

# 2次元波動伝搬問題に対する 積分核に依存しない演算子積分時間領域高速多重極境界要素法

## Convolution Quadrature Boundary Element Method Accelerated by Kernel Independent Fast Multipole Method for 2-D Wave Propagation Problems

齋藤 隆泰<sup>1)</sup>, 増村 佳大<sup>2)</sup>, 廣瀬 壮一<sup>3)</sup>

Takahiro SAITOH, Yoshihiro MASUMURA and Sohichi HIROSE

- 1) 群馬大学理工学研究院准教授 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail: t-saitoh@gunma-u.ac.jp)  
2) 群馬大学理工学研究院修士課程 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail: t13801341@gunma-u.ac.jp)  
3) 東京工業大学大学院教授 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp)

This paper presents a new convolution quadrature boundary element method accelerated by a kernel independent fast multipole method (KIFMM). The proposed method does not require the explicit multipole and local expansions of the kernels. Therefore, our proposed method has a potential to solve the problem where no explicit fundamental solutions are known. The formulation of our proposed method is described with the discussion of some numerical techniques to efficiently apply KIFMM to the convolution quadrature boundary element method (CQ-BEM). Numerical results show that our proposed method is faster than the conventional CQ-BEM when the number of boundary element is several thousands or more.

**Key Words:** Time-Domain BEM, Convolution Quadrature Method, Kernel Independent Fast Multipole Method, 2-D Wave Propagation

### 1. はじめに

本研究では、積分核に依存しない高速多重極法 (KIFMM: Kernel Independent Fast Multipole Method) を演算子積分時間領域境界要素法 (CQ-BEM: Convolution Quadrature Boundary Element Method) へ適用することについて検討する。

高速多重極法は、境界要素法を高速化するための有力な手法として様々な問題に適用されてきた。近年では、時間領域境界積分方程式中の畳込み積分を、演算子積分法 (CQM: Convolution Quadrature Method)<sup>(1)</sup> を用いて離散近似する演算子積分時間領域境界要素法が開発され、高速多重極法 (FMM: Fast Multipole Method) の適用<sup>(2)(3)</sup> についても検討されている。高速多重極法は、大規模問題に対して計算時間や記憶容量を低減させる効果があるが、その利用には、積分核の多重極展開や局所展開を導く必要がある。そのため、境界要素法に高速多重極法を適用する場合、異方性弾性波動問題のように、基本解を閉じた形で表せない問題に対しては、多重極展開や局所展開を求めること自体が困難となり、高速多重極法の適用は一般には難しい。また、3次元問題を扱う場合には、様々な特殊関数を利用する必要がある。これら特殊関数の扱いは、数学的にもプログ

ラムコードの作成という観点から見ても、一般的には困難なものである。そのため、これらの欠点を回避できる高速多重極法を構成することができれば、高速多重極法の適用範囲や汎用性を大幅に改善することが期待できる。積分核に依存しない高速多重極法に関する研究は、Ying<sup>(4)</sup> らにより、ポテンシャル問題に対して定式化が行われているが、波動問題に対しては十分な検討が行われていないのが現状である。

そこで、本研究では、積分核に依存しない高速多重極法を演算子積分時間領域境界要素法へ適用する方法について検討する。その最初のステップとして、まず、2次元波動伝搬問題への適用を試みる。以下では、まず、解析対象とする波動散乱問題について解説した後、2次元波動伝搬問題に対する演算子積分時間領域境界要素法の定式化について説明する。次に、積分核に依存しない高速多重極法における多重極展開や局所展開、M2M, M2L, L2L 等の各種展開公式を導く。そして、これらの具体的な計算手法についていくつか考察した後、簡単な波動散乱問題を解析することで、本手法の計算精度、計算時間について考察する。

### 2. CQ-BEM を用いた面外波動の散乱問題

本節では、KIFMM を CQ-BEM へ適用する際の説明に必要な

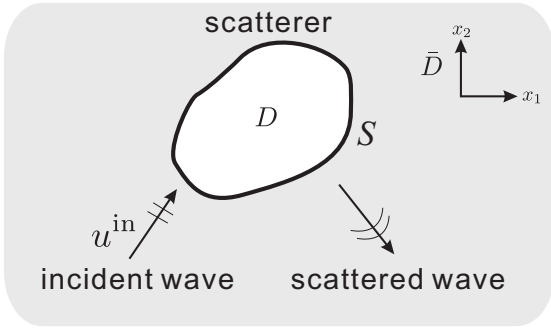


Fig. 1 SH wave scattering by a scatterer.

