで,  $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタである. 式 (38), (39) 中の下線部の遅延ポテンシャル計算に高速多重極法を適用し高速化する. IRK 法を用いた CQ-BEM の計算量は高速化を施さない状態では  $\mathcal{O}(m^2 N^2 M^2)$  だが<sup>8</sup>, 高速多重極法を適用することによって  $\mathcal{O}(m N^2 M)$  から  $\mathcal{O}(m N^2 M \log M)$  程度となる<sup>(8)</sup>.

## 7. 数値解析例

本論文で提案した音響波動-弾性波動連成問題に対する演算子積分時間領域高速多重極境界要素法 (CQ-FMBEM) の数値解析例を示す. 解析モデルは超音波法による探傷を想定し, Fig. 3 に示すような半径  $a$  の球形の散乱体による平面波の散乱問題とする. 散乱体が空洞, 母材より軟らかい弾性体インクルージョン, 及び流体インクルージョンの場合について解析を行う. 一般的に, 超音波法における欠陥から受信点までの距離は, 欠陥長や超音波の波長と比較して十分に長い場合が多い. そこで, それぞれの散乱体の場合に対する遠方近似された散乱波形<sup>(16,17)</sup>の比較を行う.

### 7.1. 散乱波の遠方近似

散乱波の遠方近似について簡潔に説明しておく. 散乱体が観測点に対して十分に原点に近く, 観測点が波長に対して十分に原点から遠いと仮定すれば, 遠方散乱波  $\mathbf{u}^{\text{sc};\text{far}}$  は P 波,

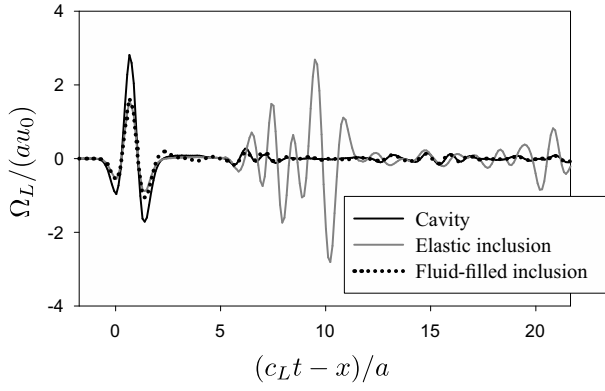


Fig. 4 Time variations of far-field backscattered amplitude  $\Omega_L/(au_0)$  for various scatterers subjected to the incident P wave.

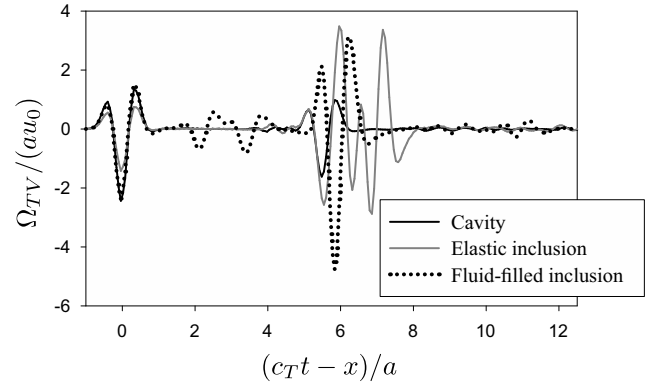


Fig. 6 Time variations of far-field backscattered amplitude  $\Omega_{TV}/(au_0)$  for various scatterers subjected to the incident S wave.

