

バラスト道床沈下解析のための 拡張下負荷面モデルに基づく 繰り返し弾塑性・時間域均質化有限要素解析法

Cyclic elastoplastic FEM with time-domain homogenization and extended subloading surface elastoplastic model
for ballast settlement analysis

紅露一寛¹⁾, 大窪和輝²⁾, 阿部和久³⁾

Kazuhiro KORO, Kazuki OHKUBO and Kazuhisa ABE

- 1) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp)
- 2) 新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)
- 3) 新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp)

The cyclic elastoplastic FEM with the time-domain homogenization and the extended subloading surface model is developed for the railway ballast settlement analysis. The formulation of the present method is verified by the numerical tests for several boundary value problems with cyclic loading. The improved scheme for the time-integration on the macro-chronological response enhances the stability of the macro-chronological analysis.

Key Words: time-domain homogenization, extended subloading surface model, FEM, cyclic loading

1. はじめに

鉄道において、まくらぎの周囲と下部に砕石を敷き詰めることで施工されるバラスト道床は、列車走行時における路盤への作用荷重の分散と衝撃力の緩和を容易かつ安価に実現できるため、国内外で広く用いられている。しかし、列車の繰り返し走行によって、バラスト材の粒子配置の不可逆的な変化が生じ、結果としてバラスト道床の沈下現象として観測されることとなる。

バラスト道床の沈下量の定量予測では、これまで車両からの作用荷重とその通過回数から沈下変位を直接求める経験式で行なわれることが多い。しかし、経験式は軌道設計時に沈下変位を容易に評価できる利点を有するものの、バラスト道床への荷重の繰り返し作用時における荷重の支持機構やその変化など、道床沈下発生・進展時の道床内部の力学特性の考察が不可能である欠点を有している。そのため、繰り返し荷重作用時のバラスト砕石の運動を個別要素法 (DEM) や不連続変形法 (DDA) で解析し、荷重作用の繰り返し回数の各段階におけるバラスト粒子集合体の運動メカニズムを解明することで、バラスト道床としての不可逆的な変位・変形の発生・進展機構を調べる研究がなされている^(1, 2)。しかし、粒

子集合体を忠実にモデル化する不連続変形法では、多数回の荷重繰り返し条件下の解析が困難であり、粒子形状や配置の違いによる解析結果の再現性にも十分な検証が必要である。

そのため、バラスト道床の不可逆的な繰り返し変形挙動を弾塑性連続体でモデル化し、有限要素法 (FEM) で離散化し解析を行なう方法の開発が試みられてきた。これまで、回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデル⁽³⁾を用いたもの⁽⁴⁾や、載荷・除荷サイクル単位での弾塑性状態の変化を直接モデル化する cyclic densification モデルを用いた解析法⁽⁵⁾に関する研究成果が報告されている。特に、拡張下負荷面モデルは、繰り返し応力作用時の応力・ひずみ関係や荷重・変位関係を比較的良好に再現できるものの、応力履歴をきれなく追跡する必要があり、多数回の繰り返し荷重作用時の応答を評価する場合、計算負荷の大きさが懸念される。

一方、本研究で用いる時間域均質化法⁽⁶⁾は、繰り返し荷重作用時の計算負荷を軽減する目的で、荷重を制御する時間変数が、1回の載荷・除荷に対応するマイクロ時間スケールと、載荷・除荷サイクル数に相当するマクロ時間スケールの2つのスケールを有するものと仮定した上で、両者の時間スケール比の極限を考えることで、マクロ時間・マイクロ時間スケールに相当する場の問題を定式化して解く方法である。こ

れまで、疲労損傷解析⁽⁶⁾や弾塑性解析^(7,8)での適用例が示されている。なお、著者らは、回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデル⁽³⁾を用いて弾塑性連続体の力学挙動をモデル化し、繰り返し荷重作用下での弾塑性応答を数値解析で評価する場合を対象に、時間域均質化法を導入するための定式化とその解析アルゴリズムを示し、簡単な数値解析例によりその妥当性と検証した⁽⁹⁾。しかし、文献⁽⁹⁾では、要素試験の一種である繰り返し三軸試験の応力解析に時間域均質化法を適用したに過ぎず、弾塑性有限要素解析への実装方法や解析精度保持のための具体的な計算手法などは示されていない。

そこで本研究では、繰り返し荷重作用下での弾塑性挙動を回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデルにより表現した有限要素解析を対象に、時間域均質化法の実装のための定式化と解析アルゴリズムを示す。また、マクロ時間応答解析における時間積分アルゴリズムを改良し、マクロ時間応答解析の安定性の改善を試みる。提案手法の妥当性については、数値実験結果を通して検証する。

2. 構成則・硬化則・発展則における時間域均質化法の適用

本研究では、バラスト道床の弾塑性挙動をモデル化するために、回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデル⁽³⁾を用いる。微小変形が成り立つものとし、構成則は歪弾性を仮定して応力速度 $\dot{\sigma}_{ij}$ と弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p$ ($\dot{\epsilon}_{kl}$: 全ひずみ速度)を用いて次式で与える。

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= E_{ijkl}(\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) \\ E_{ijkl} &= (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned} \quad (1)$$

なお、 $p = -\sigma_{kk}/3$, $K = (p + p_{num})/\gamma$, $G = 3(1-2\nu)K/(2(1+\nu))$ とし、 ν は Poisson 比、 γ は接線弾性係数の大きさを定める無次元の材料定数、 p_{num} は解析時に初期剛性を与えるための定数、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