な, 最低限の CQ-BEM の定式化について説明しておく.

### 2.1. 解くべき問題

Fig.1 のような無限弾性体  $\bar{D}$  内の散乱体  $D$  による面外波動の散乱問題について考える. 入射波  $u^{\text{in}}$  が散乱体  $D$  の境界  $S$  に到達するまで, 境界上の面外変位  $u(\mathbf{x}, t)$  や対応する表面力  $p(\mathbf{x}, t)$  (以下, 単に変位や表面力と呼ぶ) は静止過去の条件を満足するとする. すなわち, 時刻  $t = 0$  において, 初期条件

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad p(\mathbf{x}, 0) = \mu \frac{\partial u(\mathbf{x}, 0)}{\partial n} = 0 \quad \text{in } \bar{D} \quad (1)$$

を満足すると仮定する. ここに,  $\partial/\partial n$  は境界  $S$  における外向き法線方向微分を表し,  $\mu$  はせん断弾性定数を表す. また, 変位  $u(\mathbf{x}, t)$  に対する波動方程式は, 時刻  $t$  において以下のように書ける.

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \quad \text{in } \bar{D} \quad (2)$$

$$u = \hat{u} \quad \text{on } S_1, \quad p = \hat{p} \quad \text{on } S_2, \quad S_2 = S \setminus S_1 \quad (3)$$

ここで,  $c$  は波速を表し,  $\hat{u}, \hat{p}$  はそれぞれ, 変位および表面力に対する与えられた境界条件を表している.

### 2.2. 時間領域積分方程式

この散乱問題の解は, 次の時間領域積分方程式を解くことで求まる.

$$C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) = u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * p(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_S T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (4)$$

ここで,  $*$  は時間に関する畳込み積分を表す. また,  $C$  は境界形状に依存する自由項であり,  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  および  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  は 2次元面外波動問題における基本解および対応する二重層核である. 通常的时间領域境界要素法では, 式(4)に対して, 時間・空間に適切な離散化を施し, 逐次的に第一ステップから解を求めていくが, 本論文では式(4)の時間に関する畳込み積分の離散化に, Lubich により提案された CQM<sup>(1)</sup> を用いる.

### 2.3. 演算子積分法の適用

CQM を用いて時間領域積分方程式(4)に現れる畳込み積分を, 時間増分を  $\Delta t$  として離散近似する. 境界上の変位  $u(\mathbf{x}, t)$  や表面力  $p(\mathbf{x}, t)$  を, 各境界要素上で一定とする区分一定要素を用い, 境界  $S$  を  $M$  個の境界要素で離散化し, かつ CQM を用

いて畳込み積分を離散化すれば, 第  $n$  ステップにおいて, 次の離散化された時間領域境界積分方程式を得ることができる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\mathbf{x}, n\Delta t) &= u^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n \left[ A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) p^\alpha(k\Delta t) - B^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u^\alpha(k\Delta t) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

ただし, 右上添字  $\alpha$  は, ソース点を表す指標である. 一方,  $A^m$  および  $B^m$  は影響関数であり,

$$A^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (6)$$

$$B^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (7)$$

で表される. ここで,  $s_l$  は  $s_l = \delta(\zeta_l)/\Delta t$  であり,  $L, \mathcal{R}, \zeta_l$  は演算子積分法のパラメータ<sup>(1)</sup> である. 一方,  $\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l), \hat{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l)$  はラプラス変換域での 2次元面外波動問題における基本解および対応する二重層核であり,

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{2\pi\mu} K_0(sr) \quad (8)$$

$$\hat{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \mu \frac{\partial}{\partial n_y} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = -\frac{s}{2\pi} K_1(sr) \frac{\partial r}{\partial n_y} \quad (9)$$

で表される. ただし,  $K_n$  は  $n$  次の第二種変形ベッセル関数,  $\partial/\partial n_y$  は点  $\mathbf{y}$  における法線方向微分であり,  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  である. また, 式(8), (9)において, 以降の表記を簡単にするために  $s = s/c$  としている. 影響関数(6), (7)の積分核は, 演算子積分法を用いたことにより, もはや時間領域ではなく, ラプラス変換域の積分核であることに注意する. 式(5)で第  $n$  ステップにおける変位や表面力を左辺に, それ以前の変位や表面力を右辺に移項すれば, 次の式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\mathbf{x}, n\Delta t) &+ \sum_{\alpha=1}^M \left[ B^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u^\alpha(n\Delta t) - A^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) p^\alpha(n\Delta t) \right] \\ &= u^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} \left[ A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) p^\alpha(k\Delta t) - B^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u^\alpha(k\Delta t) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)において, 初期条件や境界条件を考慮することで, 第一ステップから順番に, 最終ステップまでの変位や表面力を逐次的に求めることが可能である. 具体的に, 式(10)の右辺第二項の  $\sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} [A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) p^\alpha(k\Delta t)]$  を  $u^{RA,n} = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} [A^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) p^\alpha(k\Delta t)]$  として行列表示すると, 次の式を得る.

