

時間域均質化法を援用した拡張下負荷面モデルを用いた 繰り返し弾塑性解析

Cyclic deformation analysis using extended subloading surface elastoplastic model and time-domain homogenization method

大窪和輝¹⁾, 紅霧一寛²⁾, 阿部和久³⁾

Kazuki OHKUBO, Kazuhiro KORO and Kazuhisa ABE

- 1) 新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)
- 2) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp)
- 3) 新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp)

The time-domain homogenization method is formulated for the cyclic deformation analysis with the extended subloading surface elastoplastic model. The time-domain homogenization method is introduced to reduce the computational cost for the elastoplastic analyses under high-cycle loading. The multiple temporal scales of the stress, strain and several internal state variables are introduced, and the original constitutive equations are decomposed into coupled micro-chronological and macro-chronological equations using asymptotic expansion on the time scale parameter. The numerical tests is carried out to validate the present formulation and to investigate the influence of the discretization on the macro chronological variable to the error of the simulated results.

Key Words: time-domain homogenization, extended subloading surface model, railway ballast

1. はじめに

今日, 国内外の鉄道においては, バラスト道床が広く用いられている. バラスト道床は碎石粒子の集合体であり, まくらぎの下に敷設して列車の走行荷重の分散と騒音・振動の低減に対して安価で有効に機能する. しかし, 碎石粒子の集合体である力学的特性ゆえに, 列車の繰り返し走行・通過によって沈下等の残留変位が生じるため, バラスト道床部の残留変位のモニタリングと定量評価は, 軌道の維持管理上重視されている.

これまで, バラスト道床の繰り返し変形挙動を計算力学手法を積極的に用いて評価する試みはいくつかなされているが, その多くは不連続変形法 (DDA)⁽¹⁾ や個別要素法 (DEM)⁽²⁾ など, バラスト材を粒子集合体としてそのままモデル化する方法によるものである. 粒状体モデルは簡易なモデルでバラスト材の力学挙動を評価できる反面, 安定に解析計算を進めるためには大きな計算負荷を伴う欠点を有している. そこで著者らは, 繰り返し塑性変形挙動を表現可能な弾塑性モデルでモデル化し, バラスト道床に発生する残留変位や応力分布を有限要素法 (FEM) で評価する方法を提案し, その有効性について検討してきた. その中でも, 橋口らが提案した回転

硬化を考慮した拡張下負荷面モデル⁽³⁾ は, バラスト材・バラスト道床の繰り返し変形挙動を比較的良好な精度で表現しうることを示した⁽⁴⁾. しかし, バラスト道床の残留変位は, 一回の荷重の作用ではわずかしか生じないため, 維持管理上問題となる変位量に到達するまでには非常に多くの荷重の繰り返し作用が前提となるが, 前述の弾塑性モデルでは応力履歴をもれなく追跡して解析を行う必要がある. そのため, 高サイクル下での残留変位・残留変形を評価するためには増分解析に要する計算負荷が膨大となることが予想される.

上述のような繰り返し荷重作用時の弾塑性解析の計算負荷を軽減する方法の一つとして, 時間域均質化法の適用が試みられている. 時間域均質化法は, 1 つの物理現象の中で複数の時間スケールが存在する場合などのように, 評価の物理応答が長時間の変動成分と短時間の (周期的な) 変動成分により構成される場合に, 長時間の変動成分と短時間の変動成分とを分離し, 各々の応答成分の連成効果を考慮しながら双方の時間スケール応答を効率的に評価する方法である. Fishらは, 繰り返し载荷を受ける粘弾性体や粘塑性体の変形解析⁽⁵⁾ に当該の手法・定式化を用いている. また, 地盤材料の繰り返し弾塑性解析への適用は, hypoplastic モデルへの適用を試みた著者ら⁽⁶⁾ や, bounding surface モデルを対象とした Paponら⁽⁷⁾ らによって試みられているが, 拡張下負荷面

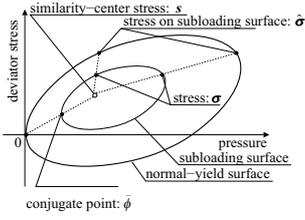


Fig.1 Normal-yield surface and subloading surface.

モデルへの適用は試みられていない。

そこで本研究では、拡張下負荷面モデルによるバラスト材の繰り返し変形解析の効率化を最終的な目標に掲げ、時間域均質化法の導入を試みる。本論文では、材料の繰り返し変形挙動を回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデルを用いて表現する場合を対象に、時間域均質化法を援用するための定式化と解析アルゴリズムを示す。繰り返し三軸試験を想定した簡単な数値実験を行い、定式化の妥当性と当該手法適用時における解析結果の誤差の発現傾向について検討する。

2. 回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデル

本研究では、回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデル⁽³⁾を用いて、バラスト材の繰り返し変形挙動を表現する場合について考える。当該モデルでは、Fig.1に示すように、古典的弾塑性モデルにおける降伏曲面を正規降伏面と呼び、これと相似で現応力点を通る曲面を下負荷面と定義する。下負荷面は、塑性負荷・除荷状態の判定に用いられ、塑性ポテンシャルとしての役割も有している。なお、ひずみ硬化として等方硬軟化と回転硬化を導入する。回転硬化は、地盤材料の強度の拘束圧依存性と繰り返し載荷時の応力・ひずみ関係とが矛盾しないように導入されたもので、応力空間の原点周りでの降伏面の回転でパウシンガー効果を表現するものである。

