計算数理工学論文集 Vol. 13 (2013 年 11 月), 論文 No. 23-131129 JASCOME

部分領域モデル縮約法を用いた電磁界解析について

ON SUBDOMAIN MODEL ORDER REDUCTION FOR COMPUTATIONAL ELECTROMAGNETISM

佐藤　佑樹 1)，五十嵐　一 2)

Yuki SATO, Hajime IGARASHI

1)　北海道大学　情報科学研究科　（〒060-0814　札幌市北区北 14 条西 9 丁目，yukisato@em-si.eng.hokudai.ac.jp）

2)　北海道大学　情報科学研究科　（〒060-0814　札幌市北区北 14 条西 9 丁目，igarashi@ssi.ist.hokudai.ac.jp）

This paper discusses the subdomain model order reduction for finite element analysis of electromagnetic fields. In this method, the original field equations are reduced to small equations in a subdomain where the fields are expected to have relatively small influences from changes in the design parameters of electromagnetic devices. In this paper, the effect of subdomain setting on the accuracy, computational time as well as convergence in iterative linear solvers is discussed.

Key words : Electromagnetic field, Model Order Reduction, Finite Element Method, Method of Snapshots.

1. はじめに

近年，インダクタやモータ，アンテナ等の電磁機器の形状最適化が広く行われている[1]-[3]．これら電磁機器の形状最適化には, 遺伝的アルゴリズム等の進化論的最適化が有効である[3]．このような多数の個体を用いる集団的最適化においては，有限要素法や FDTD 法，モーメント法等による電磁界解析を多数回行う必要があるため, 計算時間が長大となる．このため，電磁界解析の高速化が強く望まれている．

電磁界解析で広く用いられている有限要素法を高速化する方法の一つとして, スナップショット法を用いたモデル縮約法がある[4]-[6]. この方法では, まず時間, 周波数, 設計変数等を変化させ, 電磁界分布を数点サンプリングする．つぎに主成分分析をこれらの分布に適用することで, 少数の基底ベクトルを作成する. この基底ベクトルの線形結合により, 元の有限要素方程式の未知数を近似的に表現する．これより，元の有限要素方程式の未知数は，基底ベクトルの数まで縮約されるので, 有限要素解析の時間を短縮することができる．

電磁機器の形状最適化にモデル縮約法を適用する場合, 設計変数を変化させて電磁界分布をサンプリングする. しかし，機器を含む領域(デザイン領域)においては，設計変数に依存して電磁界分布が大きく変動することが予想される．そこで，著者らは，デザイン領域の周辺領域(縮約領域)に対して，モデル縮約法を適用する手法を提案した[7]．この手法では，場の変動が小さい領域のみについてモデル縮約を行うため, 少数の基底ベクトルにより電磁界を精度よく表現できると期待できる．実際，デザイン領域外の空気領域を縮約領域に取ることにより, 電磁機器の最適化を効率的に行えることが示された[7]．しかし，モデル縮約を行う縮約領域の取り方と精度, 計算時間の関係については詳しい検討がなされてこなかった. そこで本稿では，静磁界と渦電流場の場合について，これらを検討した結果について報告する．

また，部分領域モデル縮約法では，基底ベクトル数を増加させた場合や，縮約領域を狭めた場合，ICCG 法の収束特性が著しく悪化してしまうという問題がある. そこで本稿では，ICCG 法の収束特性の改善法を提案し，その有効性を検討する．

2. 定式化

2.1　有限要素方程式

準静近似の電磁界の支配方程式は

$$\mathrm{rot}\,\nu\,\mathrm{rot}\boldsymbol{A} + \mathrm{j}\omega\sigma(\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,\varphi) = \boldsymbol{J} \tag{1a}$$

$$\mathrm{div}\{\mathrm{j}\omega\sigma(\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,\varphi)\} = 0 \tag{1b}$$

で与えられる[8]．ここで，$\boldsymbol{A}, \varphi, \boldsymbol{J}, \omega, \sigma, \nu$ は，磁気ベクトルポテンシャル，スカラーポテンシャル，強制電流密度，角周波数，導電率，磁気抵抗率(透磁率の逆数)である．また，j は，虚数単位である．(1)式において，有限要素行列が対称となるようにφを定義した．(1)式に対して，ガラーキン法を適用すると，つぎの有限要素方程式が得られる．

