計算数理工学論文集 Vol. 13 (2013 年 11 月)，論文 No. 16-131129 JASCOME

縮退モードを有する電磁波導波路伝搬特性のハイブリッドトレフツ有限要素解析法

HYBRID TREFFTZ FINITE ELEMENT ANALYSIS OF DEGENERATE MODES PROPAGATING IN AN ELECTROMAGNETIC WAVEGUIDE

森田　好人 [1)]，佐藤　慎悟 [2)]，長谷川　弘治 [3)]，嶋田　賢男 [4)]

Yoshihito MORITA, Shingo SATO, Koji HASEGAWA and Takao SHIMADA

1) 室蘭工業大学大学院工学研究科 (〒 050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: s1924209@mmm.muroran-it.ac.jp)
2) 室蘭工業大学大学院もの創造系領域 (〒 050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: satoshingo@mmm.muroran-it.ac.jp)
3) 室蘭工業大学大学院もの創造系領域 (〒 050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: khasegaw@mmm.muroran-it.ac.jp)
4) 津山工業高等専門学校電気電子工学科 (〒 708-8509 津山市沼 624-1, E-mail: shimada@tsuyama-ct.ac.jp)

We reported a hybrid Trefftz finite element method(HTFEM) with Sakurai-Sugiura projection method(SSM) for mode analysis of electromagnetic waveguides with degenerate modes such as multi-core fibers and hollow-core holey-fibers; firstly, we presented a hybrid Trefftz element formulation of a uniform waveguide along the electromagnetic wave propagation direction. Secondly, in order to compute all complex propagation constants of degenerate and non-degenerate modes simultaneously, we replaced SSM for non-degenerate eigenvalue problems by SSM for degenerate eigenvalue problems. Lastly, we demonstrated validity of HTFEM by comparing analytic solutions and numerical results of degenerate and non-degenerate modes propagating in a cylindrical dielectric waveguide.

Key Words: Hybrid Trefftz Finite Element Method, Sakurai-Sugiura Projection Method, Electromagnetic Waveguide, Nonlinear Eigenvalue Problem, Degenerate Mode

1. はじめに

近年の通信の高速化と大容量化によりマルチコア光ファイバ，フォトニック結晶ファイバなどの光デバイスの研究が盛んに行われ，同時にこれらの光デバイスに対する数値解析法の高速化，高精度化が求められている．

導波モードの数値解析法として汎用性の高い有限要素法（Finite Element Method:FEM）がある．FEM は領域分割型の解析法であるため，解析領域を有限としなければならず，無限領域を解析する場合に何らかの工夫が必要となる．この工夫のひとつが，電磁波が伝搬するにつれ減衰する仮想材料を充填した完全整合層（Perfectly Matched Layer:PML）[(1)〜(3)] を装荷することで解析領域を有限化する方法である．界分布を調べる有限領域と無限領域を模擬する PML との境界で無反射となるように，PML 材料の減衰パラメータ，PML 層厚みや設置位置などを問題毎に調整決定する必要がある．また，PML 領域を有限要素分割するため，吸収境界条件などのインピーダンス条件と比べ，最終的に解く行列方程式の次元数が増大する．

いま一つの工夫として，無限領域用の特殊な要素を用いる方法がある．この中でも，著者らは，系の支配方程式を満足する関数を補間関数とするトレフツ要素を利用するハイブリッドトレフツ有限要素法（Hybrid Trefftz Finite Element Method:HTFEM）の検討を進めている [(4)〜(6)]．

トレフツ要素は，無限領域の汎関数を接続境界上の節点間の行列関係式で与えるので，PML が無限領域を要素分割するのに比べ，最終的に解く行列固有値問題の次元数を小さくでき，支配方程式を満足する関数で補間するので PML 内の多項式補間に比べ数値分散が小さくなることが期待できる．しかしながら，PML を使用した場合のように，各種の効率的解法が利用可能な一般化線形固有値問題に帰着せず，正則な行列関数の非線形固有値問題となる．この非線形固有値問題の効率的な解法として，複素平面上の周回積分路内の全固有値とその固有ベクトルが求まる Sakurai-Sugiura projection method（SS 法）[(7)〜(9)] を試してきた．周期構造導波路の漏洩モードを解析対象として [(4)〜(6)]，SS 法に起因して混入す

2013 年 9 月 13 日受付，2013 年 10 月 23 日受理

る解の判別方法を検討し，導波モード特性の HTFEM 解析が可能であることを報告した [6]．しかしながら，これまでは，アルゴリズムが簡便な非ブロック版 SS 法を使用して，非縮退固有値のみを計算していた．