まず、応力-ひずみ関係を規定する構成関係式について考える。本研究では、微小変形を仮定し、応力速度 $\dot{\sigma}$ はひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ の加算分解を用いて次式で与える。

$$\dot{\sigma} = E : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (1)$$

ここで、 $\dot{\epsilon}^p$ は塑性ひずみ速度であり、弾性係数テンソル E は次式で定義する。

$$E_{ijkl} = (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (2)$$

$$K = \frac{p + p_{num}}{\gamma}, G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)}K, p = -\frac{\sigma_{kk}}{3} \quad (3)$$

なお、 K 、 G はそれぞれ体積弾性係数、せん断弾性係数であり、 ν は Poisson 比、 γ は材料定数、 p_{num} は初期剛性を与えるための定数、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

次に、等方硬軟化と回転硬化を考慮した場合の正規降伏面を次式で与える。

$$f(\hat{\sigma}, \beta) = F(H), F = F_0 \exp\left(-\frac{H}{\rho - \gamma}\right) \quad (4)$$

ここで、 H 、 β はそれぞれ等方硬軟化変数、回転硬化変数であり、 $\hat{\sigma}$ は正規降伏面上の応力である。 F は等方硬軟化関数と呼ばれ、 F_0 はその初期値、 ρ は材料定数である。また、

降伏関数 f は、 $\hat{p} = -\text{tr}\hat{\sigma}/3$ 、 $\hat{\sigma}^* = \hat{\sigma} + \hat{p}I$ 、 $\hat{\eta} = \hat{Q} - \beta$ 、 $\hat{Q} = \hat{\sigma}^*/\hat{p}$ として、次式で与える。

$$f(\hat{\sigma}, \beta) = \hat{p}(1 + \chi^2), \chi = \frac{\|\hat{\eta}\|}{\hat{m}}, \quad (5)$$

$$\hat{m} = f_m(\hat{\theta}_\sigma; \phi), \sin 3\hat{\theta}_\sigma = -\sqrt{6} \frac{\text{tr}\hat{\eta}^3}{\|\hat{\eta}\|^3} \quad (6)$$

$$f_m(\theta; \phi) = \frac{14\sqrt{6} \sin \phi}{(3 - \sin \phi)(8 - \sin 3\theta)} \quad (7)$$

なお、 β は回転硬化変数、 ϕ は材料定数であり、式(5)、(6)および以降の式においては、 A を2階のテンソルとして、 $\text{tr}A = A_{kk}$ 、 $A^* = A - (\text{tr}A)I/3$ 、 $\|A\| = \sqrt{A_{kl}A_{kl}}$ で与えるものとする。 I は2階の単位テンソルである。

下負荷面は、正規降伏面(4)と相似比 R で相似な曲面と定義する。このとき、下負荷面および下負荷面上の応力 $\bar{\sigma}$ は次式で表すことができる。

$$f(\bar{\sigma}, \beta) = RF(H), \bar{\sigma} = \sigma - (1-R)s \quad (8)$$

ここで、 s は相似中心応力であり、下負荷面の位置を制御する役割を持っている。等方硬軟化変数 H 、回転硬化変数 β 、相似中心応力 s 、相似比 R の発展則は式(9)で定義する。

$$\dot{H} = \dot{\lambda}h, \dot{\beta} = \dot{\lambda}b, \dot{R} = \dot{\lambda}U, \dot{s} = \dot{\lambda}z \quad (9)$$

ただし、

$$\bar{N} = \frac{\partial f(\bar{\sigma}, \beta)}{\partial \bar{\sigma}} \left/ \left\| \frac{\partial f(\bar{\sigma}, \beta)}{\partial \bar{\sigma}} \right\| \right. \quad (10)$$

$$h = \text{tr}\bar{N} + \mu \|\bar{N}^*\| \left(m_d - \frac{\|\sigma^*\|}{p} \right) \quad (11)$$

$$b = b_r \|\bar{N}^*\| \|\bar{\eta}\| \bar{\eta}_b, U = u_1 \left(\frac{1}{R^{m_1}} - 1 \right) \quad (12)$$

$$z = C(\sigma - s) + \left\{ F' h - \text{tr} \left(\frac{\partial f(\bar{\sigma}, \beta)}{\partial \beta} b \right) \right\} \frac{s}{F} \quad (13)$$

また、式(10)-(13)の変数は次のように与えられる。

$$\bar{\eta} = \frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{p}} - \beta, \bar{p} = -\frac{1}{3} \text{tr}\bar{\sigma}, \bar{\eta}_b = \bar{m}_b \frac{\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|} - \beta \quad (14)$$

$$C = \frac{c_1}{R^{c_3}} \exp\left(c_2 \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr}\bar{N}\right), F' = -\frac{F}{\rho - \gamma} \quad (15)$$

$$\bar{\chi} = \frac{\|\bar{\eta}\|}{\bar{m}}, \bar{Q} = \frac{\bar{\sigma}^*}{\bar{p}}, p_s = -\frac{1}{3} \text{tr}s \quad (16)$$

$$\chi_s = \frac{\|\eta_s\|}{m_s}, \eta_s = Q_s - \beta, Q_s = \frac{s^*}{p_s} \quad (17)$$