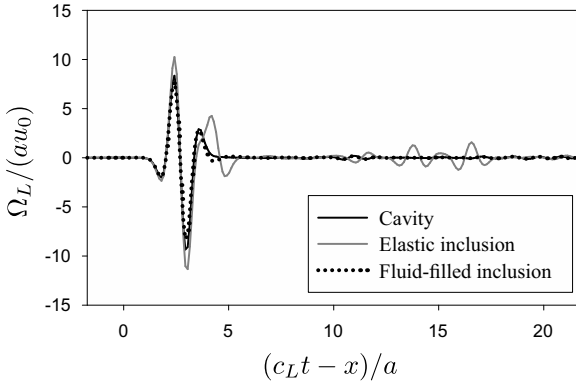


Fig. 5 Time variations of far-field forward-scattered amplitude  $\Omega_L/(au_0)$  for various scatterers subjected to the incident P wave.

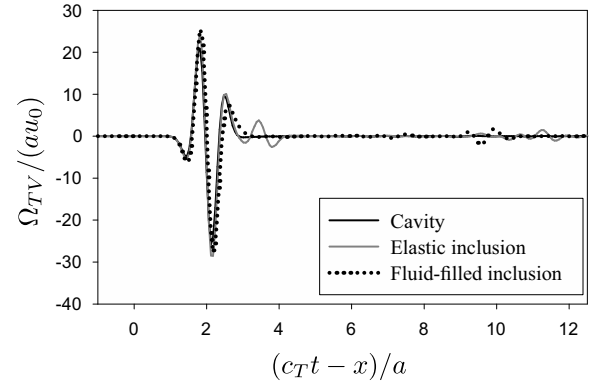


Fig. 7 Time variations of far-field forward-scattered amplitude  $\Omega_{TV}/(au_0)$  for various scatterers subjected to the incident S wave.

SV 波, SH 波のそれぞれの波の成分に対応する遠方散乱振幅  $\Omega_\rho$  ( $\rho = L, TV$ , or  $TH$ ) を用いて次のように近似できる。

$$\mathbf{u}^{\text{sc:far}}(\mathbf{x}, t) \simeq \frac{1}{4\pi x} \left[ \hat{\mathbf{x}}\Omega_L \left( \hat{\mathbf{x}}, t - \frac{x}{c_L} \right) + \hat{\mathbf{v}}\Omega_{TV} \left( \hat{\mathbf{x}}, t - \frac{x}{c_T} \right) + \hat{\mathbf{h}}\Omega_{TH} \left( \hat{\mathbf{x}}, t - \frac{x}{c_T} \right) \right] \quad (40)$$

ここで,  $x = |\mathbf{x}|$ ,  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x$  であり,  $\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{h}}$  はそれぞれ SV 波, SH 波の単位振動方向ベクトルである。  $\Omega_\rho$  の具体的な表現は紙面の都合上省略するため, 例えば文献<sup>(16)</sup>等を参照されたい。

## 7.2. 入射波及び解析結果

入射平面波として, 次式で表される  $x_1$  方向に伝搬するリッカー波<sup>(18)</sup>を用いた。

$$\mathbf{u}^{\text{in}}(x_1, t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} u_0 \mathbf{d}_\varphi (\alpha - 0.5) e^{-\alpha} \quad (41)$$

$$\alpha = \left[ \pi f_p \left( t - t_s - \frac{x_1 + a}{c_\varphi} \right) \right]^2 \quad (42)$$

ここで, 下付き添え字の  $\varphi$  は  $\varphi = L$  or  $T$  であり, それぞれ P 波, S 波を表している。  $\mathbf{d}_\varphi$  は  $\mathbf{d}_L = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{d}_T = (0, 1, 0)$  とした。また,  $f_p$  は中心周波数であり,  $t_s$  はピーク時刻を表しており,  $f_p a / c_T = 1.0$ ,  $t_s = 1/f_p$  とした。時間に関する解析条件は, 3 段の Radau IIA 法を用い, 時間増分を  $c_T \Delta t / a = 0.12$ , 総時間ステップ数を  $N = L = 128$  とし, 式 (27)-(30) に含まれる離散フーリエ変換は全て FFT を用いて評価した。この

