

異方性媒質中のき裂による 2 次元散乱解析に対する 演算子積分時間領域 Galerkin 境界要素法

Convolution Quadrature Time-Domain Galerkin Boundary Element Method for Two-Dimensional Dynamic Crack Analysis in General Anisotropic Solids

古川 陽¹⁾, 斎藤 隆泰²⁾, 廣瀬 壮一³⁾

Akira FURUKAWA, Takahiro SAITOH and Sohichi HIROSE

- 1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: furukawa.a.aa@m.titech.ac.jp)
 2) 群馬大学大学院工学研究科 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail: t-saitoh@gunma-u.ac.jp)
 3) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp)

This paper presents a convolution quadrature time-domain boundary element method for two-dimensional wave scattering problems in general anisotropic solids. The formulation of our proposed method is based on the non-hypersingular traction boundary integral equations derived from conservation law of elastodynamics. Galerkin method for space discretization, and convolution quadrature method for time discretization are used in our proposed method. As numerical examples, time variations of elastic wave scattering by a crack and aligned cracks are shown to validate the presented method.

Key Words: Boundary Element Method, Convolution Quadrature Method, General Anisotropy, Crack Problems

1. はじめに

本論文では, 2 次元問題を対象に, 異方性媒質中のき裂による入射波の散乱解析に対する演算子積分時間領域境界要素法を提案し, その有効性を検討する.

境界要素法は物体境界の離散化のみで近似解が得られ, 無限・半無限領域を容易に取り扱うことができる. そのため, 波動解析に対して有効な解析手法として知られている. 近年, Lubich によって提案された演算子積分法⁽¹⁾を時間領域境界要素法に適用した新しい境界要素法である演算子積分時間領域境界要素法が, 注目を集めている. 演算子積分時間領域境界要素法は, 影響関数の計算に Laplace 像空間における基本解を用いる. そのため, 従来の時間領域境界要素法では取り扱うことのできない粘弾性体や飽和多孔質弾性体を対象とした問題に対しても時間領域の解析が可能となる^(2, 3). また, 演算子積分時間領域境界要素法は, 従来の時間領域境界要素法と比較して, 時間増分が小さい場合においても安定に解を求めることができる.

境界要素法を用いてき裂に関する問題を取り扱う場合, き裂開口変位(き裂の上下面の相対変位)を未知量とする表面力境界積分方程式に基づく定式化が一般的である. このと

き, 変位に関する境界積分方程式に Hooke の法則を適用することで得られる表面力境界積分方程式は, 積分核に超特異性が生じるため, 何らかの正則化処理が必要となる. これに対して西村らは, 超特異核の応力関数表示を用いた正則化手法を提案している⁽⁴⁾. また, Zhang は, 動弾性問題の保存則から導出される積分核に超特異性を含まない表面力境界積分方程式を用いた定式化を提案している⁽⁵⁾.

異方性弾性波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法の適用例としては, Zhang による横等方性材料の面外波動問題の解析⁽⁶⁾や, 著者らのグループによる 2 次元および 3 次元問題を対象とした異方性媒質中の空洞による入射波の散乱解析^(7, 8)が報告されている程度であり, これまでほとんど行われていない.

そこで本論文では, 著者らのこれまでの研究を踏まえ, 2 次元問題を対象に, 演算子積分時間領域境界要素法を用いた異方性媒質中のき裂による入射波の散乱解析を行う. なお, 定式化には, Zhang が提案した動弾性問題における保存則から導出される積分核に超特異性を含まない表面力境界積分方程式を用い, 空間に関する離散化には Galerkin 法を採用する. 以下では, まず, 定式化に用いる積分核に超特異性を含まない表面力境界積分方程式を導出し, 演算子積分時間領域境界要素法による定式化および離散化について説明する.

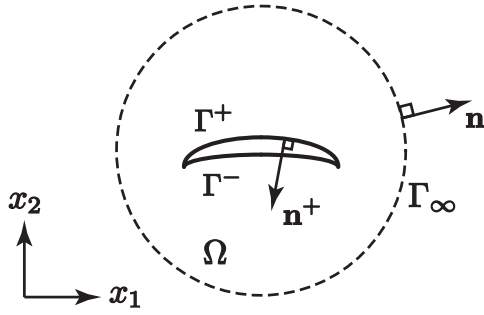


Fig. 1 An infinite anisotropic solid with a crack.