ここで、 μ 、 b_r 、 u_1 、 m_1 、 c_1 、 c_2 、 c_3 は材料定数であり、 m_d 、 \bar{m}_b 、 \bar{m} 、 m_s は次式で与えられる材料関数である。

$$m_d = f_m(\theta_\sigma; \phi_d), \bar{m}_b = f_m(\bar{\theta}_\sigma; \phi_b) \quad (18)$$

$$\bar{m} = f_m(\bar{\theta}_\sigma; \phi), m_s = f_m(\theta_s; \phi) \quad (19)$$

$$\sin 3\theta_\sigma = -\sqrt{6} \frac{\text{tr}\sigma^*{}^3}{\|\sigma^*\|^3}, \sin 3\bar{\theta}_\sigma = -\sqrt{6} \frac{\text{tr}\bar{\eta}^3}{\|\bar{\eta}\|^3} \quad (20)$$

$$\sin 3\theta_s = -\sqrt{6} \frac{\text{tr}\eta_s^3}{\|\eta_s\|^3} \quad (21)$$

なお、 ϕ_d 、 ϕ_b は材料定数である。

塑性流動則は、次の関連流動則で与える。

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \bar{N} \quad (\dot{\lambda} > 0) \quad (22)$$

なお，塑性乗数 λ は次式で与える．

$$\lambda = \frac{\text{tr}(\bar{N}E : \dot{\epsilon})}{\Lambda + \text{tr}(\bar{N}E : \bar{N})} \quad (23)$$

$$\Lambda = \text{tr}(\bar{N}\bar{\phi}) + \text{tr}(\bar{N}\sigma) \left\{ \frac{F'}{F}h - \frac{1}{RF} \text{tr} \left(\frac{\partial f(\bar{\sigma}, \beta)}{\partial \beta} \mathbf{b} \right) + \frac{U}{R} \right\} \quad (24)$$

ただし， $\bar{\phi} = (1 - R)z - U_s$ である．

塑性負荷 / 除荷状態の判定は，次式の規準に基づき行う．

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^p &\neq 0, & (\text{tr}(\bar{N}E : \dot{\epsilon}) > 0) \\ \dot{\epsilon}^p &= 0, & (\text{tr}(\bar{N}E : \dot{\epsilon}) \leq 0) \end{aligned} \quad (25)$$

3. 時間域均質化法

前節で示した拡張下負荷面モデルを用いた通常の繰り返し弾塑性解析では，応力履歴をもれなく追跡し，構成則と内部状態変数の発展則を所定の初期条件の下で積分することにより応力やひずみ等の物理応答を得る．そのため，本研究で対象とするパラスタ材のように，維持管理上問題となる残留変位量が観測されるまでには，概ね同程度の振幅を有する外荷重の多数回の繰り返し作用が必要となる場合には，通常の弾塑性解析では膨大な計算量を要することとなる．

そこで以下では，この計算負荷の軽減を最終的な目的として，上述の回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデルの諸式に時間域均質化法^(5, 6, 7)を適用し，通常の応力履歴を再現するための時間パラメータ（ミクロ時間変数） τ と，載荷・除荷の繰り返し数（マクロ時間変数） t （または N ）の各々に関する速度形構成式と発展則を導出する．

3.1. 2つの時間スケールの初期値問題への分離

対象としている初期値問題を2つの時間スケールの初期値問題に分離するために，ミクロ時間変数 τ とマクロ時間変数 t を定義する．これら2変数は，スケール比を ζ により $\tau = t/\zeta$ ($\zeta \ll 1$) で関連付けられる．

まず，解析において評価対象となる物理量を ϕ で表し，これが時間に関するツースケール性を有するものとして， $\phi^\zeta(x, t) = \phi(x, t, \tau)$ のように表わすものとする．このとき， ϕ^ζ の物質時間微分は次式で与えられる．

$$\dot{\phi}^\zeta = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \quad (26)$$

次に， ϕ^ζ をスケール比 ζ について漸近展開すると，

$$\phi^\zeta(x, t) = \sum_{M=0,1,\dots}^{\infty} \zeta^M \phi^{(M)}(x, t, \tau) \quad (27)$$

その物質時間微分は次式で表される．

$$\dot{\phi}^\zeta(x, t) = \sum_{M=0,1,\dots}^{\infty} \zeta^{M-1} \dot{\phi}^{(M-1)}(x, t, \tau) \quad (28)$$

$$\dot{\phi}^{(-1)} = \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial \tau}, \quad \dot{\phi}^{(n-1)} = \frac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(n-1)}}{\partial \tau}, \quad (n \geq 1)$$

式(27), (28)を構成則や発展則に適用し， $\zeta \rightarrow 0$ としたときの収束条件を ζ の項別に課すことで，満たすべき基本方程式を導出する．さらに，物理応答 ϕ の ζ の1次以上の高次項を切り捨て，物質時間微分が

$$\dot{\phi}^\zeta = \frac{1}{\zeta} \phi_{,\tau}^{(0)} + \phi_{,t}^{(0)} \quad (29)$$

で与えられるものとし， $\phi^{(0)}$ が，マクロ時間変数 t にのみ依存する応答成分 $\check{\phi}$ と，それ以外の成分 $\tilde{\phi}$ によって，次式のように分解可能であるものとする．このとき，次式を得る．

$$\phi^{(0)}(x, t, \tau) = \check{\phi}(x, t) + \tilde{\phi}(x, t, \tau) \quad (30)$$

なお，式(30)を2つの時間変数 τ, t でそれぞれ微分すると次式を得る．

$$\phi_{,\tau}^{(0)} = \tilde{\phi}_{,\tau}, \quad \phi_{,t}^{(0)} = \check{\phi}_{,t} + \tilde{\phi}_{,t} \quad (31)$$