とき, 時間増分は文献<sup>(8)</sup>における解析結果, 及び Fig. 2 を考慮し, 用いる入射波の中心周波数に対して十分な精度が得られ, 二階微分された基本解を精度良く計算できる値を選択している。また, 連立一次方程式の求解には GMRES を用い, 特に前処理は施していない。それぞれの領域に対する材料定数は, 母材である弾性体のポアソン比  $\nu$  を  $\nu = 0.25$  とし,  $c_f / c_L = \bar{c}_L / c_L = \bar{c}_T / c_T = 1/\sqrt{3}$ ,  $\rho_f / \rho_s = \bar{\rho}_s / \rho_s = 0.5$  とした。ただし,  $\rho_s$  は弾性体の密度であり,  $(\bar{\quad})$  は軟らかい弾性体インクルージョンに対する定数であることを表している。このときの P 波に対する弾性体インクルージョンと流体インクルージョンの音響インピーダンスは等しい。球形の散乱体の界面はいずれの場合も 9,280 個の三角形一定要素に分割し解析を行った。

Fig. 4, 5 にそれぞれ P 波を入射したときの後方, 及び前方散乱振幅  $\Omega_L/(au_0)$  の時刻歴波形を示す。Fig. 4 より, 後方散乱振幅では,  $(c_L t - x)/a = 0.7$  あたりの第一波の振幅は, 空洞の場合が最も大きく, P 波の音響インピーダンスが同じである弾性体インクルージョン, 及び流体インクルージョンの場合は概ね一致している。また, 先行研究における二次元解析結果<sup>(17)</sup>と同様に位相が反転しており, 弾性体インクルージョンの場合は振幅の大きい第二波が確認できる。一方, 空洞, 及び流体インクルージョンの場合, 比較的大きい振幅の散乱波は第一波の後には発生していない。また, Fig. 5 より, 前方散

Table 1 Computational time in case of P wave incidence (sec).

Cavity	Elastic inclusion	Fluid-filled inclusion
41,959	220,103	114,366

乱振幅は、空洞と流体インクルージョンの場合にはほぼ違いが無いことがわかる。一方、弾性体インクルージョンの場合には  $(c_T t - x)/a = 5.0$  付近、及び後半部分に若干の違いが見られる結果となった。

Fig. 6, 7 は、それぞれ S 波を入射したときの後方、及び前方散乱振幅  $\Omega_{TV}/(au_0)$  の時刻歴波形である。また、このとき、 $\hat{\phi} = (0, 1, 0)$  とした。Fig. 6 より、後方散乱振幅における  $(c_T t - x)/a = 0.0$  あたりの第一波の振幅は、空洞、及び流体インクルージョンの場合にはほぼ同程度となっており、弾性体インクルージョンの場合には比較的小さくなっている。これは、P 波入射の場合と異なり、界面に対して垂直方向に伝搬する S 波は弾性体-流体界面で完全反射されることが影響している。一方、 $(c_T t - x)/a = 6.0$  あたりの第二波においては、それぞれの散乱体によって挙動が大きく異なっている。空洞の場合が最も振幅が小さく、弾性体インクルージョンの場合は波形が大きく乱れている。また、Fig. 7 に示される前方散乱振幅は、空洞と流体インクルージョンの場合がほぼ同様であり、P 波入射の場合と似た挙動を示している。

以上より、前方散乱波には散乱体の種類による大きな違いは見られなかったが、後方散乱波は大きく変化することが確認できた。このような散乱波の違いを利用すれば、散乱体の種類の大まかな推定は可能であると考えられる。

最後に P 波入射の場合のそれぞれの解析に要した計算時間を Table 1 に示す。数値計算は 24 スレッドの OpenMP による並列化を施し、東京工業大学学術国際情報センターのスーパーコンピュータ TSUBAME2.5 を用いて行った。波速を用いたパラメータによる M2L の切り捨て<sup>(8)</sup>を行っていることや、連立一次方程式求解の収束性の違いから、計算時間は必要な影響関数の数にのみ依存するわけではないことがわかる。なお、S 波入射の場合もそれぞれ同程度の計算時間を要した。