その後、いくつかの数値解析例を示し、本手法の有効性を検討する。

2. 対象とする問題と解析手法

2.1. 対象とする問題

Fig.1 に示す無限領域 Ω に存在するき裂によって、入射波が散乱する問題を考える。このとき、媒質を均質で異方性を有する線形弾性体とすると、運動方程式は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) + \rho p_i(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

ここに、 $u_i(\mathbf{x}, t)$ 、 $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ は位置 \mathbf{x} 、時刻 t における変位および応力成分を表す。また、 $p_i(\mathbf{x}, t)$ は物体力成分、 ρ は媒質の密度である。なお、 (\cdot) および $(\cdot)_{,i}$ は、それぞれ時間 t および空間 x_i に関する微分を表す。線形弾性体では、以下に示す Hooke の法則が成り立つ。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl} u_{k,l}(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

ここに、 C_{ijkl} は媒質の弾性定数を表す。また、領域 Ω 内では、以下に示す重ね合わせの原理が成り立つ。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + u_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

ここに、 $u_i(\mathbf{x}, t)$ は全変位、 $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ および $u_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, t)$ は、入射波および散乱波の変位を表す。対象とする問題の初期条件は、以下に示す静止過去の条件とする。

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (4)$$

また、き裂表面 Γ における境界条件は、次式で与える。

$$t_i(\mathbf{x}, t) = \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) n_j = 0, \mathbf{x} \in \Gamma \quad (5)$$

ここに、 $t_i(\mathbf{x}, t)$ は表面力成分、 n_i はき裂表面 Γ 上の外向き法線ベクトルを表す。

2.2. 積分核に超特異性を含まない表面力境界積分方程式の導出

ここでは、積分核に超特異性を含まない表面力境界積分方程式を導出し、数値計算を行う上で取り扱いやすい形式に積分方程式を変形する。

Fig.1 に示す均質な線形弾性体において、動弾性問題の保存則は次式で与えられる。

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\sigma_{mn} * u_{m,n} + \rho \ddot{u}_i * u_i) \delta_{jk} - \sigma_{ij} * u_{i,k} \right] n_j d\Gamma - \rho \int_{\Omega} p_i * u_{i,k} d\Omega = 0 \quad (6)$$

ここに、 δ_{ij} は Kronecker デルタであり、 $*$ は畳み込み積分を表す。式 (2) で示した Hooke の法則、式 (3) で示した重ね合わせの原理および式 (6) に示す保存則を用い、さらに物体力成分 p_i をゼロと仮定すると、以下に示す積分核に超特異性を含まない表面力境界積分方程式を得る。

$$C_{pqkl} n_q^+(\mathbf{x}) \left[e_{rst} e_{rlj} \int_{\Gamma^+} \Sigma_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \Delta u_{i,t}(\mathbf{y}, t) n_s^+(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) + \rho \int_{\Gamma^+} U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \Delta \ddot{u}_i(\mathbf{y}, t) n_l^+(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \right] = t_p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

ここに、 $t_p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ は入射波によってき裂表面に生じる表面力成分を、 $U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ および $\Sigma_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ は、2 次元異方性弾性波動問題の時間領域基本解および対応する応力成分を表す。なお、 e_{ijk} は交代記号、 n_i^+ はき裂上面 Γ^+ における外向き法線ベクトルを表す。また、 $\Delta u_i(\mathbf{y}, t)$ はき裂開口変位であり、き裂の上面 Γ^+ と下面 Γ^- の相対変位として次式で与えられる。

$$\Delta u_i(\mathbf{y}, t) = u_i(\mathbf{y} \in \Gamma^+, t) - u_i(\mathbf{y} \in \Gamma^-, t) \quad (8)$$

式 (7) の左辺 [] 内の第 2 項に含まれる畳み込み積分は、畳み込み積分の性質である

$$\frac{d}{dt} \{g(t) * h(t)\} = \dot{g}(t) * h(t) + g(0)h(t) \quad (9)$$

と式 (4) に示す静止過去の条件を考慮することで、以下の様に変形できる。

$$U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \Delta \ddot{u}_i(\mathbf{y}, t) = \ddot{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \Delta u_i(\mathbf{y}, t) \quad (10)$$

式 (7) に式 (10) を代入し、重み関数を $\psi(\mathbf{x})$ とする Galerkin 法を適用すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma^+} \psi(\mathbf{x}) C_{pqkl} n_q^+(\mathbf{x}) e_{rst} e_{rlj} \\ & \cdot \int_{\Gamma^+} \Sigma_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \Delta u_{i,t}(\mathbf{y}, t) n_s^+(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \int_{\Gamma^+} \psi(\mathbf{x}) C_{pqkl} n_q^+(\mathbf{x}) \rho \\ & \cdot \int_{\Gamma^+} \ddot{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \Delta u_i(\mathbf{y}, t) n_l^+(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & = \int_{\Gamma^+} \psi(\mathbf{x}) t_p^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (11)$$