特に，前述の拡張下負荷面モデルに時間域均質化法を適用した場合には， $O(\zeta^{-1})$ の方程式からはミクロ時間スケールの構成則・発展則を， $O(\zeta^0)$ の方程式からはマクロ時間スケールの構成則・発展則を，それぞれ導出することができる．ただし，次小節で示すように， $O(\zeta^0)$ の構成則・発展則には，ミクロ時間変数 τ に依存する成分も含まれている．そのため，この τ の依存性を排除するために，導出された式について次式の τ についての時間平均をとる．

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} \cdot d\tau \quad (32)$$

ただし， τ_0 はミクロ時間変数の代表長さである．

3.2. 拡張下負荷面モデルへの時間域均質化法の適用

前小節の手法を用いて，前節で述べた回転硬化を考慮した拡張下負荷面モデルに基づく繰り返し変形解析に，時間域均質化法を導入する．

まず，構成則，流動則，発展則を構成する各物理量が，時間に関するツースケール性を持つものとする．このとき，式(1), (9), (22), (23)は，

$$\dot{\sigma}_{ij}^\zeta = E_{ijkl}^\zeta (\dot{\epsilon}_{kl}^\zeta - \dot{\epsilon}_{kl}^{p\zeta}), \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{p\zeta} = \lambda^\zeta \bar{N}_{ij}^\zeta, \quad (33)$$

$$\dot{H}^\zeta = \lambda^\zeta h^\zeta, \quad \dot{\beta}_{ij}^\zeta = \lambda^\zeta b_{ij}^\zeta, \quad \dot{s}_{ij}^\zeta = \lambda^\zeta z_{ij}^\zeta, \quad (34)$$

$$\dot{R}^\zeta = \lambda^\zeta U^\zeta, \quad \lambda^\zeta = \frac{\bar{N}_{ij}^\zeta E_{ijkl}^\zeta \dot{\epsilon}_{kl}^\zeta}{\Lambda^\zeta + \bar{N}_{ij}^\zeta E_{ijkl}^\zeta \bar{N}_{kl}^\zeta} \quad (35)$$

のように表わすことができる．

式(33)-(35)を構成する物理量に式(27), (28), (30)を適用し，得られた $O(\zeta^{-1})$, $O(\zeta^0)$ のオーダーの諸式について考える．このとき， $O(\zeta^{-1})$ のオーダーの方程式は，

$$\tilde{\sigma}_{ij,\tau} = E_{ijkl}^{(0)} (\tilde{\epsilon}_{kl,\tau} - \tilde{\epsilon}_{kl,\tau}^p), \quad \tilde{\epsilon}_{ij,\tau}^p = \tilde{\lambda}_{,\tau} \bar{N}_{ij}^{(0)}, \quad (36)$$

$$\tilde{H}_{,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau} h^{(0)}, \quad \tilde{\beta}_{ij,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau} b_{ij}^{(0)}, \quad \tilde{s}_{ij,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau} z_{ij}^{(0)}, \quad (37)$$

$$\tilde{R}_{,\tau} = \tilde{\lambda}_{,\tau} U^{(0)}, \quad (38)$$

$$\tilde{\lambda}_{,\tau} = \frac{\bar{N}_{ij}^{(0)} E_{ijkl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,\tau}}{\Lambda^{(0)} + \bar{N}_{ij}^{(0)} E_{ijkl}^{(0)} \bar{N}_{kl}^{(0)}} = \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,\tau} \quad (39)$$

のように与えられ，これらはミクロ時間スケールにおける構成式と発展則，流動則となる．

一方， $O(\zeta^0)$ のオーダーの方程式は，各式について式(32)の時間平均をとると，次式を得る．

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij,t} + \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_{,t} &= \langle E_{ijkl}^{(0)} \rangle (\tilde{\epsilon}_{kl,t} - \tilde{\epsilon}_{kl,t}^p) \\ &\quad + \langle E_{ijkl}^{(0)} (\tilde{\epsilon}_{kl,t} - \tilde{\epsilon}_{kl,t}^p) \rangle \end{aligned} \quad (40)$$

$$\tilde{\epsilon}_{ij,t}^p + \langle \tilde{\epsilon}_{ij}^p \rangle_{,t} = \langle \tilde{N}_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \tilde{\epsilon}_{kl,t} + \langle \tilde{N}_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle \quad (41)$$

$$\tilde{H}_{,t} + \langle \tilde{H} \rangle_{,t} = \langle h^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \tilde{\epsilon}_{kl,t} + \langle h^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle \quad (42)$$

$$\tilde{\beta}_{ij,t} + \langle \tilde{\beta}_{ij} \rangle_{,t} = \langle b_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \tilde{\epsilon}_{kl,t} + \langle b_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle \quad (43)$$

$$\tilde{s}_{ij,t} + \langle \tilde{s}_{ij} \rangle_{,t} = \langle z_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \tilde{\epsilon}_{kl,t} + \langle z_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle \quad (44)$$

$$\tilde{R}_{,t} + \langle \tilde{R} \rangle_{,t} = \langle U^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \tilde{\epsilon}_{kl,t} + \langle U^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle \quad (45)$$

$$\tilde{\lambda}_{,t} + \langle \tilde{\lambda} \rangle_{,t} = \langle \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \tilde{\epsilon}_{kl,t} + \langle \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle \quad (46)$$