一方、塑性挙動は、材料強度の拘束圧依存性と繰り返し荷重時のひずみ硬化挙動を考慮し、下負荷面の概念を用いて、等方硬化と回転硬化とを考慮した数理モデルで表現する。 H , β をそれぞれ等方硬化変数、回転硬化変数とし、応力の許容値を規定する曲面 $f(\sigma, \beta) = F(H)$ を正規降伏面、現応力点を通り正規降伏面と相似な曲面を下負荷面 $f(\bar{\sigma}, \beta) = RF(H)$ ($\bar{\sigma} = \sigma - (1-R)s$: 下負荷面応力、 s : 相似中心応力、 R : 正規降伏面と下負荷面との相似比) とそれぞれ定義する。

塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ は、下負荷面についての関連流動則により次式で与えられるものとする。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \bar{N}_{ij}, \quad \bar{N}_{ij} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial f(\bar{\sigma}, \beta)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \psi = \left\| \frac{\partial f(\bar{\sigma}, \beta)}{\partial \sigma} \right\| \quad (2)$$

なお、塑性乗数 $\dot{\lambda}$ は、 $f(\bar{\sigma}, \beta) = 0$ より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \frac{\bar{N}_{ij} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{\Lambda + \bar{N}_{pq} E_{pqrs} \bar{N}_{rs}}, \quad (\dot{\lambda} > 0) \\ \Lambda &= \bar{N}_{pq} ((1-R)z_{pq} - U_{spq}) \\ &\quad + \bar{N}_{pq} \bar{\sigma}_{pq} \left\{ \frac{F'}{F} h - \frac{1}{RF} \frac{\partial f(\bar{\sigma}, \beta)}{\partial \beta_{pq}} b_{pq} + \frac{U}{R} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、 $F = F(H) = F_0 \exp(-H/(\rho - \gamma))$ とし、降伏関数 f は、 $f(\bar{\sigma}, \beta) = \bar{p} \cdot (1 + \bar{\chi}^2)$ で与える。 \bar{p} , $\bar{\chi}$ は次式で定義する。

$$\begin{aligned} \bar{p} &= -\frac{1}{3} \bar{\sigma}_{mm}, \quad \bar{\chi} = \frac{\sqrt{\bar{\eta}_{kl} \bar{\eta}_{kl}}}{\bar{m}}, \quad \bar{\eta}_{ij} = \frac{\bar{\sigma}_{ij}^*}{\bar{p}} - \beta_{ij}, \\ \bar{m} &= \frac{14\sqrt{6} \sin \phi}{(3 - \sin \phi)(8 - \sin 3\bar{\theta}_\sigma)}, \quad \sin 3\bar{\theta}_\sigma = \frac{-\sqrt{6} \text{tr}(\bar{\eta}^3)}{(\bar{\eta}_{kl} \bar{\eta}_{kl})^{3/2}} \end{aligned} \quad (4)$$

硬化(硬軟化)変数 H , β , 相似中心応力 s , 相似比 R の発展則は、次式で表わすことができる。

$$\dot{H} = \dot{\lambda} h, \quad \dot{\beta}_{ij} = \dot{\lambda} b_{ij}, \quad \dot{s}_{ij} = \dot{\lambda} z_{ij}, \quad \dot{R} = \dot{\lambda} U \quad (5)$$

なお、 h , b_{ij} , z_{ij} , U については、地盤材料の力学挙動を考慮して文献⁽³⁾で提案されたものを用いることとし、その具体的な定義は文献⁽⁹⁾に示す通りである。

塑性負荷/除荷状態の判定は、次式の規準に基づき行う。

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^p &\neq 0, \quad (\bar{N}_{ij} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} > 0) \\ \dot{\epsilon}^p &= 0, \quad (\bar{N}_{ij} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \leq 0) \end{aligned} \quad (6)$$

次に、上述の構成方程式の各式に対し、時間域均質化法^(6,7,8)を適用し、載荷・除荷1サイクルの弾塑性応答を再現するための時間パラメータ(ミクロ時間変数) τ と、載荷・除荷の繰り返し数に相当する時間パラメータ(マクロ時間変数) t の各々に関する構成方程式を導出する。なお、本節で示す構成方程式の時間スケール分離の定式化は、文献⁽⁹⁾で示す通りであることを申し添えておく。

まず、ミクロ時間変数 τ とマクロ時間変数 t を定義し、これらの変数がスケール比 ζ により $\tau = t/\zeta$ ($\zeta \ll 1$)で関連付けられるものとする。このとき、構成方程式の各物理量が2つの時間変数 t, τ に依存するツースケール性を有するものとして、式(1)-(5)を構成する物理量(まとめて ϕ で表わす)を ζ に関して漸近展開し、各物理量の0次の成分 $\phi^{(0)}$ を $\phi^{(0)}(x, t, \tau) = \check{\phi}(x, t) + \tilde{\phi}(x, t, \tau)$ のように τ の依存成分と非依存成分との一次結合で表わす。その結果得られた式を整理し、以下では $O(\zeta^{-1})$, $O(\zeta^0)$ の諸式について考える。