マルチコア光ファイバ，フォトニック結晶ファイバような縮退モードを有する伝搬問題へ適用するためには，縮退固有値を含めて解析するブロック版 SS 法に変更する必要がある．また，無限領域用の波動関数を，電磁波の伝搬方向に周期性を有する空間高調波から，導波路の横断面内で周期性を有する波動関数へ変更する必要がある．

本論文では，縮退モードを含んだ導波モード解析が可能な HTFEM 解析法の開発を目指して，トレフツ要素の補間関数として円筒座標系の変数分離解であるベッセル関数からなる波動関数を用い，非線形固有値問題の解法としてブロック版 SS 法を使用した HTFEM 解析法の定式化を報告する．また単純な構造で縮退モードを有する円筒誘電体導波路を例に数値計算を行い，解析解との比較により本解析法の妥当性を示す．

2. 定式化

はじめに，モード解析の概略について述べた後，円筒座標系の波動関数を補間関数とするトレフツ要素の定式化を示す．次に，本解析で使用する縮退固有値問題向けのブロック版 SS 法について述べる．

2.1. 伝搬方向に一様な導波路のモード解析法の概要

Fig.1 に示す断面構造で z 軸方向に一様で無限に長い誘電体導波路に，長さ方向に電磁波を導波する場合を考える．全領域を誘電体とし，比透磁率を 1 とする．円筒座標系 (r,ϕ) を用いて，有限領域 $\Omega_1(0 \le r \le a_1)$，コア，ホールなどの構造を断面に含む不連続領域 $\Omega_d(a_1 \le r \le a_2)$，半無限領域 $\Omega_2(a_2 \le r)$ に三分割する．領域 $\Omega_i(i=1,2)$ は，比誘電率が ϵ_i の一様均質な誘電体，領域 Ω_d は比誘電率が位置の関数 $\epsilon_d(x,y)$ の誘電体である．構造の z 軸方向一様性から，被導波の複素伝搬定数を γ，角周波数を ω とすると，界の z 軸方向依存性は，$\exp\{\mathrm{j}(\omega t-\gamma z)\}$ となる．ここに，j は虚数単位である．このため，導波路断面の 2 次元領域の電磁界分布に HTFEM を適用することで，複素伝搬定数を固有値，電界分布あるいは磁界分布を固有ベクトルとする行列方程式を得るので，この方程式を SS 法で解くことでモード解析ができる．要素分割は従来と同様に，不連続領域 $\Omega_d(a_1 \le r \le a_2)$ にベクトル要素を，一様な領域 $\Omega_1(0 \le r \le a_1)$，$\Omega_2(a_2 \le r)$ にトレフツ要素を用いる．ベクトル要素は，伝搬定数の有限要素解析に用いる通常のベクトル要素であり，説明を省略する．次節で導波路断面を解析するためのトレフツ要素の定式化を説明する．

2.2. 伝搬方向に一様な導波路のトレフツ要素

ここでは磁界を未知量とするトレフツ要素の定式化のみを示す．電界を未知量とする場合については，別途報告する．

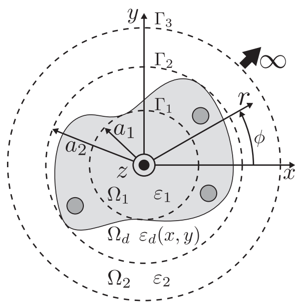


Fig. 1　Cross section of a dielectric waveguide

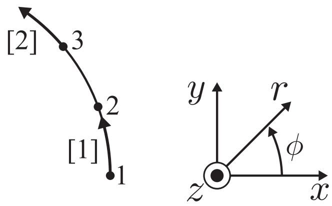


Fig. 2　Line element with 2-edges and 3-nodes

Fig.1 に示す一様な領域 $\Omega_i(i=1,2)$ の汎関数 I_i は

$$
\begin{aligned}
I_i = \frac{1}{2\epsilon_i}\int_{\Gamma_i}\left[\hat{n}\cdot(\nabla\times\vec{H}\times\vec{H}^t+\nabla\times\vec{H}^t\times\vec{H})\right]ds \\
-\frac{1}{\epsilon_i}\int_{\Gamma_i}\left[\hat{n}\cdot(\nabla\times\vec{H}\times\vec{\tilde{H}}^t+\nabla\times\vec{H}^t\times\vec{\tilde{H}})\right]ds \qquad (1)
\end{aligned}
$$

である．ここに，$\vec{H}$ は磁界ベクトルである．$\hat{n}$ は単位法線ベクトルであり，円筒座標系の動径方向 r の単位ベクトル $\hat{r}$ を用いると I_1，I_2 でそれぞれ $\hat{r}$，$-\hat{r}$ となる．上添字 t は転置界 [10] であることを示す．第二積分項は隣接領域との界の連続条件を緩和する項で，$\vec{\tilde{H}}$ は境界 Γ_i 上の磁界である．