なお、式(41)-(45)では、塑性乗数の定義式((35)最終式)の $O(\zeta^0)$ のオーダーの方程式を用いて、塑性乗数 $\tilde{\lambda}$ 、 $\tilde{\lambda}$ を予め消去している。

なお、式(40)-(46)の各式の右辺において、ミクロ時間変数 τ に依存する物理量 $\tilde{\epsilon}_{kl}$ 、 $\tilde{\epsilon}_{kl}^p$ のマクロ時間変数 t に関する時間微分を含む項について、ミクロ時間変数 τ についての時間平均を評価しなければならないが、実際の解析では容易ではない。そこで、 $\tilde{\epsilon}_{kl,t}$ 、 $\tilde{\epsilon}_{kl,t}^p$ を含む項に平均値の定理を適用する。今、閉区間 $[0, \tau_0]$ で連続であり、开区間 $(0, \tau_0)$ 上に τ_1 、 τ_2 が存在するならば、 $\langle (\tau - \tau_1) \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle = 0$ 、 $\langle (\tau - \tau_2) \tilde{\epsilon}_{kl,t}^p \rangle = 0$ となるような場合が必ずある。その結果、 τ の積分と t の微分の順序とを入れ替えて、次式を得る。

$$\langle E_{ijkl}^{(0)} (\tilde{\epsilon}_{kl,t} - \tilde{\epsilon}_{kl,t}^p) \rangle = E_{ijkl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} - E_{ijkl}^{(0)}(\tau_2) \langle \tilde{\epsilon}_{kl}^p \rangle_{,t} \quad (47)$$

$$\langle \tilde{N}_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle = \tilde{N}_{ij}^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \quad (48)$$

$$\langle h^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle = h^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \quad (49)$$

$$\langle b_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle = b_{ij}^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \quad (50)$$

$$\langle z_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle = z_{ij}^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \quad (51)$$

$$\langle \Psi_{kl}^{(0)} \tilde{\epsilon}_{kl,t} \rangle = \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \quad (52)$$

なお、 τ_1 、 τ_2 は次式で定義し、2階テンソルを含むものについては成分の選択には依存しないものとする。

$$\tau_1 = \langle \tau \tilde{\epsilon}_{ij} \rangle / \langle \tilde{\epsilon}_{ij} \rangle, \quad \tau_2 = \langle \tau \tilde{\epsilon}_{ij}^p \rangle / \langle \tilde{\epsilon}_{ij}^p \rangle \quad (53)$$

式(47)-(52)を式(40)-(46)に代入すると、マクロ時間スケールにおける構成式、発展則および流動則が次式で与えられる。

$$\tilde{\sigma}_{ij,t} + \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_{,t} = \langle E_{ijkl}^{(0)} \rangle (\tilde{\epsilon}_{kl,t} - \tilde{\epsilon}_{kl,t}^p) + E_{ijkl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} - E_{ijkl}^{(0)}(\tau_2) \langle \tilde{\epsilon}_{kl}^p \rangle_{,t} \quad (54)$$

$$\tilde{\epsilon}_{ij,t}^p + \langle \tilde{\epsilon}_{ij}^p \rangle_{,t} = \langle \tilde{N}_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \tilde{\epsilon}_{kl,t} + \tilde{N}_{ij}^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \quad (55)$$

$$\tilde{H}_{,t} + \langle \tilde{H} \rangle_{,t} = \langle h^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \tilde{\epsilon}_{kl,t} + h^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \quad (56)$$

$$\tilde{\beta}_{ij,t} + \langle \tilde{\beta}_{ij} \rangle_{,t} = \langle b_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \tilde{\epsilon}_{kl,t} + b_{ij}^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \quad (57)$$

$$\tilde{s}_{ij,t} + \langle \tilde{s}_{ij} \rangle_{,t} = \langle z_{ij}^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \tilde{\epsilon}_{kl,t} + z_{ij}^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \quad (58)$$

$$\tilde{R}_{,t} + \langle \tilde{R} \rangle_{,t} = \langle U^{(0)} \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \tilde{\epsilon}_{kl,t} + U^{(0)}(\tau_1) \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \quad (59)$$

$$\tilde{\lambda}_{,t} + \langle \tilde{\lambda} \rangle_{,t} = \langle \Psi_{kl}^{(0)} \rangle \tilde{\epsilon}_{kl,t} + \Psi_{kl}^{(0)}(\tau_1) \langle \tilde{\epsilon}_{kl} \rangle_{,t} \quad (60)$$

3.3. 解析アルゴリズム

前小節で示したマクロ・ミクロの各時間スケールでの方程式は、相互の時間スケールの応答で連成していることから、文献⁽⁶⁾を参考に、以下の弱連成アルゴリズムを用いて解析計算を進める。

(i) N_0 サイクルまで下負荷面モデルを用いた通常の有限要素解析を行ない、それ以降のサイクルで時間域均質化法に移行する。ただし、この解析と並行して、時間域均質化法解析に必要な各種時間平均、および式(53)で定義した τ_1 、 τ_2 を計算しておく。

(ii) ミクロ時間変数 τ は1サイクルの荷重の負荷状態を制御するパラメータとし、 $\tau = \tau_0$ で1サイクルが終了するものとする。一方、マクロ時間変数 t はサイクル数 N に定める(すなわち、 $t = N$)。なお、マクロ時間応答の評価は、 $\Delta t = \Delta N$ サイクルに一度実行する。