## 8. おわりに

本論文では、音響波動-弾性波動問題に対する CQ-FMBEM の定式化を示した。本定式化では、境界条件に含まれる変位の時間に関する二階微分項を容易に取り扱うことができ、その処理手法に伴う数値誤差の増大は、十分小さい時間増分を用いる場合、小さく抑えられることを数値実験によって示した。また、数値解析例として、空洞、弾性体インクルージョン、及び流体インクルージョンによる平面波の散乱問題の解析を行い、遠方における散乱波形の比較を行った。その結果、入射波、及び散乱体の種類によって散乱波形が大きく異なることを示した。

## 参考文献

(1) 福井卓雄：境界要素法の研究-高速・高精度計算法の開発と応用-, (1988), 京都大学学位論文。

(2) C. Lubich : Convolution quadrature and discretized operational calculus I,II, *Numer. Math.*, **52** (1988), pp.129–145, 413–425.

(3) M. Schanz, H. Antes, and T. Rübberg: Convolution quadrature boundary element method for quasi-static visco- and poroelastic continua, *Comput. Struct.*, **83** (2005), pp.673–684.

(4) T. Saitoh, S. Hirose, and T. Fukui: Convolution quadrature boundary element method and acceleration by fast multipole method in 2-D viscoelastic wave propagation, *Theor. Appl. Mech. Japan*, **57** (2009), pp.385–393.

(5) T. Saitoh, F. Chikazawa, and S. Hirose: Convolution quadrature time-domain boundary element method for 2-D fluid-saturated porous Media, *Appl. Math. Modell.*, **38** (2014), pp.3724–3740.

(6) C. Lubich and A. Ostermann: Runge-Kutta methods for parabolic equations and convolution quadrature, *Math. Comp.*, **60** (1993), pp.105–131

(7) L. Banjai, M. Messner, and M. Schanz: Runge-Kutta convolution quadrature for the boundary element method, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **245–246** (2012), pp.90–101.

(8) 丸山泰蔵, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: 3次元スカラー波動問題に対する陰的 Runge-Kutta 法を用いた演算子積分時間領域高速多重境界要素法, 土木学会論文集 A2 (応用力学), **69** (2013), pp.I.175–I.185.

(9) V. Rokhlin: Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.*, **60** (1985), pp.187–207.

(10) N. Nishimura: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, *Appl. Mech. Rev.*, **55** (2002), pp.299–324.

(11) M. Bebendorf: Approximation of boundary element matrices, *Numer. Math.*, **86** (2000), pp.565–589.

(12) M. Messner and M. Schanz: An accelerated symmetric time-domain boundary element formulation for elasticity, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **34** (2010), pp.944–955.

(13) 吉川仁, 松浦亮介, 西村直志 : Lubich の CQM を用いた時間領域境界積分方程式法の ACA による高速化について, 土木学会論文集 A2 (応用力学), **69** (2013), pp.I.187–I.193.

(14) 伊海田明宏, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一 : ACA を用いた演算子積分時間領域境界要素法の効率化, 計算数理工学論文集 (JASCOME), **13** (2013), pp.127–132.

(15) E. Hairer and G. Wanner 著, 三井斌友監訳 : 常微分方程式の数値解法 II, (2002), Springer, Berlin.

(16) 小林昭一編著 : 波動解析と境界要素法, (2000), 京都大学学術出版会.

(17) 小田島淳, 中畑和之, 北原道弘 : 位相の反転・非反転現象に着目した欠陥による後方散乱波形解析, 境界要素法論文集 (JASCOME), **18** (2001), pp.23–28.

(18) N. Ricker: The computation of output disturbances from amplifiers for true wavelet inputs, *Geophysics*, **10** (1945), pp.207–220.