$$\begin{pmatrix} u^{RA,1} \\ u^{RA,2} \\ u^{RA,3} \\ u^{RA,4} \\ \vdots \\ u^{RA,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A^1 p^1 \\ A^2 p^1 + A^1 p^2 \\ A^3 p^1 + A^2 p^2 + A^1 p^3 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ A^{n-1} p^1 + A^{n-2} p^2 \quad \cdots \quad \cdots + A^1 p^{n-1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

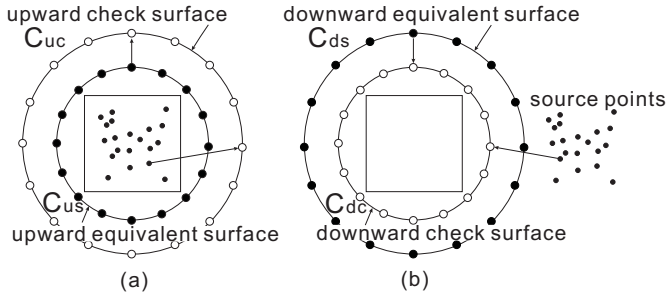


Fig. 2 Multipole and local expansions in KIFMM (a) quasi-multipole expansion (b) quasi-local expansion.

ここで、 $\mathbf{p}^m$ ,  $\mathbf{u}^{RA,m}$  は、それぞれ  $p^\alpha(m\Delta t)$ ,  $u^{RA,m}$  に関するベクトル表示を表わし、 $\mathbf{A}^m$  は、対応する影響関数から成る行列を表している。当然、 $\sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} [B^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u^\alpha(k\Delta t)]$  についても同様に計算することができる。式 (10), (11) より明らかのように、要素数  $M$  が大きいほど計算時間や記憶容量は膨大となる。このような問題を解決するために、著者らのグループでは、式 (11) の右辺に、FMM や並列化を施す<sup>(3)</sup> ことで、この問題を解決してきたが、一部の問題では、多重極展開や局所展開を導くことが困難な問題も存在する。そこで、本研究では、次のような KIFMM を CQ-BEM に適用することを考える。

### 3. 積分核に依存しない高速多重極法 (KIFMM)

高速多重極アルゴリズムの構成は、多重極展開と多重極モーメントの決定方法、局所展開および M2M, M2L, L2L から成る。しかしながら、高速多重極アルゴリズムは多重極展開あるいは局所展開に直接に依存するものではなく、他の方法で擬似多重極展開、擬似局所展開、擬似 M2M, 擬似 M2L, 擬似 L2L を作成することで同じように実行が可能である。本節では、Ying ら<sup>(4)</sup> のポテンシャル問題における KIFMM を参考に、KIFMM を CQ-BEM へ適用する方法について検討する。

#### 3.1. 擬似多重極展開

基本解の擬似多重極展開さえ導ければ、影響関数の擬似多重極展開を導くことは容易である。したがって、ここでは、基本解の多重極展開を導く。まず、Fig.2(a) に示すような、セルを囲む円  $C_{us}$  (上行円:upward equivalent surface) について考え、この円周上に  $p$  個の点  $\mathbf{y}_i^{us} (i = 1, \dots, p)$  (黒丸) を取り、円周の外部の場を擬似多重極係数  $M_i(C_{us})$  を用いて

$$u(\mathbf{x}) = \sum_i^p G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i^{us}) M_i(C_{us}) \quad (12)$$

と表すこととする (大黒丸→白丸)。外部の場は基本解の重ね合わせで表されるので、元となる方程式を満足する。この表現がセル内部の  $n_{\text{cell}}$  個のソース  $p^i (i = 1, \dots, n_{\text{cell}})$  (小黑丸) による外部の場 (小黑丸→白丸) として満足するために、

$$u(\mathbf{x}) = \sum_i^{n_{\text{cell}}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) p^i \quad (13)$$

をセルを囲む外部の円  $C_{uc}$  (上行参照円:upward check surface) 上で近似的に満足させる。円  $C_{uc}$  上に  $q$  個の点 ( $q \geq p$ ) (白丸)