(iii) N_0 サイクル以降の応答は、時間域均質化法を援用して求める。 $k = 1, 2, \dots$ として、 $N = N_0 + k\Delta N$ サイクルでのマクロ時間応答を評価するため、 $N = N_0 + 1 + (k-1)\Delta N$ サイクルでのミクロ時間応答を式(36)-(39)を解いて評価する。また、この過程において τ_1 、 τ_2 およびミクロ時間応答の時間平均も計算する。

(iv) (ii)の諸量を用いて、マクロ時間スケールでの方程式(54)-(60)を解くことにより、 $N = N_0 + k\Delta N$ サイクルでのマクロ時間応答を求める。なお、計算の際に必要なミクロ時間平均のマクロ時間変化率 $\langle \cdot \rangle_{,t}$ は、次式の差分近似で与える。

$k = 1$ のとき

$$\langle \tilde{\phi} \rangle_{,t} \approx \langle \tilde{\phi} \rangle_{N_0+1} - \langle \tilde{\phi} \rangle_{N_0} \quad (61)$$

$k = 2, 3, 4, \dots$ のとき

$$\langle \tilde{\phi} \rangle_{,t} \approx \frac{\langle \tilde{\phi} \rangle_{N_0+1+k\Delta N} - \langle \tilde{\phi} \rangle_{N_0+1+(k-1)\Delta N}}{\Delta N} \quad (62)$$

なお、式(61)、(62)の下添字は、時間平均を評価するサイクル数を表している。

(v) $k \leftarrow k+1$ として上記項目(ii)に戻り、(iii)、(iv)の過程を k 回繰り返し実行することで、 $N = N_0 + k\Delta N$ サイクルでの応答を評価することができる。

4. 解析結果

4.1. 解析条件

定式化の妥当性、および時間域均質化法の離散化条件が誤差発現に及ぼす影響を検討するために、当該モデルを用いて、繰り返し応力作用下での変形解析を行う。応力条件は、パラスタ材を対象とした石川らの大型繰り返し三軸試験⁽⁸⁾を参考に設定した。まず、拘束圧を $\sigma_{ij} = p_0 \delta_{ij}$ 、 $p_0 = -19.6$ (kPa)(引張を正)で一定とし、 σ_{33} のみを -98.0 (kPa)まで上昇させ、再び拘束圧の大きさまで除荷することとした。今回の解析では、応力のマクロ時間応答 $\tilde{\sigma}$ を拘束圧で一定かつ等方的に与える。すなわち、 $\tilde{\sigma}_{ij} = p_0 \delta_{ij}$ 、 $\tilde{\sigma}_{ij,t} = \langle \tilde{\sigma}_{ij} \rangle_{,t} = 0$ となる。

以下においては、精度等の検討対象は x_3 軸方向の直ひずみ ϵ_{33} とした上で、ミクロ時間解析の初期条件がマクロ時間解析結果で与えていることを考慮し、残留ひずみを与えるマクロ時間応答 $\tilde{\epsilon}_{33}$ を対象に検討を進める。なお、以下でも説明するが、時間域均質化法を適用した場合、その離散化条件が誤差発現に及ぼす影響はサイクル数に対するひずみ ϵ_{33} の

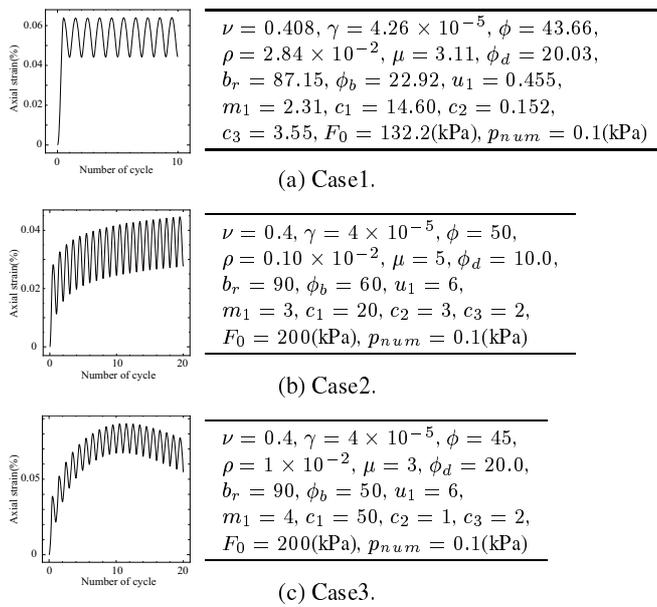


Fig. 2 Simulated axial strain ε_{33} without time-domain homogenization method.

変動傾向に左右される．そのため，数値実験においては ε_{33} の異なる変動傾向を作り出すために，応力条件を変えることなく当該モデルの材料定数値を次の3種類に設定した．