$O(\zeta^{-1})$ の方程式からは、ミクロ時間スケールでの構成方程式が次式のように得られる。

$$\tilde{\sigma}_{ij,\tau} = E_{ijkl}^{(0)}(\tilde{\epsilon}_{kl,\tau} - \tilde{\epsilon}_{kl,\tau}^p), \quad \tilde{\epsilon}_{ij,\tau}^p = \tilde{\lambda}_{,\tau} \bar{N}_{ij}^{(0)}, \quad (7)$$

$$\tilde{H}_{,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau} h^{(0)}, \quad \tilde{\beta}_{ij,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau} b_{ij}^{(0)}, \quad \tilde{s}_{ij,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau} z_{ij}^{(0)}, \quad (8)$$

$$\tilde{R}_{,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau} U^{(0)}, \quad (9)$$

$$\tilde{\lambda}_{,\tau} = \frac{\bar{N}_{ij}^{(0)} E_{ijkl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,\tau}}{\Lambda^{(0)} + \bar{N}_{ij}^{(0)} E_{ijkl}^{(0)} \bar{N}_{kl}^{(0)}} = \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,\tau} \quad (10)$$

一方、 $O(\zeta^0)$ の方程式については、まずその各式のミクロ時間平均 $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \cdot d\tau$ をとる。次に、式に含まれる $\tilde{\epsilon}_{kl}$, $\tilde{\epsilon}_{kl}^p$ のマクロ時間変数 t に関する時間微分を含む項のミクロ時間平均について考える。 $\tilde{\epsilon}_{kl}$, $\tilde{\epsilon}_{kl}^p$ は閉区間 $[0, \tau_0]$ で連続であり、開区間 $(0, \tau_0)$ 上に τ_1, τ_2 が存在するならば、平均値の定理から、 $\langle (\tau - \tau_1) \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle = 0$, $\langle (\tau - \tau_2) \tilde{\epsilon}_{kl,t}^p \rangle = 0$ となるような場合が必ずある。その結果、 τ の積分と t の微分の順序とを入れ替えることができ、次式のようなマクロ時間スケ

ールにおける構成方程式を得る．

$$\check{\sigma}_{ij,t} + \langle \check{\sigma}_{ij} \rangle_t = \langle E_{ijkl}^{(0)} \rangle (\check{\varepsilon}_{kl,t} - \check{\varepsilon}_{kl,t}^p) + E_{ijkl}^{(0)}(\tau_1) \langle \check{\varepsilon}_{kl} \rangle_t - E_{ijkl}^{(0)}(\tau_2) \langle \check{\varepsilon}_{kl}^p \rangle_t \quad (11)$$

$$\check{\varepsilon}_{ij,t}^p + \langle \check{\varepsilon}_{ij}^p \rangle_t = \langle \bar{N}_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \check{\varepsilon}_{kl,t} + \bar{N}_{ij}^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \check{\varepsilon}_{kl} \rangle_t \quad (12)$$

$$\check{H}_{,t} + \langle \check{H} \rangle_t = \langle h^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \check{\varepsilon}_{kl,t} + h^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \check{\varepsilon}_{kl} \rangle_t \quad (13)$$

$$\check{\beta}_{ij,t} + \langle \check{\beta}_{ij} \rangle_t = \langle b_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \check{\varepsilon}_{kl,t} + b_{ij}^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \check{\varepsilon}_{kl} \rangle_t \quad (14)$$

$$\check{s}_{ij,t} + \langle \check{s}_{ij} \rangle_t = \langle z_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \check{\varepsilon}_{kl,t} + z_{ij}^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \check{\varepsilon}_{kl} \rangle_t \quad (15)$$

$$\check{R}_{,t} + \langle \check{R} \rangle_t = \langle U^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \check{\varepsilon}_{kl,t} + U^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \check{\varepsilon}_{kl} \rangle_t \quad (16)$$

$$\check{\lambda}_{,t} + \langle \check{\lambda} \rangle_t = \langle \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \check{\varepsilon}_{kl,t} + \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \check{\varepsilon}_{kl} \rangle_t \quad (17)$$

なお， $\tau_1 = \langle \tau \check{\varepsilon}_{ij} \rangle / \langle \check{\varepsilon}_{ij} \rangle$ ， $\tau_2 = \langle \tau \check{\varepsilon}_{ij}^p \rangle / \langle \check{\varepsilon}_{ij}^p \rangle$ で与える．

3. 繰り返し弾塑性有限要素解析における時間域均質化法

次に，前節で示したミクロ時間スケール・マクロ時間スケール双方の構成方程式を用いて，2つの時間スケール各々での仮想仕事式を有限要素法で解くための定式化を示す．

まず，準静的つり合い問題を考え，時間域均質化法を導入した際の2つの時間スケールにおける仮想仕事式を導出する． u_i を変位， b_i を物体力， $p_i = \sigma_{ji} n_j$ (n_j : 境界上での単位外向き法線ベクトル) を表面力として，それらの漸近展開の0次項がミクロ時間変数 τ への依存性の有無で次式のような一次結合で表現できるものとする．

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(0)} &= \check{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, t) + \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, t, \tau) + O(\zeta), \\ u_i^{(0)} &= \check{u}_i(\mathbf{x}, t) + \bar{u}_i(\mathbf{x}, t, \tau) + O(\zeta), \\ b_i^{(0)} &= \check{b}_i(\mathbf{x}, t) + \bar{b}_i(\mathbf{x}, t, \tau) + O(\zeta), \end{aligned} \quad (18)$$