を取り、その上で式 (12) と式 (13) が等しいとすれば、擬似多重極係数  $M_i$  を決定するための方程式は

$$\sum_j^p G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j^{us}) M_j(C_{us}) = \sum_k^{n_{\text{cell}}} G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_k) p^k \quad \mathbf{x}_i \in C_{uc} \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (14)$$

となる。式 (14) は円  $C_{uc}$  上で Dirichlet 条件が与えられた外部問題を一重層ポテンシャルを用いた仮想境界法で解く問題に相当する。このとき、式 (14) 中の  $M_j(C_{us})$  は通常的高速多重極法における多重極モーメントに相当する。ただし、この場合の多重極モーメントは従来の高速多重極法とは異なり、基本解を直接多重極展開して求めるわけでないことに注意する。また、実際に影響関数の擬似多重極展開を行う際は、式 (14) の右辺における  $n_{\text{cell}}$  個のソースに関する境界積分を実行することとなる。

#### 3.2. 擬似局所展開

擬似多重極展開と同様に、擬似局所展開を定義する。Fig.2(b) のように、セルを含む大きな円  $C_{ds}$  (下行円:downward equivalent surface) を取り、その円周上の  $p$  個の点  $\mathbf{y}_i^{ds}$  (大黒丸) を考える。このとき、擬似局所展開 (大黒丸→白丸) を

$$u(\mathbf{x}) = \sum_i^p G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i^{ds}) L_i(C_{ds}) \quad (15)$$

と定義する。式 (15) は式 (12) と同様に、円周内部で支配方程式を満足する。 $C_{ds}$  の内部でセルを囲む位置に参照円  $C_{dc}$  (下行参照円:downward check surface) を取る。この円  $C_{dc}$  上の点 (白丸) で外部のソース点からの影響を近似的に満足させる (小黑丸→白丸) ことを考えれば、局所展開係数  $L_i$  を決定する方程式として、

$$\sum_j^p G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j^{ds}) L_j(C_{ds}) = \sum_k^{n_{\text{far}}} G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_k) p^k \quad \mathbf{x}_i \in C_{dc} \quad (i = 1, 2, \dots, q) \quad (16)$$

が得られる。

#### 3.3. 移動公式 (擬似 M2M, 擬似 M2L, 擬似 L2L)

KIFMM を実行するために必要な擬似 M2M, 擬似 M2L, 擬似 L2L についてまとめておく。

まず、擬似 M2M を構成するために、Fig.3 に示すような一つのセル  $C$  とその親セル  $P$  について考え、子セルの円  $C_{us}^C$  上の点  $\mathbf{y}_i^C$  における擬似多重極モーメント  $M_i^C = M_i(C_{us}^C)$  から、親セルの円  $C_{us}^P$  上の点  $\mathbf{y}_i^P$  における擬似多重極モーメント  $M_i^P = M_i(C_{us}^P)$  への変換について考える。今、親セルの円  $C_{uc}^P$  上に  $q$  個の点 ( $q \geq p$ ) を取り、 $C_{uc}^P$  上で波動場が一致すると考えると、

$$\sum_j^p G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j^P) M_j(C_{us}^P) = \sum_j^p G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j^C) M_j(C_{us}^C) \quad \mathbf{x}_i \in C_{uc}^P \quad (i = 1, 2, \dots, q), \text{ (M2M)} \quad (17)$$

の関係が得られる。右辺は既知であるから、式 (17) は親セルにおける多重極係数  $M_i^P$  を決定する方程式となる。すなわち、通常の FMM の M2M に相当する。

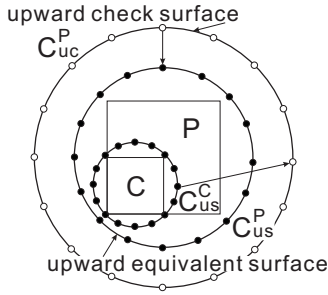


Fig.3 Quasi-M2M in KIFMM.