TE 波と TM 波が混成するハイブリッドモードを考え，波動方程式の変数分離解が簡単に求まる電磁界の伝搬方向成分を使用する通常の導波路解析 [11] に従い，真空中の波数を k_0 とする円筒座標系の波動方程式

$$
\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+(k_0^2\epsilon_i-\gamma^2)\right]\begin{pmatrix}H_z\\E_z\end{pmatrix}=0 \qquad (2)
$$

を満足するように，領域 $\Omega_i(i=1,2)$ 内の磁界と電界の伝搬方向成分 H_z と E_z を

$$
H_{z,i}=\sum_{n=-M_c}^{M_c}A_{n,i}F_{n,i}(\kappa_i r)\exp(\mathrm{j}n\phi)\exp(-\mathrm{j}\gamma z), \qquad (3)
$$

$$
E_{z,i}=\sum_{n=-M_c}^{M_c}B_{n,i}F_{n,i}(\kappa_i r)\exp(\mathrm{j}n\phi)\exp(-\mathrm{j}\gamma z) \qquad (4)
$$

と空間高調波展開する．ここに，M_c は展開の打ち切り項数，$A_{n,i},B_{n,i}$ は展開係数である．$F_{n,i}(\kappa_i r)$ は領域 Ω_1 では n 次の第一種ベッセル関数 J_n，領域 Ω_2 では n 次の第二種変形ベッセル関数 K_n である．κ_1,κ_2 はそれぞれ領域 Ω_1,Ω_2 の断面内波数であり，

$$
\kappa_1=\sqrt{k_0^2\epsilon_1-\gamma^2}, \qquad (5)
$$

$$
\kappa_2=\sqrt{\gamma^2-k_0^2\epsilon_2} \qquad (6)
$$

である．κ_2 は

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\{\kappa_2\} > 0 \quad \text{if} \quad \mathrm{Re}\{\kappa_2^2\} \geq 0,\\ &\mathrm{Im}\{\kappa_2\} < 0 \quad \text{otherwise}\end{aligned} \tag{7}$$

となるように選ぶ．磁界の r 成分と ϕ 成分は H_z と E_z を用いて

$$H_r = \frac{\mathrm{j}}{k_0^2\epsilon_i - \gamma^2}\left(\frac{k_0\epsilon_i}{\eta_0 r}\frac{\partial E_z}{\partial\phi} - \gamma\frac{\partial H_z}{\partial r}\right), \tag{8}$$

$$H_\phi = \frac{-\mathrm{j}}{k_0^2\epsilon_i - \gamma^2}\left(\frac{k_0\epsilon_i}{\eta_0}\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\gamma}{r}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}\right) \tag{9}$$

と表せる．ここに，η_0 は真空中の固有インピーダンスである．

Fig.2 に示す 3 節点 2 辺線要素を用いてトレフツ要素の境界 Γ_i をベクトル要素に分割する．境界 Γ_i が円弧なので，Γ_i 上の磁界ベクトル $\vec{\tilde{H}}$ は辺上での H_ϕ 成分と節点上での H_z 成分の 2 成分であり，

$$\tilde{H}_\phi = \{V\}^T\{\tilde{H}_\phi\}_e, \tag{10}$$

$$\tilde{H}_z = \{N\}^T\{\tilde{H}_z\}_e \tag{11}$$

と多項式補間できる．ここに，$\{V\}$，$\{N\}$ は ϕ，z 成分の多項式補間関数からなる列ベクトルであり，$\{\tilde{H}_\phi\}_e$，$\{\tilde{H}_z\}_e$ はそれぞれ磁界の ϕ，z 成分からなる列ベクトルである．上添字 T は転置をとることを表す．

式 (1) に式 (3)，(4)，(8)〜(11) を代入すると，離散化した汎関数 I_i は

$$I_i = \{D_i^t\}^T[G_i]\{D_i\} + \{\tilde{H}_i{}^t\}^T[L_i]\{D_i\} + \{D_i^t\}^T[L_i^t]\{\tilde{H}_i\} \tag{12}$$

となる．ここに，$\{D_i\}$ は展開係数を要素とする列ベクトル $\{A_{n,i}\}$，$\{B_{n,i}\}$ からなる列ベクトル

$$\{D_i\} = \begin{bmatrix}\{A_{n,i}\}^T & \{B_{n,i}\}^T\end{bmatrix}^T \tag{13}$$

である．$\{\tilde{H}_i\}$ は Γ_i 上の離散点上の全未知磁界からなる列ベクトルである．また，

$$[G_i] = \begin{bmatrix}[G_{AA,i}] & [0]\\ [0] & [G_{BB,i}]\end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$[L_i] = \begin{bmatrix}[0] & [L_{B\phi,i}]\\ [L_{Az,i}] & [L_{Bz,i}]\end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$[L_i^t] = \begin{bmatrix}[0] & [L_{Az,i}^t]\\ [L_{B\phi,i}^t] & [L_{Bz,i}^t]\end{bmatrix} \tag{16}$$