Case1: バラスト材を対象とした石川らの大型繰り返し三軸試験結果を再現するように定めた材料定数値．

Case2: 直ひずみ ε_{33} の残留量が，ある程度の繰り返しサイクル数以降ではサイクル数に対して概ね線形に増加するように定めた材料定数値．

Case3: 直ひずみ ε_{33} の残留量が，繰り返しサイクル数に対して増加から減少に転じるように非線形に変化するよう定めた材料定数値．

各 Case での通常の弾塑性解析による軸ひずみの解析結果は，Fig.2 に示す通りである．また，Fig.3, Fig.4, Fig.5 は，それぞれ Case1, Case2, Case3 における荷重の繰り返しサイクル数 N と軸差応力発生方向の軸ひずみ ε_{33} のマクロ時間応答 $\tilde{\varepsilon}_{33}$ との関係を示したものである．時間域均質化法では，均質化解析移行サイクル N_0 とマイクロ時間・マクロ時間スケールの解析を行うサイクル数間隔 ΔN の設定が任意であり，その計算原理から N_0 は可能な限り小さいほど， ΔN は大きいほど，解析時の計算負荷を軽減できる．そのため，数値実験では， N_0 および ΔN の組み合わせを複数設定して解析計算を行なった．なお，各々の図中実線は時間域均質化法を適用しないで得られた解析結果を示している．前述のように，マクロ時間解析における応力を拘束圧で等方的に与えているため，マクロ時間応答は載荷・除荷サイクル終了時の応答に対応する．よって，図中実線の谷の底の部分（以下，残留ひずみ）とマクロ時間応答との差が小さいほど，マクロ時間応答の評価精度が高いと判断してよい．

4.2. 時間域均質化法における解析条件の設定と解析精度

前述のように，本研究では， N_0 サイクルまで通常の有限

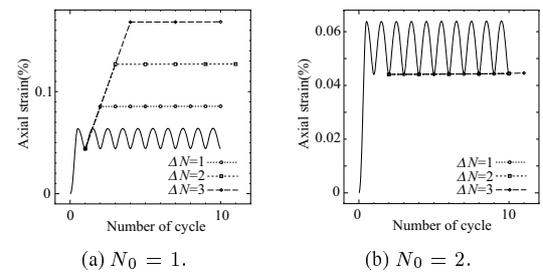


Fig. 3 Simulated axial strain ε_{33} with time-domain homogenization method for Case1.

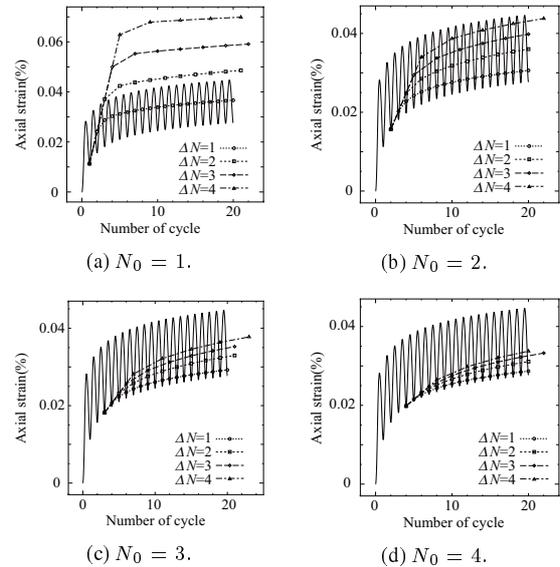


Fig. 4 Simulated axial strain ε_{33} with time-domain homogenization method for Case2.

要素解析で行い，それ以降で時間域均質化法を使用している．時間域均質化法解析移行後は，マイクロ・マクロの2つの時間スケールでの解析は ΔN サイクル毎に実行される．そのため，以下では， N_0 と ΔN の設定が，提案手法を用いて得られた解析結果の誤差発現に及ぼす影響について検討する．

まず，Case1 では，1回の載荷・除荷サイクル終了時（軸差応力0で拘束圧のみが作用する状態）での直ひずみ ε_{33} は，第1サイクルでその大部分が発生し，第2サイクル以降ではその変化量がわずかとなっている．そのため， $N_0 = 1$ と設定すると ΔN を小さくとっても非常に大きな誤差が発現している．これは，残留ひずみの増加量が第1サイクルと第2サイクルとでは大きく異なっているため，残留ひずみを求めるためのマクロ時間解析において，式(61)の差分近似が各種物理量のマイクロ時間平均のマクロ時間変化率を適切に近似できていないことが理由であると考えられる．なお，時間変化率を差分近似で適切に評価できない場合には，サイクル幅 ΔN を大きく設定するほど誤差は増大する．一方，第2サイクル以降の残留ひずみの増加量は，軸ひずみのマクロ時間応答 $\tilde{\varepsilon}_{33}$ の増加量と概ね同等となっていることから，塑性ひずみの累積傾向が大きく変化しない場合では，提案手法により効率よく残留ひずみを評価できる可能性があることがわかる．一方， $N_0 = 2$ とした場合には，第3サイクル以降の残留ひずみの増加量がわずかであることもあり，提案手法のサ

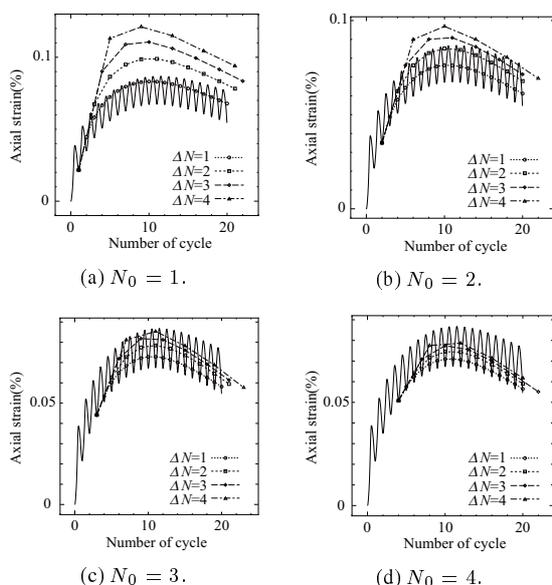


Fig.5 Simulated axial strain ϵ_{33} with time-domain homogenization method for Case3.