次に、擬似 M2L を考えるために、Fig.4 に示すような一つのセル  $C$  とその遠方セル  $F$  について考え、セル  $C$  の円  $C_{us}^C$  上の点  $\mathbf{y}_i^C$  における擬似多重極係数  $M_i^C$  から、遠方セル  $F$  の円  $C_{ds}^F$  上の点  $\mathbf{y}_i^F$  における擬似局所展開係数  $L_i^F = L_i(C_{ds}^F)$  への変換について考える。今、遠方セルの  $C_{dc}^F$  上に  $q$  個の点 ( $q \geq p$ ) を取り、その上でソース点による波動場が一致すると考えると、

$$\sum_j^p G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j^F) L_j(C_{ds}^F) = \sum_j^p G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j^C) M_j(C_{us}^C) \quad \mathbf{x}_i \in C_{dc}^F \quad (i = 1, 2, \dots, q), \text{ (M2L)} \quad (18)$$

の関係が得られる。右辺は既知であるから、これは、遠方セルの擬似局所展開係数  $L_i^F$  についての方程式である。すなわち、FMM における M2L に相当する操作である。

最後に、擬似 L2L を考えるために、Fig.5 に示すような、一つのセル  $P$  とその子セル  $C$  について考え、親セル  $P$  の円  $C_{ds}^P$  上の点  $\mathbf{y}_i^P$  における擬似局所展開係数  $L_i^P = L_i(C_{ds}^P)$  から、子セルの円  $C_{ds}^C$  上の点  $\mathbf{y}_i^C$  における擬似局所展開係数  $L_i^C = L_i(C_{ds}^C)$  への変換について考える。今、子セルの円  $C_{dc}^C$  上に  $q$  個の点 ( $q \geq p$ ) を取り、その上で波動場が一致すると考えると、擬似 L2L は、

$$\sum_j^p G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j^C) L_j(C_{ds}^C) = \sum_j^p G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j^P) L_j(C_{ds}^P) \quad \mathbf{x}_i \in C_{dc}^C \quad (i = 1, 2, \dots, q), \text{ (L2L)} \quad (19)$$

のように求まる。右辺は既知であるから、これは、子セルの擬似局所展開係数  $L_i^C$  についての方程式であり、FMM における L2L に相当する。

なお、本論文では紙面の都合上詳細な説明は省略するが、二重層核に対しても全く同様に擬似多重極展開を実行することができる。また、式 (17), (18), (19) における M2M 等の移動公式は、全て基本解を用いて計算されるため、基本解の計算以上に複雑な特殊関数等を扱う必要もなく、また直接の多重極展開も必要としないことに注意する。以上で、KIFMM を実行する上での必要な展開公式は全て求まった。

#### 4. 数値計算上のいくつかの技法

本節では、実際に KIFMM を CQ-BEM に適用する際に問題となる、数値計算上の技法の一部についてまとめておく。

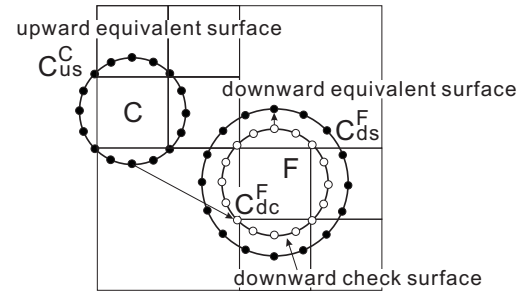


Fig.4 Quasi-M2L in KIFMM.

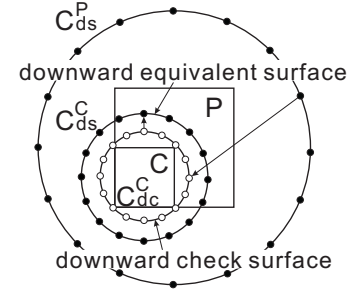


Fig.5 Quasi-L2L in KIFMM.

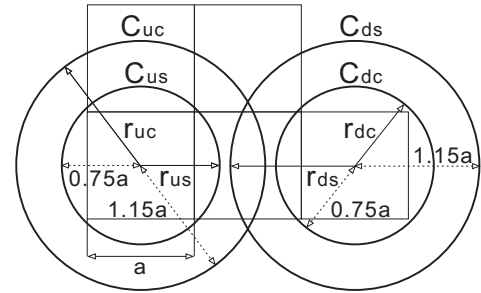


Fig.6 Upward and downward equivalent (check) surface.