2013 年 9 月 17 日受付，2013 年 10 月 22 日受理

$$\sum_i a_i \int_\Omega \left(\mathrm{rot}\boldsymbol{N}_j \cdot \nu\, \mathrm{rot}\boldsymbol{N}_i + \mathrm{j}\omega\sigma\boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{N}_j\right)\mathrm{d}V + \sum_k \varphi_k \int_\Omega \mathrm{j}\omega\sigma\boldsymbol{N}_j \cdot \mathrm{grad}N_k \mathrm{d}V = \int_\Omega \boldsymbol{N}_j \cdot \boldsymbol{J}\mathrm{d}V \tag{2a}$$

$$\sum_i a_i \int_\Omega \mathrm{j}\omega\sigma\boldsymbol{N}_i \cdot \mathrm{grad}N_u \mathrm{d}V + \sum_k \varphi_k \int_\Omega \mathrm{j}\omega\sigma\,\mathrm{grad}N_k \cdot \mathrm{grad}N_u \mathrm{d}V = 0 \tag{2b}$$

ここで，$\boldsymbol{N}_i$, N_k は，それぞれ辺要素ベクトル補間関数，節点要素スカラー補間関数である．この 2 式を連立して解くことにより，解 a_i,φ_k を得ることができる．

2.2 部分領域モデル縮約法

磁界解析においては, 磁気飽和など材料の非線形特性を考慮しなければならないことがある．このとき，全解析領域にモデル縮約法を適用し, 時間応答から基底を構成すると，非線形性が強い領域において，通常の有限要素法により得られた電磁界との誤差が生じる[5]．これは非線形領域では基底の重ね合わせにより場を表現できないためである．そこでモデル縮約を，線形性を持つ部分領域のみに適用する部分領域モデル縮約方法が提案された[6].

最適化問題においては, 機器形状を変化させながら電磁界解析を行うため, 全領域についてモデル縮約法を適用することは有効でないと考えられる．そこで，機器形状の変化による影響が少ない周辺領域のみを縮約領域とする方法が提案された[7]．以下，本法の定式化を行う．まず設計変数によって方程式が変化するため，(2)式を以下のように表す.

$$\mathrm{K}(\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{u}_i) \tag{3}$$

ここで，$\mathrm{K}(\boldsymbol{u}_i) \in C^{n\times n}$, $\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{u}_i) \in C^n$, $\boldsymbol{u}_i$ は電磁機器の形状を決定する設計変数，n は(3)式の未知変数の数である．また，係数行列 $\mathrm{K}(\boldsymbol{u}_i)$は,

$$\mathrm{K}(\boldsymbol{u}_i) = \begin{bmatrix} \mathrm{K}_{11}(\boldsymbol{u}_i) & \mathrm{K}_{12} \\ \mathrm{K}_{21} & \mathrm{K}_{22} \end{bmatrix} \tag{4}$$

と書くことができる．ここで，$\mathrm{K}_{11}(\boldsymbol{u}_i) \in C^{l\times l}$, $\mathrm{K}_{12} \in C^{l\times(n-l)}$, $\mathrm{K}_{21} \in C^{(n-l)\times l}$, $\mathrm{K}_{21} \in C^{(n-l)\times(n-l)}$ であり，l はデザイン領域を中心とした非縮約領域Ω_1 内の未知変数の数である．K_{11} は，Ω_1 に関する係数行列であり，K_{22} はデザイン領域周辺の縮約領域Ω_2 に関する係数行列である．縮約された空間の基底を構成するため，様々な設計変数に対して(3)式を解き，解 $\boldsymbol{x}_i$ を求める．この $\boldsymbol{x}_i$ を用いて，以下のようなデータ行列 X を作成する．

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_s \end{bmatrix} \tag{5}$$

ここで，s はスナップショット数である($s \ll n$)．このデータ行列 X に特異値分解を適用する．

$$\mathrm{X} = \mathrm{W\Sigma V}^{\mathrm{t}} = \sigma_1 \boldsymbol{w}_1 \boldsymbol{v}_1^t + \sigma_2 \boldsymbol{w}_2 \boldsymbol{v}_2^t + \cdots + \sigma_s \boldsymbol{w}_s \boldsymbol{v}_s^t \tag{6}$$

ここで，σ_i は特異値，$\boldsymbol{w}_i$,$\boldsymbol{v}_i$ は $\mathrm{XX^t}$,$\mathrm{X^tX}$ の固有ベクトルである．また，行列 W, V は $\boldsymbol{w}_i$，$\boldsymbol{v}_i$ の並んだ行列，Σは，特異値が対角に並んだ行列である．ここで，主要な特異値に対応する r 個の特異ベクトルが並んだ行列を以下のように構成する．

$$\begin{bmatrix} \mathrm{W_{r1}} \\ \mathrm{W_{r2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{11} & \boldsymbol{w}_{12} & \cdots & \boldsymbol{w}_{1r} \\ \boldsymbol{w}_{21} & \boldsymbol{w}_{22} & \cdots & \boldsymbol{w}_{2r} \end{bmatrix} \tag{7}$$