イクル刻み幅 ΔN を変化させても ϵ_{33} はほとんど変化せず、いずれも従来法で評価した残留ひずみと ϵ_{33} とがほぼ一致する結果を得た。

次に、Case2 の場合の解析結果について、Fig.4 をもとに検討する。Case1 と同様、時間域均質化法解析への移行サイクル N_0 を小さく設定すると、最初の数サイクルでは残留ひずみがサイクル数に対して非線形に増加するため、式 (61)、(62) で評価されるマイクロ時間平均のマクロ時間変化率の近似誤差が大きく、サイクル幅 ΔN が大きいほど大きな誤差が生じることがわかる。ただし、移行サイクル N_0 が大きくなると、時間域均質化法解析移行後の残留ひずみがサイクル数に対して概ね線形で推移し、解析で得られるマクロ時間応答 ϵ_{33} の各サイクルでの変化量は残留ひずみの変化量と概ね同等となっている。そのため、この段階では、計算負荷を軽減するために ΔN を比較的大きくとっても、残留ひずみを精度よく計算できる。

最後に、Case3 における解析結果について、Fig.5 に基づいて検討する。Case3 では、直ひずみ ϵ_{33} の残留量は、10 サイクル付近を境に増加から減少に転じる挙動を示し、その後はサイクル数に対して概ね線形に減少を続ける結果を示している。 ϵ_{33} の残留ひずみに対応するマクロ時間応答 ϵ_{33} の解析精度に及ぼす移行サイクル N_0 と解析サイクル幅 ΔN の設定の影響は、Case1, Case2 と同様の傾向を示している。

5. おわりに

本研究では、回転効果を考慮した拡張下負荷面モデルにより材料の繰り返し負荷時の変形挙動をモデル化・評価する場合を対象に、解析時の計算負荷を軽減することを将来的な目的として、時間域均質化法を適用するための定式化、および解析アルゴリズムを示し、簡単な数値実験を通してその妥当性を検証した。数値実験は、鉄道バラスト材の繰り返し三軸試験⁽⁸⁾の応力条件に定め、サイクル数に対して残留ひずみ

が異なる変化傾向を示す3種類の材料定数の下で行なった。

その結果、サイクル数に対して残留ひずみが概ね線形に変化する場合には、弾塑性状態の変化を良好に評価できており、大きなサイクル幅 ΔN の下でマイクロ・マクロ時間応答の解析を進めることができることが分かった。一方、それ以外の場合では、残留ひずみの増加傾向がサイクル間で大きく変化するほど提案手法による残留ひずみ(ひずみのマクロ時間応答)の評価精度は低下する。そのため、実際の解析において計算負荷を節約して高い精度で残留ひずみを予測・評価するためには、サイクル間で弾塑性状態が急変する場合には、できるだけ ΔN を小さく設定するか、もしくは従来法で解析を進め、状態の変化がサイクル間で概ね同様である場合には大きな ΔN に設定して解析を進めるのが合理的である。特にバラスト材では、高サイクル下では残留ひずみはサイクル数に概ね線形に累積する⁽⁸⁾ことから、後者をベースに ΔN を調整することで精度を確保する方法を模索したい。

今後は、弾塑性状態の変化の度合いに合わせた ΔN の自動設定法や、マクロ時間解析の多段型積分アルゴリズムの開発などに取り組み、解析精度の向上を図ることとしたい。

参考文献

- (1) 石川達也, 大西有三: 道床バラストの繰返し変形挙動に対する不連続変形法 (DDA) の適用, 土木学会論文集, **589 / III-42**(1998), pp.205-217.
- (2) Saussine, G., Cholet, C., Gautier, P.E., Dubois, F., Bohatier & Moreau, J.J.: Modelling ballast behaviour under dynamic loading. Part 1: A 2D polygonal discrete element method approach. *Comput. Methods Appl. Meth. Engrg.*, **195**(2006), pp.2841-2859.
- (3) 橋口公一, 上野正実, 陳 忠平: 下負荷面および回転効果の概念に基づく土の弾塑性構成式, 土木学会論文集, **547 / III-36**(1996), pp.127-144.
- (4) 紅露一寛, 阿部和久: 有道床バラスト軌道を対象とした繰返し鉛直・水平載荷試験の弾塑性有限要素解析, 第17回鉄道技術連合シンポジウム (J-RAIL) 講演論文集, (2010), pp.565-568.
- (5) Yu, Q. & Fish, J.: Temporal homogenization of viscoelastic and viscoplastic solids subjected to locally periodic loading. *Comp. Mech.*, **29**(2002), pp.199-211.
- (6) 紅露一寛, 嘉数東陽, 阿部和久: 鉄道用バラスト材の繰返し変形解析のための時間域均質法定式化, 土木学会応用力学論文集, **11**(2008), pp.149-158.
- (7) Papon, A., Yin, Z.-Y., Riou, Y. & Hicher, P.-Y.: Time homogenization for clays subjected to large numbers of cycles. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, **37**(2013), pp.1470-1491.
- (8) 石川達也, 須長 誠, 薫 軍, 名村 明: 大型繰返し三軸試験による道床バラストの変形特性の検討. 土木学会論文集, **575 / III-40**(1997), pp.169-178.