このとき，釣り合い式と境界条件は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \check{\sigma}_{ji,j} + \bar{\sigma}_{ji,j} + \check{b}_i + \bar{b}_i &= 0, \quad (\text{in } \Omega) \\ \check{u}_i &= \check{U}_i, \quad \text{and} \quad \bar{u}_i = \bar{U}_i, \quad (\text{on } \Gamma_u) \\ \check{p}_i &= \check{\sigma}_{ji} n_j = \check{P}_i, \quad \text{and} \quad \bar{p}_i = \bar{\sigma}_{ji} n_j = \bar{P}_i, \quad (\text{on } \Gamma_p) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで， Ω は領域， Γ_u ， Γ_p はそれぞれ変位規定・表面力規定部分境界である．また， \check{U}_i ， \check{P}_i ， \bar{U}_i ， \bar{P}_i はそれぞれ \check{u}_i ， \check{p}_i ， \bar{u}_i ， \bar{p}_i の既知量であり， $U_i = \check{U}_i + \bar{U}_i$ ， $P_i = \check{P}_i + \bar{P}_i$ である．また，物体力 \check{b}_i ， \bar{b}_i はいずれも既知とする．

式(19)より，可容なミクロ時間変位を $\check{u}_i + \delta \check{u}_i$ に選ぶと，ミクロ時間スケールにおける仮想仕事式は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \check{\sigma}_{ij} \delta \check{\varepsilon}_{ij} d\Omega &= \int_{\Gamma_p} P_i \delta \check{u}_i d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} (\bar{b}_i + \check{b}_i) \delta \check{u}_i d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{ij} \delta \check{\varepsilon}_{ij} d\Omega, \end{aligned} \quad (20)$$

ここで， $\check{u}_i = \check{U}_i$ (on Γ_u)， $\delta \check{\varepsilon}_{ij} = (\delta \check{u}_{i,j} + \delta \check{u}_{j,i})/2$ である．

一方，マクロ時間スケールでの仮想仕事式は，可容なマクロ時間変位を $\check{u}_i + \delta \check{u}_i$ に選んだ上で， τ についての時間平均を $[0, \tau_0]$ で考えることで，次式のように得ることができる．

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \check{\sigma}_{ij} \delta \check{\varepsilon}_{ij} d\Omega &= \int_{\Gamma_p} (\check{P}_i + \langle \check{P}_i \rangle) \delta \check{u}_i d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} (\check{b}_i + \langle \check{b}_i \rangle) \delta \check{u}_i d\Omega - \int_{\Omega} \langle \check{\sigma}_{ij} \rangle \delta \check{\varepsilon}_{ij} d\Omega, \end{aligned} \quad (21)$$

ただし， $\check{u}_i = \check{U}_i$ (on Γ_u)， $\delta \check{\varepsilon}_{ij} = (\delta \check{u}_{i,j} + \delta \check{u}_{j,i})/2$ である．

なお，式(20)，(21)は，式(7)-(17)に示した構成方程式と合わせて，互いに独立な方程式とはなっておらず，相互の連成関係が存在する．そのため，解析の際には2つの時間スケール応答を与える式(20)，(21)を弱連成条件下で解く解析アルゴリズム⁽⁷⁾を採用する．

(解析アルゴリズム)

- (i) まず，マクロ時間変数 t は1回の載荷・除荷を単位量とするサイクル数 N に，ミクロ時間変数 τ ($0 \leq \tau \leq \tau_0$) は1サイクルの荷重・変位の履歴パラメータにそれぞれ定める．その結果，各種物理量のマクロ時間応答を評価することで，所定の載荷・除荷サイクル終了時における各種物理量を直接評価できる．
- (ii) バラスト道床の沈下においては，一定振幅の繰り返し荷重が作用した場合，繰り返し初期で急激に不可逆変形・残留変位が発生・進展し，その後は不可逆変形・残留変位は繰り返し数 N に対して概ね線形で累積する⁽¹⁰⁾．その点を留意して，最初の $t = N = N_0$ サイクルまでは(応力履歴を追跡する)通常の(従来の)弾塑性解析を実行する．ただし， N_0 サイクル以降に時間域均質化法に基づく解析に移行するため，この解析と並行して，時間域均質化法解析に必要な各種時間平均，および2節で定義した τ_1 ， τ_2 を計算しておく．
- (iii) N_0 サイクル以降の応答は，時間域均質化・有限要素解析法により求める． $k = 1, 2, \dots, M$ として， $t = N = N_0 + k\Delta N$ サイクル (ΔN : 解析サイクル幅)でのマクロ時間応答を評価するため， $N = N_0 + 1 + (k-1)\Delta N$ サイクルでのミクロ時間応答を，式(20)の仮想仕事式を有限要素法で離散化して求める．また，マクロ時間解析に必要な τ_1 ， τ_2 およびミクロ時間応答の時間平均も計算しておく．なお， τ に関する時間積分は陽解法で処理し，構成則は式(7)-(10)から次式で与える．

$$\begin{aligned} \check{\sigma}_{ij,\tau} &= C_{ijkl}^{(0)} \check{\varepsilon}_{kl,\tau}, \\ C_{ijkl}^{(0)} &= E_{ijkl}^{(0)} - \frac{E_{ijrs}^{(0)} \bar{N}_{rs}^{(0)} \bar{N}_{pq}^{(0)} E_{pqkl}^{(0)}}{\Lambda^{(0)} + \bar{N}_{\alpha\beta}^{(0)} E_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \bar{N}_{\gamma\delta}^{(0)}} \end{aligned} \quad (22)$$