である．$[G_i]$ の各小行列は対角行列であり，その (j,j) 成分は，

$$G_{AA,i(j,j)} = -\frac{2\pi a_i k_0^2}{\kappa_i}F_{-n,i}(\kappa_i a_i)F'_{n,i}(\kappa_i a_i), \tag{17}$$

$$G_{BB,i(j,j)} = \frac{2\pi a_i\epsilon_i k_0^2}{\eta_0^2\kappa_i}F_{-n,i}(\kappa_i a_i)F'_{n,i}(\kappa_i a_i) \tag{18}$$

である．ここに，$n = -(M_\mathrm{c} - j + 1)$ であり，$F'_{n,i}(\kappa_i a_i)$ は $F_{n,i}(\kappa_i a_i)$ の $(\kappa_i a_i)$ に関する偏導関数である．$[L_i]$ の各小行列は

$$[L_{B\phi,i}] = \int_{\Gamma_i}\{V\}\{\xi_{n,i}\}ds, \tag{19}$$

$$[L_{Az,i}] = \int_{\Gamma_i}\{N\}\{\eta_{n,i}\}ds, \tag{20}$$

$$[L_{Bz,i}] = \int_{\Gamma_i}\{N\}\{\zeta_{n,i}\}ds \tag{21}$$

であり，$\xi_{n,i}$，$\eta_{n,i}$，$\zeta_{n,i}$ は

$$\xi_{n,i} = \frac{\mathrm{j}k_0 s_i}{\eta_0}F_{n,i}(\kappa_i r)\exp(\mathrm{j}n\phi), \tag{22}$$

$$\eta_{n,i} = \frac{k_0^2}{\kappa_i}F'_{n,i}(\kappa_i r)\exp(\mathrm{j}n\phi), \tag{23}$$

$$\zeta_{n,i} = -\frac{\mathrm{j}k_0\gamma n}{\eta_0\kappa_i^2 r}F_{n,i}(\kappa_i r)\exp(\mathrm{j}n\phi) \tag{24}$$

である．式 (22) 内の s_i は領域 Ω_1 の場合 1，領域 Ω_2 の場合 -1 である．なお，式 (16) は式 (15) の転置界に対応するもので，ここでは省略する．

式 (12) は展開係数ベクトルと磁界ベクトルが未知量であることに注意して，はじめに展開係数ベクトルについて変分を取り，得られた関係式を用いると式 (12) は

$$I_i = \{\tilde{H}_i{}^t\}^T[L_i][G_i]^{-1}[L_i^t]\{\tilde{H}_i\} \tag{25}$$

となる．最後に $\{\tilde{H}_i{}^t\}$ について変分を取ると，最終的な全体行列方程式への領域 Ω_i からの寄与分

$$[L_i][G_i]^{-1}[L_i^t]\{\tilde{H}_i\} = \{0\} \tag{26}$$

を得る．

2.3. ブロック版 SS 法の概要

HTFEM の定式化により得られる非線形固有値問題

$$[T(\gamma)]\{\tilde{H}\} = \{0\} \tag{27}$$

を SS 法により解くことを考える．ここに，複素伝搬定数 γ が固有値であり，$[T(\gamma)] \in \mathbb{C}^{N\times N}$ は解析領域内の全ベクトル要素ならびにトレフツ要素からの寄与分を重ね合わせて構成される複素平面上の行列関数で，その行列式が零とならない γ で正則である．各列ベクトルが互いに独立な任意の N 行 L 列の行列 $[V] \in \mathbb{C}^{N\times L}$ を用いて L 行 L 列の行列関数 $[f(\gamma)]$ を

$$[f(\gamma)] = [V]^H[T(\gamma)]^{-1}[V] \tag{28}$$

と定義する．ここに，上添字 H はエルミート共役であることを示す．$L = 1$ の場合が非ブロック版 SS 法 (4)〜(6) となる．

この $[f(\gamma)]$ の複素モーメント行列 $[\mu_k]$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を，正の向きをもつ複素平面上の Jordan 曲線 $\check{\Gamma}$ 上の周回積分

$$[\mu_k] = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\check{\Gamma}}\gamma^k[f(\gamma)]d\gamma \tag{29}$$

で定義する．周回積分路 $\check{\Gamma}$ を中心 o，半径 ρ の円として，式 (29) の γ^k を $\{(\gamma - o)/\rho\}^k$ に置換し，台形則による数値積分で，

$$[\hat{\mu}_k] = \frac{\rho}{N_s}\sum_{h=0}^{N_s-1}\left(\frac{c_h - o}{\rho}\right)^{k+1}[f(c_h)] \tag{30}$$