ここで，$\mathrm{W_{r1}}$,$\mathrm{W_{r2}}$ は，領域Ω_1，Ω_2 に関する行列である．Ω_2 のみを縮約すると考えた場合，変換行列 $\mathrm{W_r}$ は，以下のように書くことができる．

$$\mathrm{W_r} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{W_{r2}} \end{bmatrix} \in C^{n\times(l+r)} \tag{8}$$

この変換行列を用いて，方程式の縮約を行うと，(3)式は

$$\begin{bmatrix} \mathrm{K}_{11}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{u}_i) & \mathrm{K}_{12}\mathrm{W_{r2}} \\ \mathrm{W_{r2}^t}\mathrm{K}_{21} & \mathrm{W_{r2}^t}\mathrm{K}_{22}\mathrm{W_{r2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{u}_i) \\ \mathrm{W_{r2}}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

の形となる[7].

以上のように縮約方程式が得られるが，$\mathrm{W_{r2}}$ は W が直交行列となるように構成されているため，変換行列 $\mathrm{W_r}$ の基底ベクトルは互いに直交していない．このため，Ω_1 を大きく設定した場合や基底ベクトル数を増加させたとき，ICCG 法の収束特性が著しく悪化してしまう．そこで ICCG 法の収束特性を改善するために, 変換行列の基底ベクトルが正規直交となるようにする．まず，データ行列を以下のように 2 つの部分に分ける．

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{11} & \boldsymbol{x}_{12} & \cdots & \boldsymbol{x}_{1s} \\ \boldsymbol{x}_{21} & \boldsymbol{x}_{22} & \cdots & \boldsymbol{x}_{2s} \end{bmatrix} \tag{10}$$

ここで，X_1，X_2 はそれぞれ領域Ω_1，Ω_2 に関する行列である．正規直交基底を作成するために，データ行列 X_2 に対してのみ特異値分解を行う．

$$\mathrm{X}_2 = \mathrm{W}_2{}' \Sigma_2{}' \mathrm{V}_2^{\mathrm{t}}{}' = \sigma_1{}' \boldsymbol{w}_1{}' \boldsymbol{v}_1^t{}' + \sigma_2{}' \boldsymbol{w}_2{}' \boldsymbol{v}_2^t{}' + \cdots + \sigma_s{}' \boldsymbol{w}_s{}' \boldsymbol{v}_s^t{}' \tag{11}$$

ここで，σ_i' は特異値，$\boldsymbol{w}_i'$,$\boldsymbol{v}_i'$ は $\mathrm{X_2X_2^t}$,$\mathrm{X_2^tX_2}$ の固有ベクトルである．また，行列 $\mathrm{W_2'}$，$\mathrm{V_2'}$ は $\boldsymbol{w}_i'$，$\boldsymbol{v}_i'$ の並んだ行列，Σ_2'は，特異値が対角に並んだ行列である．これにより，領域Ω_2 における正規直交基底を作成できる．変換行列(8)式は，以下のように再定義される．

$$\mathrm{W_r}' = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ 0 & \mathrm{W_{r2}}' \end{bmatrix} \in C^{n\times(l+r)} \tag{12}$$