- (iv) (ii) で求めた諸量を用いて， $N = N_0 + k\Delta N$ サイクルでのマクロ時間応答を，仮想仕事式(21)を有限要素法で離散化して解く．計算の際に必要なミクロ時間平均のマクロ時間変化率 $\langle \cdot \rangle_t$ は， ϕ を評価対象の物理量として次式の差分近似で与える．

$$\cdot k = 1 \text{ のとき} \quad \langle \check{\phi} \rangle_t \approx \langle \check{\phi} \rangle_{N_0+1} - \langle \check{\phi} \rangle_{N_0} \quad (23)$$

$\cdot k = 2, 3, 4, \dots$ のとき

$$\langle \check{\phi} \rangle_t \approx \frac{\langle \check{\phi} \rangle_{N_0+1+(k-1)\Delta N} - \langle \check{\phi} \rangle_{N_0+1+(k-2)\Delta N}}{\Delta N} \quad (24)$$

なお，式(23)，(24)の下添字は，時間平均を評価するサイクル数である．陽解法により時間積分を処理することとし，構成則は式(11)-(17)から次式で与える．

$$\check{\sigma}_{ij,t} + \langle \check{\sigma}_{ij} \rangle_t = \langle C_{ijkl}^{(0)} \rangle \check{\varepsilon}_{kl,t} + C_{ijkl}^{(0)}(\tau_1) \langle \check{\varepsilon}_{kl} \rangle_t \quad (25)$$

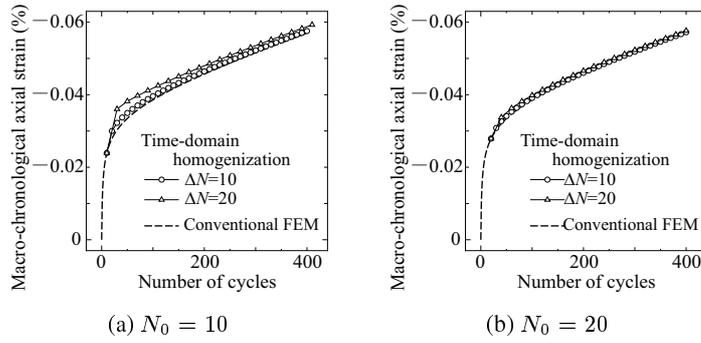


Fig. 1 Relation between macro-chronological strain $\tilde{\epsilon}_{33}$ and the number of cycles N .

Table 1 Material parameters for Ex.1.

$\nu = 0.4, \gamma = 4 \times 10^{-5}, \phi = 60^\circ, \rho = 0.001, \mu = 5,$ $\phi_d = 10^\circ, b_r = 90, \phi_b = 65^\circ, u_1 = 6, m_1 = 3, c_1 = 20,$ $c_2 = 5, c_3 = 2, F_0 = 200(\text{kPa}), p_{num} = 0.1(\text{kPa})$
--

- (v) $k \leftarrow k + 1$ として上記 (iii) に戻り, (iii), (iv) の過程を M 回繰り返して実行することで, $N = N_0 + M \Delta N$ サイクルでの応答を評価することができる.

上記アルゴリズムの適用に当たり, 荷重振幅が解析の途中で変化した場合, その時点で上記 (i)-(v) の解析を再度実行すればよい. なお, 上記アルゴリズムのうち, (iv) に示したマイクロ時間応答の macroscale 時間変化率の評価方法は, 5 節において改良を試みる. しかし, 実用上必要となる, 従来法による解析から時間域均質化解析への移行サイクルの自動設定については, 解析結果に基づき a posteriori に決定することは原理的には可能であると思われるものの, 現時点では未解決の課題であることを申し述べておく.

4. 有限要素法定式化の妥当性の検証

前節で示した有限要素・時間域均質化法の定式化の妥当性を検証する目的で, 数値実験を行った.

まず, 文献⁽⁹⁾で示した応力点解析の有限要素解析を試みる(以下, Ex.1 とする). 応力条件はパラスタ材の繰り返し三軸試験に関する石川らの報告⁽¹⁰⁾を参考に, 拘束圧を $-19.6(\text{kPa})$ で一定として, 軸差応力振幅を $-78.4(\text{kPa})$ の片振りで変動させるように定めた. 一方, FEM モデルは一辺が 1 の立方体を定ひずみ要素で分割して構成し, $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ の各面は対称面となるように境界条件を設定した. また, 表面力の既知量 \tilde{P}_i, \tilde{P}_i は, それぞれ $\tilde{P}_i = -19.6\delta_{ij}(\text{kPa})$ (on $x_j = 1, i, j = 1, 2, 3$), $\tilde{P}_i = 0$ (on $x_1 = 1, x_2 = 1, i = 1, 2, 3$), $\tilde{P}_1 = \tilde{P}_2 = 0, \tilde{P}_3 = 0 \sim -78.4(\text{kPa})$ (on $x_3 = 1$) に設定した. このように表面力を設定することで, 载荷・除荷 1 サイクル終了時(軸差応力が 0 となる時点)での残留変位や残留ひずみは, macroscale 時間応答 $\tilde{u}_i, \tilde{\epsilon}_{ij}$ により与えられる. 材料パラメータは, 今回は有限要素解析の定式化の妥当性の検討に主眼を置き, パラスタ材の繰り返し変形挙動を再現するような値には設定せず, 繰り返し载荷時における残留ひずみの累積傾向がサイクル数に対して概ね線形に変化する傾向に収斂する値に設定した. 具体的な設定値は Table 1 に示す通りである.