と評価する．ここに，積分点 $c_h = o + \rho \exp\{\frac{2\pi \mathrm{j}}{N_s}\left(h + \frac{1}{2}\right)\}$ は周回積分路 $\check{\Gamma}$ 上の N_s 個の等間隔点である．数値積分した複素モーメント行列 $[\hat{\mu}_k]$ を用いて Hankel 行列 $[\hat{H}_{ML}]$ とその成分をシフトした行列 $[\hat{H}^{<}_{ML}]$ を，それぞれ

$$[\hat{H}_{ML}] = \begin{bmatrix} [\hat{\mu}_0] & [\hat{\mu}_1] & \cdots & [\hat{\mu}_{M-1}] \\ [\hat{\mu}_1] & [\hat{\mu}_2] & \cdots & [\hat{\mu}_M] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\hat{\mu}_{M-1}] & [\hat{\mu}_M] & \cdots & [\hat{\mu}_{2M-2}] \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$$[\hat{H}^{<}_{ML}] = \begin{bmatrix} [\hat{\mu}_1] & [\hat{\mu}_2] & \cdots & [\hat{\mu}_M] \\ [\hat{\mu}_2] & [\hat{\mu}_3] & \cdots & [\hat{\mu}_{M+1}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\hat{\mu}_M] & [\hat{\mu}_{M+1}] & \cdots & [\hat{\mu}_{2M-1}] \end{bmatrix} \quad (32)$$

と構成すると，求めたい $[T(\gamma)]$ の近似固有値 $\hat{\gamma}_l$ $(l = 1, 2, \cdots, m)$ は，一般化固有値問題

$$([\hat{H}^{<}_{ML}] - \zeta[\hat{H}_{ML}])\{w\} = \{0\} \quad (33)$$

の固有値 $\hat{\zeta}_l$ を用いて，

$$\hat{\gamma}_l = o + \rho\hat{\zeta}_l \quad (34)$$

と求められる．ここに，Hankel 行列の次数はモーメント数 M と L の積 ML である．周回積分路内部の固有値の個数 m は先験的に不明なので L と M は以下のように定める．まず，周回積分路内部の最大縮退固有値数よりも十分大きくなる L を推定し決定する．次に，周回積分路内部に存在する全固有値 m よりも十分大きくなる $ML \geq m$ から M を推定し決定する．なお，非ブロック版 SS 法では，$L = 1$ なので $M \geq m$ である．

式 (33) を解き，SS 法に起因する混入解を判別，除去する手続きは，前報告 [(6)] と同様となる．このため，以下には判別に用いる指標の計算式のみを述べる．まず，P_{ll} は，一般化 schur 分解した $[\hat{H}_{ML}] = [Q][P][Z]^H$ の上三角行列 $[P]$ の対角成分である．ここに，$[Q]$，$[Z]$ はユニタリ行列である．次に，F_l 値 [(12)] は

$$F_l = |\{\hat{v}\}^H_l[\hat{H}^{<}_{ML}]\{\hat{w}\}_l|^2 + |\{\hat{v}\}^H_l[\hat{H}_{ML}]\{\hat{w}\}_l|^2 \quad (35)$$

と計算する．ここに，$\{\hat{v}\}_l$，$\{\hat{w}\}_l$ は式 (33) の求めた固有値 $\hat{\zeta}_l$ に対応する左，右固有ベクトルである．

3. 数値計算例

本節では，トレフツ要素のみで分割可能な構造で，縮退モードが伝搬し，解析解を有する Fig.3 に示す円筒誘電体導波路を考える．Fig.1 の導波路において，不連続領域を取除き（$a_1 = a_2 = a$），比誘電率 $\epsilon_1 = 2.5$，$\epsilon_2 = 1$ としたものである．ここで示す計算結果は，導波路の 2 領域をそれぞれ 1 個のトレフツ要素で分割した．SS 法から導かれる固有値問題の係数行列では 0,1,2 次のモーメント（$M = 2$）を一次独立な 4 つの列ベクトル（$L = 4$）について計算しており，全 8 個の固有値を算出する．なお，L は，次のように定めた．構造の対称性から，ϕ 方向に 90 度だけ回転した界分布の固有値が縮退する．また調べる範囲で，TM_{01} と HE_{21} あるいは HE_{12} と HE_{31} が縮退する場合があることが分っているので，L =(対称性の 2) × (モード縮退数の 2)= 4 とする．本節では求めた界分布を示さないが，モードの判定に利用しており，解析解と一致することを重なり積分により確かめている．