#### 4.1. 上行円、下行円および参照円の決定

Fig.6 に示すような、上行円  $C_{us}$ 、上行円の参照円  $C_{uc}$ 、下行円  $C_{ds}$ 、下行円の参照円  $C_{dc}$  を考える。セルの一边の長さを  $a$  とするとき、これらの円の半径  $r_{us}$ ,  $r_{uc}$ ,  $r_{ds}$ ,  $r_{dc}$  について、制約条件

$$r_{us} > \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \simeq 0.7071a \quad (20)$$

$$r_{dc} > \frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \simeq 0.7071a \quad (21)$$

$$r_{us} + r_{ds} < 2a \quad (22)$$

が存在する。式 (20) はセル内のソース点をすべて含むためのものであり、式 (21) はセル内の参照点をすべて含むためのものである。式 (22) は、第一近傍を用いる場合、下行円が上行円の外側にあることを保証するものである。これらの条件を満足するものとして、

$$r_{us} = r_{dc} = 0.75a = \frac{3}{4}a \quad (23)$$

$$r_{ds} = r_{uc} = 1.15a \quad (24)$$

としたものが Fig.6 である. 条件を満足するものとしては,  $r_{ds} = r_{uc} = 1.2a$  等も考えられるが, 本論文では  $C_{us}$  と  $C_{ds}$  との間隔を大きめにするために, 式 (23), (24) の値を選ぶこととする.

#### 4.2. 擬似多重極・局所展開係数決定方程式における係数行列計算の省略

擬似多重極係数の決定方程式 (14) および (17) における左辺の係数行列は必ずしも毎回計算する必要はない. 次のような操作を考えれば, 大幅に計算を省略することができる.

今, 上行円と参照円をレベル毎で同じであると仮定し, かつ分割点の数  $p, q$  もレベル毎に同じであるとすれば, これらの係数決定方程式 (14), (17) はそれぞれ右辺を除き, 同レベルでは同じ方程式となる. すなわち, 上行計算においては多重極係数  $M_i$  の決定計算をレベル毎に統一することが可能であることから, 係数決定方程式 (14), (17) の左辺の係数行列を一度だけ計算し, 記憶しておくことにより, 計算時間の節約が可能となる. さらに, それら各レベル毎における係数行列の計算も, 次のように対称性を考慮することで計算を省略することができる. まず, 多重極係数決定方程式 (14), (17) を統一的に,

$$Am = Bf \quad (25)$$

と表記する. ただし, 式 (25) は, 式 (14), (17) いずれに対しても, ベクトル  $m$  が未知,  $f$  が既知であるとする. このとき, 係数行列  $A$  の計算は, Fig.7 に示すように, 上行円  $C_{us}^P$  および参照円  $C_{uc}^P$  に対する計算となる. 以下,  $p$  を 4 の倍数に取り,  $q = p$  とする. 求める係数行列の成分  $A_{i,j} = G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$  は  $p \times p$  の正方行列であるから, その成分を

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p-1} & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,p-1} & A_{2,p} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & \cdots & A_{3,p-1} & A_{3,p} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & \cdots & A_{4,p-1} & A_{4,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{p-1,1} & A_{p-1,2} & \cdots & A_{p-1,p-1} & A_{p-1,p} \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,p-1} & A_{p,p} \end{bmatrix} \quad (26)$$

と表す. 番号付けは Fig.7 のように  $x_1$  軸から反時計回りにとっている. さて, 成分  $A_{i,j}$  は距離  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j|$  ( $\mathbf{x}_i \in C_{us}^P, \mathbf{y}_j \in C_{uc}^P$ ) の関数である. まず,  $\mathbf{y}_1$  からの影響について考える. 式 (26) における第 1 列について考えると,  $r_{i,1} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_1|$  について, 鏡面对称性により, 関係

$$r_{p+1-i,1} = r_{i+1,1} \quad (i \neq 0, \frac{p}{2}) \quad (27)$$

となる. よって列  $A_{i,1}$  の  $i = 1$  から  $i = p/2 + 1$  個までの成分を計算すれば, 残りは式 (27) の関係より

$$A_{p+1-i,1} = A_{i+1,1} \quad (i \neq 0, \frac{p}{2}) \quad (28)$$

として計算できる. さらに, 回転対称の性質より, 式 (26) の第  $j$  列は,  $A_{i,1}$  から

$$A_{i,j} = A_{i-j+1,1} \quad (29)$$

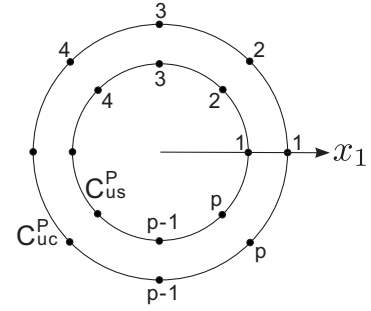


Fig.7 The relation between  $C_{us}$  and  $C_{uc}$  for the calculation of  $M_i$ .