当該の例題 (Ex.1) では, 領域内の応力とひずみは一樣分

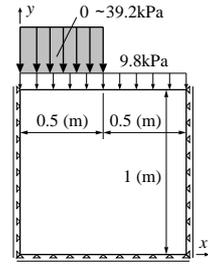


Fig. 2 Problem description of Ex.2.

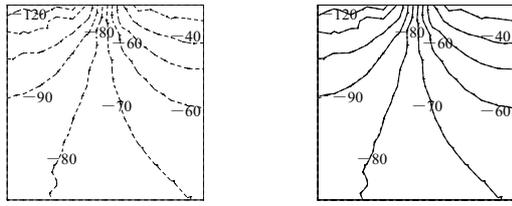
Table 2 Material parameters for Ex.2.

$\nu = 0.4, \gamma = 4 \times 10^{-5}, \phi = 40^\circ, \rho = 0.03, \mu = 3,$ $\phi_d = 20^\circ, b_r = 90, \phi_b = 20^\circ, u_1 = 0.5, m_1 = 2, c_1 = 10,$ $c_2 = 0.2, c_3 = 4, F_0 = 100(\text{kPa}), p_{num} = 0.1(\text{kPa})$

布する問題であることに留意し, 時間域均質化法解析への移行サイクルを $N_0 = 10, 20$ としたときの macroscale 時間ひずみ(軸差応力 0 時点でのひずみ) $\tilde{\epsilon}_{33}$ とサイクル数 N との関係を図 1 に示す. なお, 図中点線は通常の弾塑性解析において, 载荷・除荷 1 サイクル終了時(軸差応力が 0 となった時点)でのひずみ ϵ_{33} を示したものである. 解析結果より, サイクル数に対する macroscale 時間ひずみの変化量が概ね線形になった段階で時間域均質化法解析に移行すれば, 解析サイクル幅 ΔN を大きくとつても大きな誤差は発現せず, 通常の弾塑性解析と概ね同程度の精度の解が得られることがわかる.

次に, 解析対象領域内で応力やひずみが一樣でない例題として, Fig.2 の平面ひずみ問題(以下, Ex.2 とする)の繰り返し弾塑性解析を行なった. 当該問題では, 解析領域上面に $9.8(\text{kPa})$ の等分布応力を鉛直下向きに作用させた状態で, さらに鉛直下向きの等分布荷重が領域上面の $0 \leq x \leq 0.5$ の区間に 0 から $39.2(\text{kPa})$ の範囲で繰り返し作用する問題となっている. マイクロ・macroscale 時間応答を各々求める解析における境界条件は, macroscale 時間応答が各繰り返しサイクル終了(開始)時点での応答を与えるように設定した. 解析に用いた材料パラメータの値は, Table 2 に示す通りである. なお, 時間域均質化解析への移行サイクルは $N_0 = 4$ に設定し, サイクル幅は $\Delta N = 1, 2, 3$ に設定した.

まず, $N = 10$ サイクルまで時間域均質化解析を実行したのち, 11 サイクルにおいて繰り返し等分布荷重が最大となった時点での応力テンソルの一次不変量 σ_{mm} と, $\sqrt{J_2}$ (J_2 : 偏差応力の二次不変量)の分布を図 3, Fig.4 にそれぞれ示す. また, $N = 10$ サイクル終了時点での体積ひずみ ϵ_{mm} と, $\sqrt{\epsilon_{ij}^* \epsilon_{ij}^* / 2}$ (ϵ_{ij}^* : 偏差ひずみ)の領域内分布を図 5, Fig.6 にそれぞれ示す. なお, 図中実線は提案手法で得られた結果, 点線は従来法での解析結果をそれぞれ示している. 解析結果より, 応力の不変量, ひずみの不変量ともに, 領域内でその値が変動するような場合においても, 時間域均質化法を適用した有限要素解析結果は, 応力履歴をもれなく追跡する通常の有限要素解析結果と概ね等しい値を示している. よって, 前節で示した境界値問題に対する本解析法の定式化の妥



(a) Conventional FEM

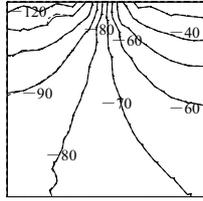
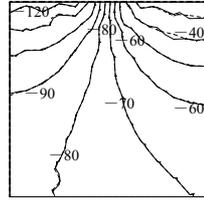
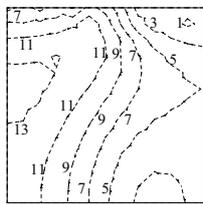
(b) $N_0 = 4, \Delta N = 1$ (c) $N_0 = 4, \Delta N = 2$ (d) $N_0 = 4, \Delta N = 3$

Fig.3 Simulated results of σ_{mm} (kPa) under the maximum loads in the 11th cycle. (solid: homogenization, dotted: conventional FEM)