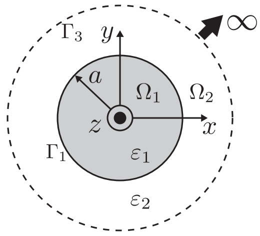
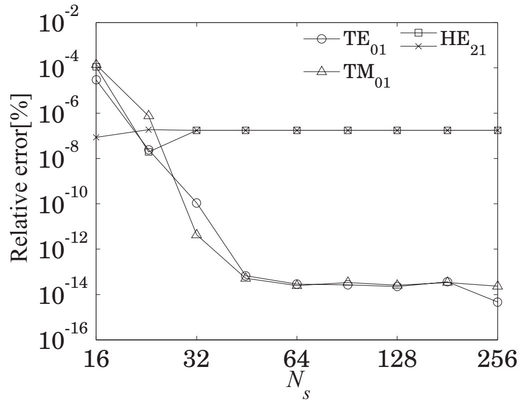
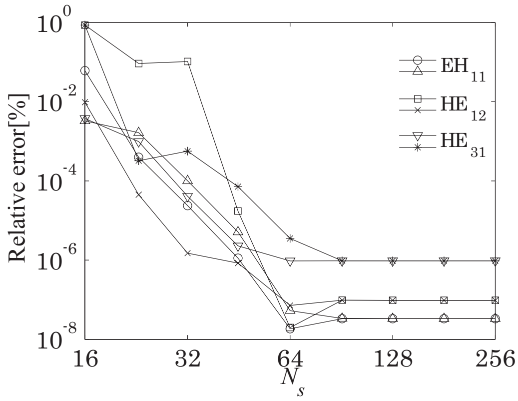


Fig. 3 Cross section of a cylindrical dielectric waveguide



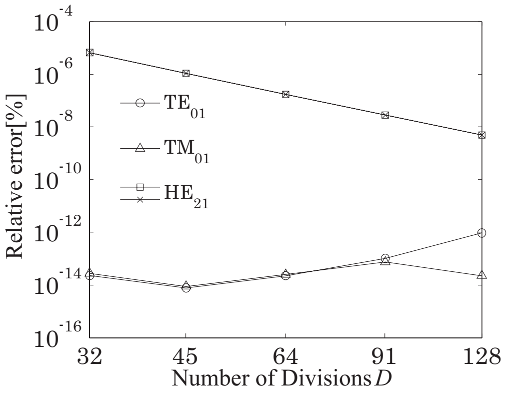
(a) $k_0a = 3.0943817$



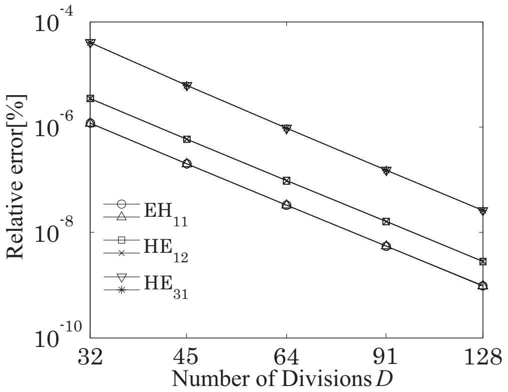
(b) $k_0a = 3.6870863$

Fig. 4 Dependence of the relative errors of the phase constant β on number of subintervals in eq.(30) N_s

Fig.4 は，HTFEM で算出した位相定数 $\beta_h = \mathrm{Re}\{\hat{\gamma}_l\}$（複素伝搬定数の実部）と解析解 γ_a との相対誤差 $|\frac{\beta_h}{\gamma_a} - 1|$ の積分点数 N_s 依存性を調べたものである．Fig.4(a) は TM_{01}，HE_{21} モードが縮退する $k_0a = 3.0943817$ について調べたもので，Fig.4(b) は HE_{12}，HE_{31} モードが縮退する $k_0a = 3.6870863$ について調べたものである．HTFEM の計算では，境界 Γ_1 を 64 等分割，空間高調波展開の打切り項数 M_c を 64 として，