この変換行列を用いて，モデル縮約を行う．

3. 数値解析結果

Fig.1 の 2 重磁気シールドモデルを例題として考える．Fig.1 の 3 次元磁気シールドモデルは，四面体メッシュを

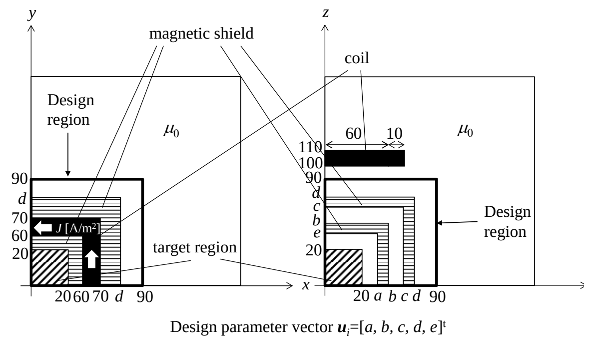
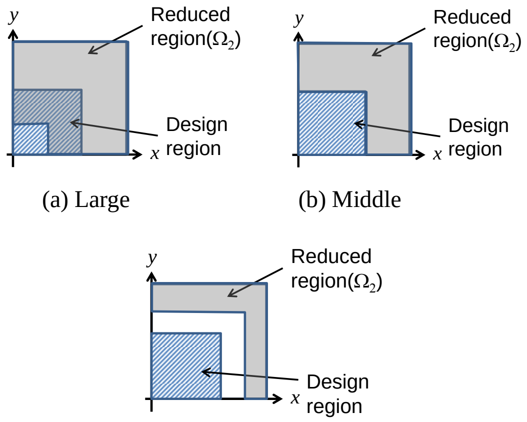


Fig. 1. Magnetic shield model(unit [mm])



(a) Large (b) Middle

(c) Small

Fig. 2. Setting of reduced region($\Omega=\Omega_1+\Omega_2$).

用いてモデル化を行った．Fig.1 の左，右の図はそれぞれ磁気シールドの xy，xz 平面図であり，横縞部が電磁シールド，斜線部がターゲット領域，黒色部がコイルである．解析領域の未知変数の数は，304,306 である．デザイン領域は，原点から 90×90×90mm^3 の領域とし，デザイン領域内の未知変数の数は 82,800 である．図中の a, b, c, d, e は，それぞれ 30，20，20，20，30 の自由度を持っており，$\boldsymbol{u}_i$ の次元は 7,200,000 である．これらの設計変数を変化させて，電磁界をスナップショットする．スナップショット数は，全て共通で s=20 とする．磁性体の線形性を仮定し，透磁率をμ_r=100 とする．基底ベクトルは，最も大きな特異値に対応する特異ベクトルから 5，20 個選ぶこととする．縮約領域Ω_2 の取り方と精度，計算時間の関係を調べるために，2 重磁気シールド最適化問題において，Fig.2 のように縮約領域（reduced region)の大きさを変化させる．Fig.2 において，灰色部分が縮約領域，斜線部がデザイン領域である．Fig.2(a)では，縮約領域Ω_2 がデザイン領域と部分的に重なるように設定している(縮約しない領域Ω_1 を原点から 70×70×70 とする)．Fig.2(b)では，縮約領域Ω_2 をデザイン領域外の空気領域としている(縮約しない領域Ω_1 を原点から 90×90×90 とする)．Fig.2(c)では，縮約領域Ω_2 をデザイン領域から遠方の空気領域としている(縮約しない領域Ω_1 を原点から 110×110×110 とする)．これらの 3 つの場合について，解析時間，計算時間，ICCG 法の収束特性がどのように変化するのかを検討する．

Table 1 Computational time when f=0.

(a) Large

Method	Conventional		Present	
Number of basis vectors r	5	20	5	20
Computational time[%]	25	75	25	75

(b) Middle

Method	Conventional		Present	
Number of basis vectors r	5	20	5	20
Computational time[%]	40	100	40	70

(c) Small

Method	Conventional		Present	
Number of basis vectors r	5	20	5	20
Computational time[%]	75	400	70	195

3.1　静磁界の場合

まず，周波数が 0Hz の静磁界の場合を考える．このとき，縮約後の未知数は，それぞれ(a) 25,603，(b)82,800，(c) 192075 に基底ベクトル数 5，20 を足した数となる．

3.1.1　解析精度

まず，解析精度を調べるために，設計変数を変化させ，様々な形状において 50 回解析を行った．Fig.3 の(a)，(b)，(c)は各領域の解析結果を示す．誤差 e は，以下のように定義した．

$$e=\frac{\left|\boldsymbol{B}_{target}^{original}-\boldsymbol{B}_{target}^{MOR}\right|}{\left|\boldsymbol{B}_{target}^{original}\right|} \tag{13}$$

ここで，$\boldsymbol{B}_{target}{}^{original}$，$\boldsymbol{B}_{target}{}^{MOR}$ はそれぞれ通常の有限要素法解析，モデル縮約法により得られた(19.5,19,19)の点の磁束密度を表す．Fig.3 の縦軸は誤差 e の度数分布を表す．頻度の評価のために 50 回解析を実施した．(13)式の誤差の評価の代わりに体積分による誤差を評価した場合でも同様な結果を得られることを確認した．Fig.3 の conventional は(8)，present は(12)式により縮約を行った結果を示す(以下同じ). Fig.3 より，縮約領域を Fig.2 の(b), (c)にように取ると，モデル縮約法で構成された基底ベクトルが設計変数の影響を受けにくいため，解析精度が比較的良好となる．しかし，(a)のように取ると精度が大幅に悪化することがわかる．この理由としては，電磁界が大きく変化すデザイン領域に縮約領域が含まれるので，数十本の基底ベクトルでは表現できなくなってしまうためと考えられる．特異値分解によって得られた 20 個の特異値分布を

Table 2 Computational time with f=200.