により計算できる. ただし,  $i-j+1 \leq 0$  のときは  $i-j+1+p$  でおきかえる. 以上より  $G(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$  の計算が必要なのは  $p/2+1$  個だけであり, 残りの成分はすべてこれらの値から計算可能である. これらを順次, 式 (26) に適用すると,  $A_{i,j}$  の計算は次のようになる.

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{3,1} & A_{2,1} \\ A_{2,1} & A_{1,1} & \cdots & A_{4,1} & A_{3,1} \\ A_{3,1} & A_{2,1} & \cdots & A_{5,1} & A_{4,1} \\ A_{4,1} & A_{3,1} & \cdots & A_{6,1} & A_{5,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{\frac{p}{2}+1,1} & A_{\frac{p}{2},1} & \cdots & A_{\frac{p}{2}+3,1} & A_{\frac{p}{2}+2,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{3,1} & A_{4,1} & \cdots & A_{1,1} & A_{2,1} \\ A_{2,1} & A_{3,1} & \cdots & A_{2,1} & A_{1,1} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$A$  が各レベル毎に決まれば, LU 分解を予め実行しておくことで, 式 (25) 左辺の  $m$  を決定する計算はたかだか  $O(pq)$  で済む. なお, この対称性の議論は, 式 (16), (19) のような局所展開係数  $L_i$  の決定方程式についても同様に成り立つ. その場合は, 下行円  $C_{ds}$ , 参照円  $C_{dc}$  に対して, 同様の検討をすれば良い. ただし, 下行円と参照円の関係が Fig.7 の逆になることに注意する. また,  $q = 2p$  の場合も, 対称性の条件を使って計算を省略できる. その場合は,  $A$  に対して予め特異値分解を実行しておけば良い. さらに, 式 (25) 右辺の係数行列  $B$  についても, 対称性を考慮し, 計算を省略することができるが, 本論文では紙面の都合上, その説明は省略する.

#### 5. 数値解析例

数値解析例として, Fig.8 内に示すような半径  $a$  の空洞による, 入射波の散乱問題を本提案手法で解析した. 入射波は,  $x_1$  軸に沿って伝搬する平面波とし, 波面が最初に空洞に到達する時刻を  $t = 0.0$  として, 次のように与えた.

$$u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = u_0(1 - \cos 2\pi\alpha) \quad (31)$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{c}{\lambda} \left( t - \frac{x_1 + a}{c} \right) & \text{for } (0 \leq \alpha \leq 1) \\ 0 & \text{for otherwise} \end{cases}$$

ここで  $u_0$  は入射波の変位振幅,  $\lambda$  は波長を表している. なお, 計算には, HPC システムズ社製の CPU:Xeon E5-1660(3.3GHz), メモリ:128GB を搭載した計算機を用いた. ただし, 以下の計

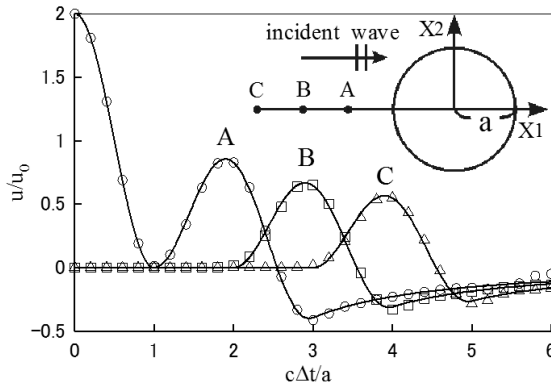


Fig.8 Comparison between reference solutions and numerical results obtained by CQ-BEM accelerated by KIFMM.

算では、純粹に構築した手法の精度や計算時間について確認することを目的としているため、OpenMP等を用いた並列化は行っていない。総時間ステップ数  $N$  は  $N = L = 128$  とした。演算子積分法のパラメータ  $L$  を総時間ステップ数  $N$  と等しくすることにより、式(6),(7)の影響関数の計算にFFTを実行できるようにしている。なお、式(6),(7)中の  $\mathcal{R}$  は  $\mathcal{R} = \sqrt{\epsilon}^{\frac{1}{2}}$ ,  $\epsilon = 1.0e^{-10}$  を用いて計算した。また、時間増分は  $\Delta t = 0.05$  とし、空洞の半径  $a$  および波速  $c$  は  $a = c = 1$ , 波長  $\lambda$  は  $\lambda = 2a$  とした。KIFMMにおける  $p, q$  の値は全レベルで  $p = q$  の一定値としているが、4.2節で述べた計算省略法を用いて、式(25)における係数行列  $A, B$  に相当する部分を効率的に計算した。