(a) Conventional FEM

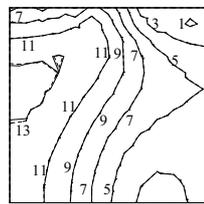
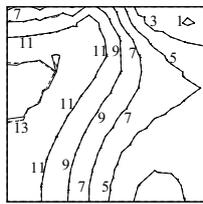
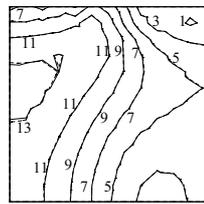
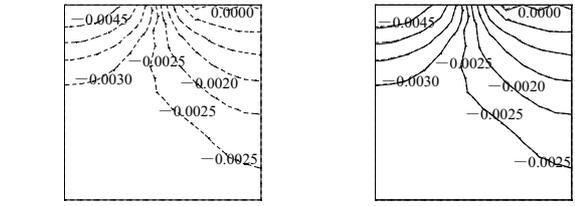
(b) $N_0 = 4, \Delta N = 1$ (c) $N_0 = 4, \Delta N = 2$ (d) $N_0 = 4, \Delta N = 3$

Fig.4 Simulated results of $\sqrt{J_2}$ (kPa) under the maximum loads in the 11th cycle. (solid: homogenization, dotted: conventional FEM)

当性が確認できた。

5. 積分アルゴリズムの改良によるマクロ時間応答解析の安定性の改善

文献⁽⁹⁾および前節で示したように、マクロ時間応答の各種物理量 $\check{\phi}$ の評価精度は、ミクロ時間応答の時間平均のマクロ時間変化率 $\langle \check{\phi} \rangle_t$ の評価、およびそのマクロ時間変数 t (サイクル数 N に相当) についての積分精度によって専ら定まると考えられる。そのため本節では、3節で示した $\langle \check{\phi} \rangle_t$ の評価、およびそのマクロ時間変数 t についての積分方法を一部改良したアルゴリズム (改良アルゴリズム) を示し、マクロ時間応答の解析精度の改善を試みる。なお、数値実験は、前節の Ex.1 と同様の境界条件の下で、材料定数のみを Table 3 に示す値に設定して行なった。以下、本節での解析例を Ex.3 と呼ぶこととする。なお、改良アルゴリズムは以下の通りである。



(a) Conventional FEM

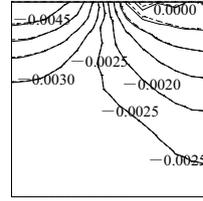
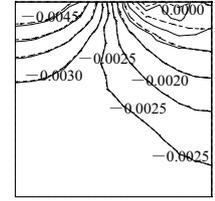
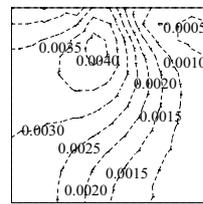
(b) $N_0 = 4, \Delta N = 1$ (c) $N_0 = 4, \Delta N = 2$ (d) $N_0 = 4, \Delta N = 3$

Fig.5 Simulated results of volumetric strain ε_{mm} (%) at the end of the 10th cycle. (solid: homogenization, dotted: conventional FEM)



(a) Conventional FEM

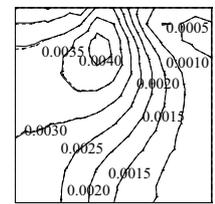
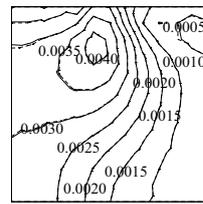
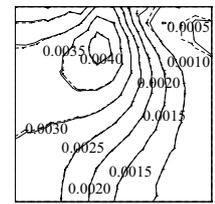
(b) $N_0 = 4, \Delta N = 1$ (c) $N_0 = 4, \Delta N = 2$ (d) $N_0 = 4, \Delta N = 3$

Fig.6 Simulated results of $\sqrt{\varepsilon_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* / 2}$ (%) at the end of the 10th cycle. (solid: homogenization, dotted: conventional FEM)

(改良アルゴリズム)

3節の計算アルゴリズムとは、(i)-(iii)は同じ。

(iv) 式 (23), (24) を用いてミクロ時間平均のマクロ時間変化率 $\langle \check{\phi} \rangle_t$ を差分近似し、式 (21) から $N_0 + k\Delta N$ サイクルでのマクロ時間応答の予測子 $\check{\phi}_{N_0+k\Delta N}^*$ を計算する。

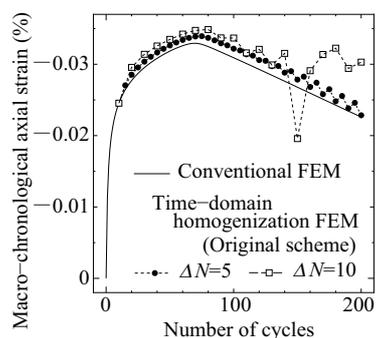
(v) (iv) で評価した予測子をもとに、 $N_0 + k\Delta N + 1$ サイクルでのミクロ時間応答 $\check{\phi}_{N_0+k\Delta N+1}^*$ 、およびそのミクロ時間平均 $\langle \check{\phi}^* \rangle_{N_0+k\Delta N+1}$ を評価する。

(vi) ミクロ時間平均のマクロ時間変化率 $\langle \check{\phi} \rangle_t$ を、 $\langle \check{\phi}^* \rangle_{N_0+k\Delta N+1}$ と予測子計算に用いた $\langle \check{\phi} \rangle_{N_0+(k-1)\Delta N+1}$ から差分近似で与え、式 (21) を解いてマクロ時間応答 $\check{\phi}_{N_0+k\Delta N}$ とする。

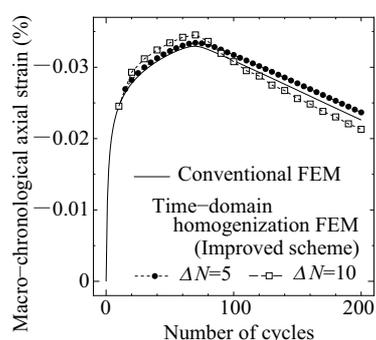
(vii) $k \leftarrow k + 1$ として上記 (iii) に戻り、(iii)-(vi) の過程を M 回繰り返し実行することで、 $N = N_0 + M\Delta N$ サイクルでの応答を評価する。

Table 3 Material parameters for Ex.3.