(a) Large

Method	Conventional		Present	
Number of basis vectors r	5	20	5	20
Computational time[%]	69	123	53	78

(b) Middle

Method	Conventional		Present	
Number of basis vectors r	5	20	5	20
Computational time[%]	78	190	75	116

(c) Small

Method	Conventional		Present	
Number of basis vectors r	5	20	5	20
Computational time[%]	156	366	127	235

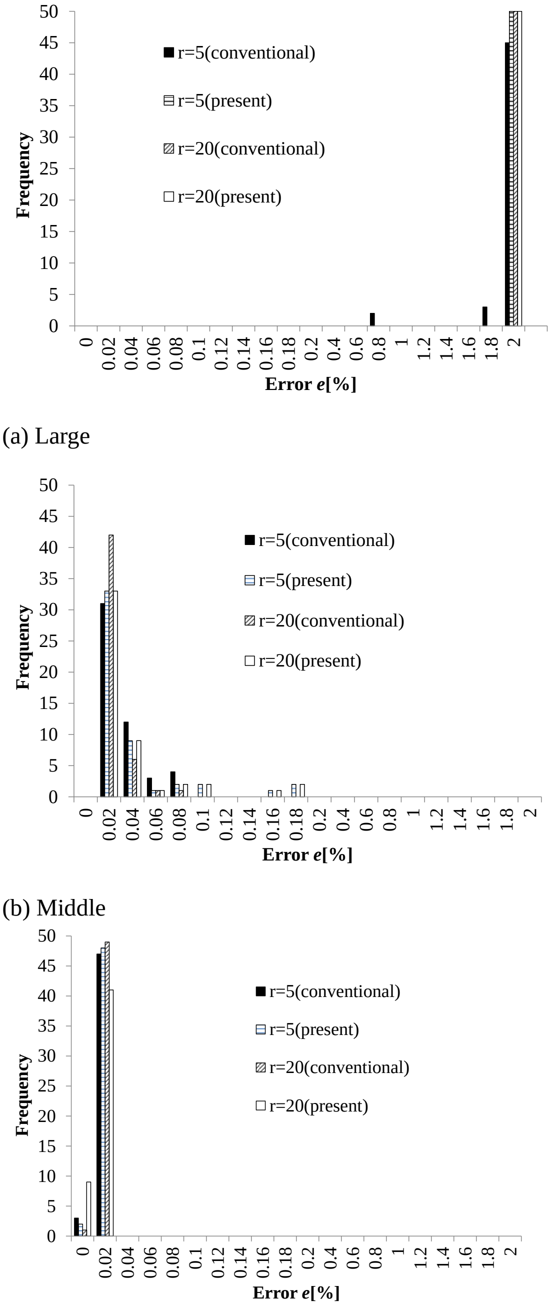
Fig.4 に示す．縮約領域を Fig.2 の(a)のように取った場合(large)では，設計パラメータの変更により電磁界が大きな影響を受けるため, 多様な電磁界分布がスナップショットされる. この場合には, 特異値がなだらかに減少している. 一方で，Fig.2 の(b)，(c)のように取った場合，一つの主要な特異ベクトルがあり, 他の特異値がほぼ一定なことが見て取れる． これは(b)，(c)の場合には縮約を行う領域の電磁界の変化が小さいためと考えられる.

3.1.2　解析時間

つぎに解析時間の議論を行う. 通常の有限要素法の解析時間に対するモデル縮約法の計算時間の比(%表示)を Table. 1 に示す． これより縮約領域が小さくなればなるほど解析時間が長くなっていることが確認できる. これは縮約領域を小さくすることで未知数が増加するためと, 以下で述べるように ICCG の収束性が悪化するためである. また提案手法((12)式による縮約)を用いることで計算時間が短くなっていることが確認できる．しかし，提案手法においても基底ベクトル数の増加により, 解析時間が大幅に増加していることが確認できる．Fig.5 に各解析結果における ICCG 法の収束特性を示す．Fig.5(b)，(c)において，基底ベクトルが 20 のとき，提案手法を用いることにより，ICCG 法の収束特性が改善していることが確認できる．一方，基底ベクトルの数が 5 のとき，ほとんど収束性に改善がみられていない．また，Fig.3 の(a)の場合では，基底ベクトルの数，手法を変えても，収束回数はほとんど変わっていない.