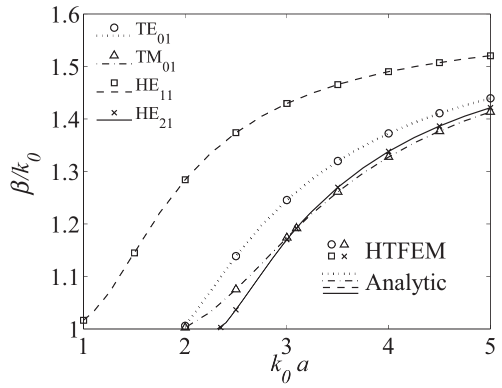


(a) $k_0a = 3.0943817$

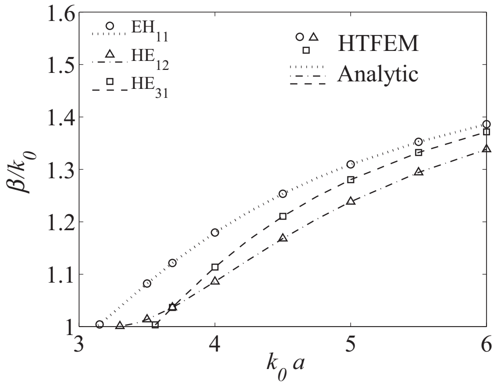


(b) $k_0a = 3.6870863$

Fig. 5 Dependence of the relative errors of the phase constant β on number of divisions D



(a) HE_{11}，TE_{01}，TM_{11}，HE_{21} modes



(b) EH_{11}，HE_{12}，HE_{31} modes

Fig. 6 Dispersion characteristics of a cylindrical dielectric waveguide

SS 法では積分路の円の半径を $\rho/k_0 = 0.1$，中心を Fig.4(a) では $o/k_0 = 1.2$, Fig.4(b) では $o/k_0 = 1.12$ とした．求解範囲となる円内では，(a) では TE_{01}，TM_{01}，HE_{21} モード，(b) では EH_{01}，HE_{12}，HE_{31} モードが伝搬する．N_s が増加すると，HTFEM で求めた結果はいずれも，一定値に収束している．解が解析解に近づかないのは，トレフツ要素の接続境界 Γ_1 の分割数を $D = 64$，空間高調波展開の打ち切り項数を $M_\mathrm{c} = 64$ と一定値としたためである．とくに HE_{21} モードでは，図示した範囲の N_s に依らず一定となっているが，これは D，M_c が 64 での収束値に既に達しているためである．また，界分布を式 (3),(4) で展開したので，左回りと右回りの界が存在するために HE_{21}，EH_{11}，HE_{12}，HE_{31} モードは 2 つの解が求まっている．

次に，Fig.4 に示したように，算出した位相定数が収束した $N_s = 128$ に積分点数を固定し，接続境界の分割数 D と打切りモード項数 M_c を同じ値として，値 $D = M_\mathrm{c}$ を変えて相対誤差 $|\frac{\beta_h}{\gamma_a} - 1|$ を調べた結果を Fig.5 に示す．なお積分路は，Fig.4 に示した場合と同一である．Fig.5(a) の TE_{01} と TM_{01} の縮退モードを除くと，残りの 4 つのモードの位相定数の誤差は，単調に減少している．図示した 5 点で直線近似すると，分割数 D のおよそ -5.2 乗で収束していることがわかる．TE_{01}，TM_{01} の縮退モードの誤差は，D に依らず 10^{-13}% 程度となっている．これは解の誤差が倍精度演算の誤差程度となっているためと考えられる．

Fig.6 は，分散曲線を調べたものである．ここで，$D = 64$, $M_\mathrm{c} = 64$，$N_s = 128$ として，積分路の円の中心と半径を，解が円内部に位置するように適宜変更した．位相定数 β の計算結果は，いずれのモードでも，解析解と一致している．

周期構造導波路の伝搬特性を解析した場合と同様に，一様導波路の伝搬特性解析でも，SS 法に起因する解が混入する．縮退モードが伝搬する $k_0a = 3.0943817$，$k_0a = 3.6870863$ の 2 つの場合について，求まる 8 個の複素伝搬定数 $\hat{\gamma}_l/k_0$ を Table 1 に示す．モード名が – のものは，SS 法により混入する非物理解であることを表し，† は SS 法の積分路の円内の解である．また表中の F_l，P_{ll} は 2.3 節で説明した判別のための指標の値である．縮退の有無にかかわらず，HTFEM による複素伝搬定数の計算結果と解析解の結果が一致している．ここでは示さないが，数値的に 8 桁以上の一致を確認している．また，非物理解に対応する F_l，P_{ll} は物理解に対応する F_l，P_{ll} よりも十分小さく，前報告 [(6)] と同様に，これらを指標として解の判別が可能であることがわかる．

4. むすび

導波軸方向に一様な電磁波導波路の解析法として，HTFEM

Table 1 Normalized eigenvalues $\hat{\gamma}/k_0$, F_l and P_{ll} for propagation characteristics in the cylindrical dielectric waveguide