### 5.1. 計算精度の確認

まず、本論文で示したKIFMMを適用した場合のCQ-BEMの算法が正しく成立することを確認するために、要素数  $M = 72$  である規模の小さい問題を解析する。ただし  $p = q = 64$  とし、葉のセルに含まれる最大の要素数  $n_{\min}$  を  $n_{\min} = 2$  とした。この場合、最大レベルは Level=4 となり、L2Lを含む全てのアルゴリズムが実行されることとなる。

Fig.8は、KIFMMを適用したCQ-BEMを用いて境界変位を求めた後、通常のCQ-BEMの手順でFig.8中の内点A(-2,0), B(-3,0), C(-4,0)変位を計算した結果である。ただし、実線は、PaoとMow<sup>(5)</sup>によって導かれた周波数領域における解析解を逆フーリエ変換することによって求めた時間領域の数値解(参照解)を、記号はKIFMMを適用した場合の数値解を示している。両者は良く一致しており、KIFMMが正しく実行されていることが確認できた。

### 5.2. 計算時間の確認

次に、同様の問題を対象に、半径  $a$  の空洞の境界要素数を 72, 288, ..., 73728 と増加させた場合の計算時間を確認した。それらの結果をFig.9に示す。ただし、 $p = q = 48$  とし、葉のセルに含まれる最大の要素数  $n_{\min}$  を、各要素数の場合においてKIFMMの効率が確認できるように適当に変化させている。それぞれ○は通常のCQ-BEMを、▲はKIFMMを適用した場合の結果を示している。CQ-BEMの記憶容量は  $O(M^2N)$  であるため、CQ-BEMでは要素数  $M$  が  $M = 4608$  までしか計算を実行することができなかった。しかしながら、KIFMMを

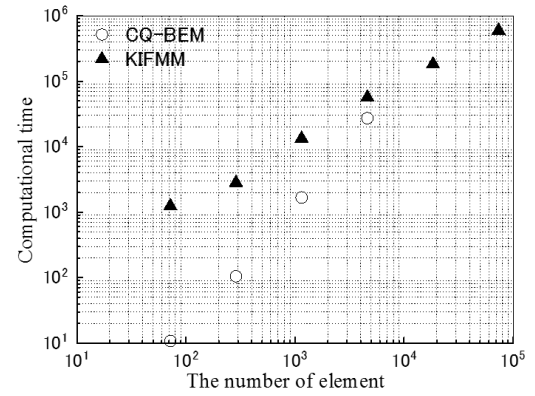


Fig.9 Comparison of computational time between conventional CQ-BEM and CQ-BEM accelerated by KIFMM.

適用した場合は全てのケースに対して解析が可能であり、要素数が最も多い73728の場合でさえ、およそ1.65GBの記憶容量しか必要としなかった。また、計算時間は、 $M = 8000$  程度でKIFMMを適用したCQ-BEMの方が高速になると予想される。なお、ここで示した結果は、実用的な計算を想定したものでないことを注意しておく。実用的には、 $p$  や  $q$  の値、要素数は解くべき問題のサイズや波長等から決定されるが、KIFMMの算法が成立すること、要素数が増加した場合でも、効率的に解析を実行できることに焦点を当てている。

## 6. まとめと今後の課題

本研究では、KIFMMをCQ-BEMに適用する方法について検討した。要素数が多い場合、KIFMMは通常のCQ-BEMより高速になる。今後は、各レベルにおける  $p, q$  の設定方法と数値誤差との関係等、残されたいくつかの事項について検討を進めながら、具体的な問題を解析するとともに、本手法のメリットを最大限活かせるような問題である異方性弾性波動問題に対するCQ-BEMにKIFMMを適用する予定である。

### 参考文献

- (1) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, 52, pp. 129-145(1988).
- (2) 福井卓雄・岡山美央・石田貴之: 2次元波動伝播問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算数理工学論文集, Vol.6, No.2, (2006), pp. 153-158.
- (3) 斎藤隆泰・瀬川尚揮・石田貴之・廣瀬壮一: 並列化された演算子積分時間領域高速多重極境界要素法による大規模多重散乱解析, 計算数理工学論文集, Vol. 11, (2011), pp.95-100.
- (4) Ying, L., Biros, G. and Zorin, D.: A kernel-independent adaptive fast multipole algorithm in two and three dimensions, *J. Comput. Phys.*, 196, (2004), pp. 591-626.
- (5) Pao, Y.-H. and Mow, C. C.: Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations, Crane and Russak, New York, (1973).