3.2　渦電流場の場合

つぎに，渦電流場(周波数 f=200Hz)を考える．電磁シールドの導電率は 5×10^6 S/m と仮定した．また，渦電流を考慮した有限要素法を用いた場合，スカラーポテンシャルは，導電率を持った物体の節点に与えられるため，形状を



(a) Large

(b) Middle

(c) Small

Fig. 3. Cumulative frequency of error for conventional and present method when f=0.

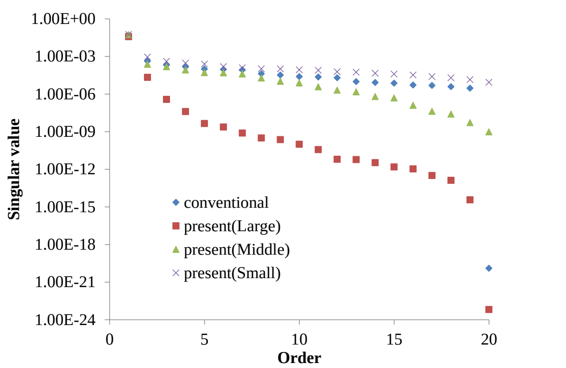
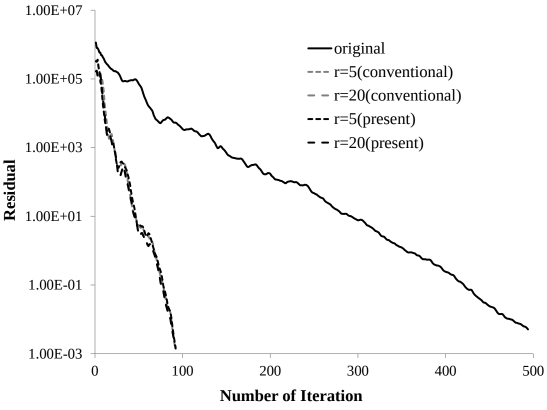
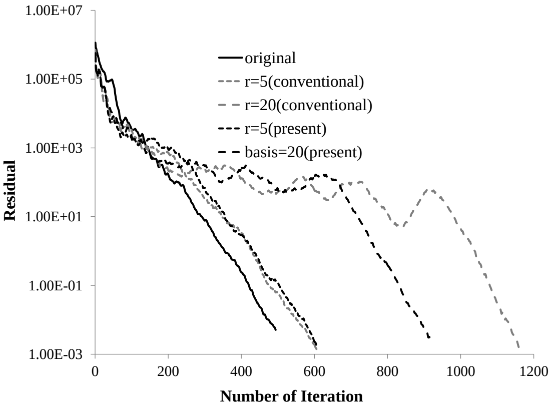


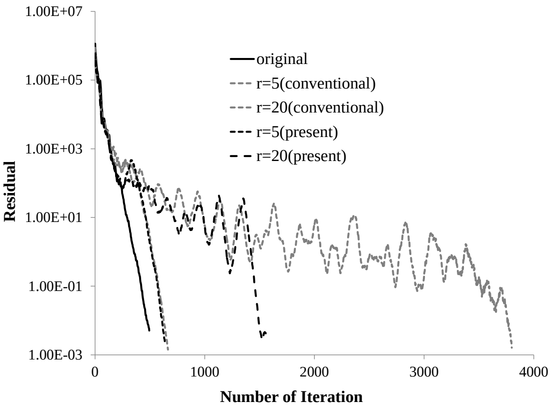
Fig. 4. Singular values obatained from eqs. (6) and (11).