$\nu = 0.4, \gamma = 4 \times 10^{-5}, \phi = 50^\circ, \rho = 0.01, \mu = 5,$
$\phi_d = 10^\circ, b_r = 90, \phi_b = 60^\circ, u_1 = 6, m_1 = 3, c_1 = 20,$
$c_2 = 3, c_3 = 2, F_0 = 200(\text{kPa}), p_{num} = 0.1(\text{kPa})$



(a) Original scheme



(b) Improved scheme

Fig. 7 Macro-chronological strain $\tilde{\epsilon}_{33}$ calculated using the modified scheme at each cycle N .

上記修正アルゴリズムを用いて得られた、各サイクルでの軸ひずみのマクロ時間応答 $\tilde{\epsilon}_{33}$ を Fig.7 に示す。なお、図中「Original scheme」は3節で示した解析アルゴリズム、「Improved scheme」は本節で示した改良アルゴリズムを意味する。当該の例題における問題設定の場合、3節で示した Original scheme では、サイクル数が多数になるにつれて、マクロ時間解析のステップ幅 ΔN が大きいほど、軸ひずみのマクロ時間成分（残留軸ひずみに相当）の数値振動が顕著になってくる。一方、マクロ時間応答の計算において必要となるミクロ時間平均のマクロ時間変化率 $\langle \dot{\phi} \rangle_t$ を予測子を用いて評価する Improved scheme では、この不自然な数値振動が消失することがわかる。ただし、Improved scheme では、各マクロ時間ステップでの（载荷・除荷経路を追跡する）ミクロ時間応答の計算が2回必要となり、1回で済む Original scheme の2倍の計算量を必要とする。そのため、本節で示した Improved scheme の適用は、解析においてマクロ時間ステップ幅を $\Delta N \geq 3$ に設定可能である場合、通常の弾塑性有限要素解析と比して計算量の面から有利となる。なお、Improved scheme を適用した場合においても、 ΔN を大きく設定すると時間域均質化法解析により得られた近似解は従来の FEM 解析結果との差が増大する傾向を示す。この点の改善は、今後の課題としたい。

6. おわりに

本研究では、繰り返し荷重作用下での弾塑性挙動を回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデルにより表現した有限要素解析を対象に、時間域均質化法の実装のための定式化と解析アルゴリズムを提案した。数値実験結果を通し、その妥当性が確認できた。また、時間域均質化・有限要素解析法の精度向上のために、マクロ時間応答の評価において必要となる、ミクロ時間応答の時間平均のマクロ時間変化率の評価、およびそのマクロ時間変数についての積分方法に関する改良アルゴリズムを示し、提案手法の適用によりマクロ時間応答の解析計算の安定性が改善することが確認できた。

参考文献

- (1) Saussine, G., Cholet, C., Gauture, P.E., Dubois, F., Bohatier, C. & Moreau, J.J.: Modelling ballast behaviour under dynamic loading. Part1: A 2D polygonal discrete element method approach. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **195**(2006), pp.2841-2859.
- (2) 石川達也, 大西有三, 堀池高広: 不連続変形法 (DDA) による道床バラスト部繰り返し塑性変形機構の検討. 土木学会論文集, **645/III-50**(2000), pp.15-28.
- (3) Hashiguchi, K. & Chen, Z.-P.: Elastoplastic constitutive equation of soils with the subloading surface and the rotational hardening. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, **22**(1998), pp.197-227.
- (4) 紅露一寛, 間島朋也, 阿部和久: 下負荷面モデルを用いたバラスト道床繰り返し変形解析における材料パラメータの変動の影響評価, 土木学会鉄道工学シンポジウム論文集, **16**(2012), pp.21-28.
- (5) Suiker, A.S.J. & de Borst, R.: A numerical model for the cyclic deterioration of railway tracks. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **57**(2003), pp.441-470.
- (6) Oskay, C. & Fish, J.: Fatigue life prediction using 2-scale temporal asymptotic homogenization. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **61**(2004), pp.329-359.
- (7) 紅露一寛, 村松久志, 阿部和久: 鉄道用バラスト材の繰り返し変形解析のための時間域均質化法を援用した有限要素解析法. 計算工学講演会論文集, **15**(2010), pp.1001-1004.
- (8) Papon, A., Yin, Z.-Y., Riou, Y. & Hicher, P.-Y.: Time homogenization for crays subjected to large numbers of cycles. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, **37**(2013), pp.1470-1491.
- (9) 大窪和輝, 紅露一寛, 阿部和久: 時間域均質化法を援用した拡張下負荷面モデルを用いた繰り返し弾塑性解析, 計算数理工学論文集, **13**(2013), pp.67-72.
- (10) 石川達也, 須長 誠, 薫 軍, 名村 明: 大型繰返し三軸試験による道床バラストの変形特性の検討. 土木学会論文集, **No.575/III-40**(1997), pp.169-178.