(a) $k_0a = 3.0943817$, $o/k_0 = 1.2$, $\rho/k_0 = 0.1$

	HTFEM				Analytic
Mode		$\hat{\gamma}_l/k_0$	F_l	P_{ll}	γ_a/k_0
TE_{01}	†	$1.26175 + j5.15948 \times 10^{-17}$	4.13×10^{-2}	5.38×10^{-1}	1.26175
TM_{01}	†	$1.19173 - j3.03396 \times 10^{-16}$	3.56×10^{-2}	7.09×10^{-1}	1.19173
HE_{21}	†	$1.19173 - j1.16663 \times 10^{-14}$	1.24×10^{-5}	4.93×10^{-3}	1.19173
HE_{21}	†	$1.19173 + j3.42619 \times 10^{-15}$	2.53×10^{-5}	1.38×10^{-2}	1.19173
-	†	$1.27748 + j1.14703 \times 10^{-2}$	1.73×10^{-30}	2.57×10^{-15}	-
-	†	$1.22155 + j1.71083 \times 10^{-2}$	1.58×10^{-30}	7.89×10^{-15}	-
-		$1.18852 + j2.33648 \times 10^{-1}$	7.80×10^{-31}	6.29×10^{-16}	-
-		$1.07439 + j6.01875 \times 10^{-3}$	1.14×10^{-29}	2.31×10^{-15}	-

(b) $k_0a = 3.6870863$, $o/k_0 = 1.12$, $\rho/k_0 = 0.1$

	HTFEM				Analytic
Mode		$\hat{\gamma}_l/k_0$	F_l	P_{ll}	γ_a/k_0
EH_{11}	†	$1.12156 - j1.22282 \times 10^{-14}$	1.04×10^{-4}	1.22×10^{-2}	1.12156
EH_{11}	†	$1.12156 - j7.42678 \times 10^{-15}$	2.22×10^{-4}	2.16×10^{-2}	1.12156
HE_{12}	†	$1.03665 - j1.62447 \times 10^{-14}$	1.62×10^{-5}	2.42×10^{-2}	1.03665
HE_{12}	†	$1.03665 - j1.29023 \times 10^{-15}$	2.02×10^{-3}	7.99×10^{-2}	1.03665
HE_{31}	†	$1.03665 - j1.28905 \times 10^{-16}$	6.26×10^{-2}	1.29×10^{-1}	1.03665
HE_{31}	†	$1.03665 - j1.73553 \times 10^{-14}$	2.24×10^{-5}	1.51×10^{-2}	1.03665
-	†	$1.09302 - j4.96942 \times 10^{-2}$	6.182×10^{-30}	4.19×10^{-15}	−
-		$1.22255 - j4.11396 \times 10^{-2}$	1.21×10^{-29}	2.04×10^{-15}	−

の定式化を行い，円筒誘電体導波路を例に解析解との比較により，その妥当性を確認した．今後は，マルチコア光ファイバ，フォトニック結晶ファイバなどの伝搬定数解析を行う．

参考文献

(1) W.C. Chew and W.H. Weedon：A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates, Microwave and Optical Technology Letters, **7**(1994), pp. 599–604.

(2) W.C. Chew, J.M. Jin, and E. Michielssen：Complex coordinate stretching as a generalized absorbing boundary condition, Microwave and Optical Technology Letters, **15**(1997), pp. 363–369.

(3) F.L. Teixeira and W.C. Chew：Unified analysis of perfectly matched layers using differential forms, Microwave and Optical Technology Letters, **20**(1999), pp. 124–126.

(4) 森田好人，嶋田賢男，長谷川弘治，佐藤慎悟：開放型電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッド・トレフツ有限要素解析法，計算数理工学論文集，**10**(2010) pp. 87–92.

(5) 嶋田賢男，森田好人，長谷川弘治，佐藤慎悟：電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッドトレフツ有限要素解法への混入解，計算数理工学論文集，**11**(2011), pp. 1–6.

(6) 佐藤慎悟，森田好人，長谷川弘治，嶋田賢男：電磁波導波路非線形固有値問題の解の判別法（線形化問題の固有値あるいは固有値の感度を用いる方法），計算数理工学論文集，**12**(2012), pp. 31–36.

(7) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami, and K. Kimura：A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, Japan Society for Industrial and Applied Mathematics Letters, **1**(2009), pp. 52–55.

(8) T. Ikegami, T. Sakurai, and U. Nagashima：A filter diagonalization for generalized eigenvalue problems based on the Sakurai-Sugiura projection method, Journal of Computational and Applied Mathematics, **233**(2010), pp. 1927–1936.

(9) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami, and K. Kimura：A numerical method for polynomial eigenvalue problems using contour integral, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **27**(2010), pp. 73–90.

(10) L. Cairo and T. Kahan：Variational Techniques in Electromagnetism, (1965), Gordon and Breach.

(11) J.D. Jackson：Classical Electrodynamics, 3rd Ed., (1998), John Wiley & Sons, Inc.

(12) G.H. Golub and C.F. Van Loan：Matrix Computations, (1989), Johns Hopkins University Press.