(a) Large



(b)Middle



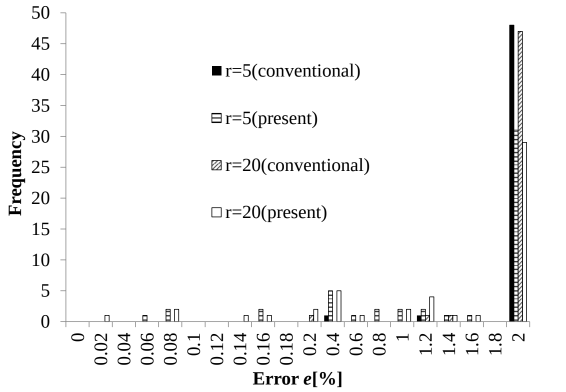
(c)Small

Fig. 5. Residual of ICCG method when f=0 Hz

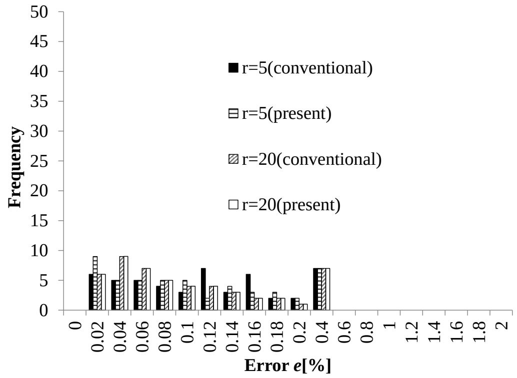
変化させたとき，未知変数の数が変化してしまう．そのため，スカラーポテンシャルを含めた基底を構成することが難しい．そこで，本研究ではスカラーポテンシャルは，縮約領域内に配置されていても縮約を行わないこととする．このため，縮約後の未知数はそれぞれ，(a) 25,603，(b)82,800，(c)192,075 に基底ベクトル数 5，20 および磁気シールドの節点数を足した数となる．

3.2.1　解析精度

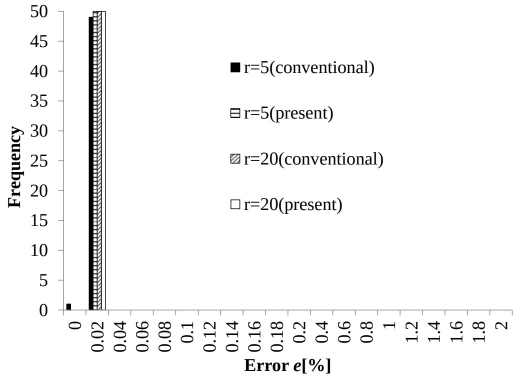
静磁界解析の場合と同様に，設計変数を変化させ，様々な形状に対して 50 回解析を行った．Fig.3 の縦軸同様，Fig. 5 の縦軸は 50 回解析行ったときの誤差 e の度数分布で



(a) Large



(b) Middle



(c) Small

Fig. 6. Cumulative frequency of error for conventional and present method when f=200Hz.

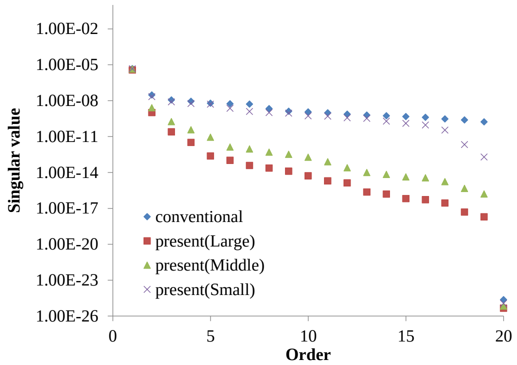
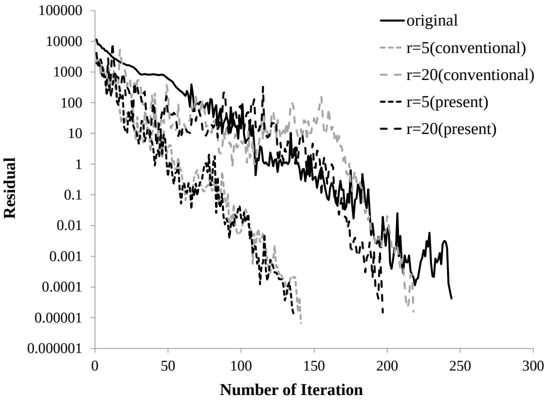
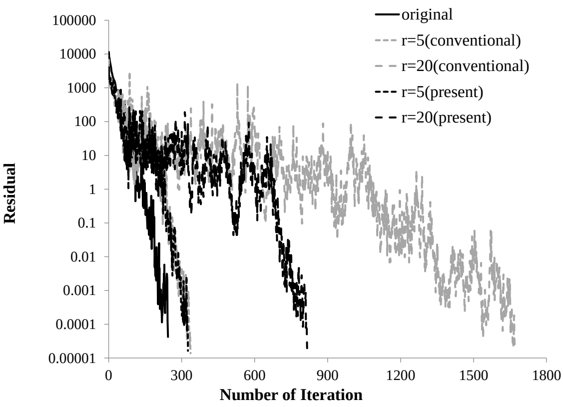


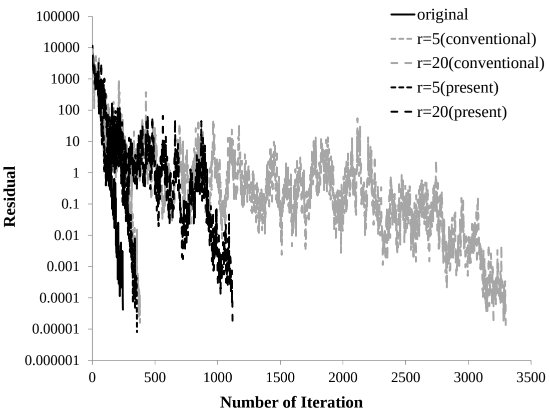
Fig. 7 Singular values obatained from eqs. (6) and (11).



(a) Large



(b)Middle



(c) Small

Fig. 8. Residual of ICCG method when *f*=200Hz.

ある．また，解析精度 e は(13) 式から求めた．Fig.6 に縮約領域の選び方による解析精度の依存性を示す. 静磁界の場合と同様，縮約領域を小さくすることにより，誤差が小さくなっている．Fig.7 に特異値分布を示す．渦電流問題の場合には，large と middle の場合に，少数の主要な特異値があることがわかる.

3.2.2 解析時間

Table 2 より，静磁場のときと同様，提案手法を用いることで計算時間を短縮できることが確認できるが, モデル縮約による計算時間短縮の効果が静磁界の場合と比べて小さい．特に，計算精度が比較的良好な (b), (c)の場合には, モデル縮約法による計算時間短縮がほとんどなされておらず, 逆に通常の有限要素解析よりも計算時間が増加する場合もある．Fig.8 に ICCG 法の収束特性を示す．提案手法を用いることで，ICCG 法の収束性を改善できることがわかる．しかし ICCG 法の収束性をさらに改善しなければモデル縮約法の有効性は期待できないと思われる.

4. 結語

本稿では, モデル縮約法を電磁機器の形状最適化へ適用することを想定し, 部分領域を縮約する部分領域モデル縮約法の効果を検討した．この結果，縮約領域をデザイン領域の周辺に設定することで, 比較的短い計算時間で精度の高い解を得られることがわかった．一方，デザイン領域の遠方の比較的狭い部分に縮約領域を取ると, 計算時間が増加する. またデザイン領域に重なるように縮約領域を設定すると，機器形状の変化の影響を受けるため，計算精度が劣化する．このことから，縮約領域はデザイン領域を囲むように取ることが適切であると考えられる．また，部分領域モデル縮約法の ICCG 法の収束特性は，提案手法を用いることで短縮することができた．しかし，特に渦電流問題の場合には大幅な計算時間の短縮はできておらず, 今後の課題の一つである．今後は，本手法を電磁機器の形状最適化に適用を行う予定である.

参考文献

(1) B. Mirzaeian, et al, "Multiobjective optimization method based on a genetic algorithm for switched reluctance motor design," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 3, pp. 1524–1527, May 2002.

(2) Y. Watanabe, K. Watanabe and H. Igarashi, "Optimization meander line antenna considering coupling between non-linear circuit and electromagnetic waves for UHF-band RFID," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 47, no.5, pp 1506-1509, May 2011.

(3) K. Watanabe, et al, "Optimization of Inductors Using Evolutionary Algorithms and Its Experimental Validation," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 3393–3396, Aug. 2010.

(4) D. Schmidthäusler and M. Clemens, "Low-Order Electroquasistatic Field Simulations Based on Proper Orthogonal Decomposition," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, no. 2, pp, 567-570, Feb. 2012.

(5) Y. Sato, H. Igarashi, "Model Reduction Based on the Method of Snapshots for Eddy Current Problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 49, no. 5, pp. 1697-1700, May, 2013.

(6) D. Schmidthäusler, S. Schöps and M. Clemens, "Reduction of Linear Subdomain for Non-Linear Electro-Quasistatic Field Simulations," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 49, no. 5, pp. 1669-1672, May, 2013.

(7) Y. Sato, H. Igarashi, "Model Order Reduction Applied to Optimization of Electromagnetic Devices," *Proceedings of ISTET2013*, Pilsen, Czech Republic, June, 2013.

(8) H. Igarashi, T. Honma, "On Convergence of ICCG Applied to Finite-Element Equation for Quasi-Static Fields," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 2, March, 2002.