本論文では、式 (11) を解くべき境界積分方程式とし、この積分方程式に対して時間および空間に関する離散化を行う。従来の時間領域境界要素法では、式 (7) に示すき裂開口変位の加速度成分 $\Delta \ddot{u}_i(\mathbf{y}, t)$ を含む形式の積分方程式を直接取り扱っており、 $\Delta \ddot{u}_i(\mathbf{y}, t)$ を含む畳み込み積分の計算は、時間に関する形状関数を適切に設定することで処理されてきた⁽⁵⁾。しかしながら、本論文では、式 (10) を用いて、基本解の加速度成分 $\ddot{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ を含む形式の積分方程式に変形することで、後述する演算子積分法を適用する。

2.3. 演算子積分法

演算子積分時間領域境界要素法では、式 (11) の時間に関する離散化に演算子積分法を用いる。ここでは、演算子積分法による畳み込み積分の離散表現について説明する。

演算子積分法は、Lubich によって提案された畳み込み積分 $f(t) * g(t)$ の離散近似手法であり、その近似式は次式で与えられる⁽¹⁾。

$$f(n\Delta t) * g(n\Delta t) \simeq \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\Delta t)g(k\Delta t) \quad (12)$$

ここに、 Δt は時間増分を表し、 $\omega_m(\Delta t)$ は演算子積分法における重み関数を表す。重み関数 $\omega_m(\Delta t)$ は、複素平面において $|z| = \mathcal{R}$ を積分経路とする周回積分で表現され、数値計算では積分区間を L 分割した台形積分公式を用いて、次式で与えられる。

$$\omega_m(\Delta t) \simeq \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f}\left(\frac{\gamma(z_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i \frac{ml}{L}} \quad (13)$$

ここに、 i は虚数単位、 $\hat{f}(s)$ は関数 $f(t)$ の Laplace 変換を表し、複素数 z_l は $z_l = \mathcal{R}e^{2\pi i l/L}$ で与える。 \mathcal{R} は演算子積分法のパラメータであり、目標とする精度 ϵ を用いて $\mathcal{R} = \epsilon^{1/(2L)}$ で表現される。なお、 $\gamma(z_l)$ は線形多段法における生成多項式の商であり、後退差分公式を用いて次式で表現される。

$$\gamma(z) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} (1-z)^i \quad (14)$$

ここに、 k は近似に用いる差分公式の次数を表し、通常、A 安定として知られる $k = 1, 2$ の差分近似を用いる。以上より、演算子積分法による畳み込み積分の離散化近似式は、関数 $f(t)$ の Laplace 変換 $\hat{f}(s)$ を用いて表現される。また、上述の通り、式 (11) の左辺第 2 項には、時間の 2 階微分を含む関数の畳み込み積分が存在する。この形式に対応する演算子積分法の離散化近似式は次式で表現される。

$$\ddot{f}(n\Delta t) * g(n\Delta t) \simeq \sum_{k=0}^n \Omega_{n-k}(\Delta t)g(k\Delta t) \quad (15)$$

ただし、重み関数 $\Omega_m(\Delta t)$ は次式で与えられる。

$$\Omega_m(\Delta t) \simeq \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[\frac{\gamma(z_l)}{\Delta t} \right]^2 \hat{f}\left(\frac{\gamma(z_l)}{\Delta t}\right) e^{-2\pi i \frac{ml}{L}} \quad (16)$$

式 (16) の導出には、Laplace 変換の性質である $\mathcal{L}[\ddot{f}(t)] = s^2 \hat{f}(s)$ を用いた。以上より、式 (11) の左辺第 1 項に含まれる畳み込み積分 $\Sigma_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \Delta u_{i,t}(\mathbf{y}, t)$ には式 (12) を、左辺第 2 項に含まれる畳み込み積分 $\ddot{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * \Delta u_i(\mathbf{y}, t)$ には式 (15) の形式の演算子積分法を適用することにより、畳み込み積分を精度良く、安定に計算することができる。

2.4. 積分方程式の離散表現

式 (11) に示す境界積分方程式の時間および空間に関する離散化を行う。時間に関しては上述した演算子積分法を、空間に関しては Galerkin 法を用いて離散化する。このとき、式 (4) に示す初期条件を考慮すると、第 n_t ステップにおいて、以下に示す離散化された表面力境界積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{J=1}^{N_n} \left[A_{IJ;pi}^{(0)} + B_{IJ;pi}^{(0)} \right] \Delta u_{J,i}^{(n_t)} \\ & = D_{IJ} t_{J;p}^{\text{in}(n_t)} - \sum_{k_t=1}^{n_t-1} \sum_{J=1}^{N_n} \left[A_{IJ;pi}^{(n_t-k_t)} + B_{IJ;pi}^{(n_t-k_t)} \right] \Delta u_{J,i}^{(k_t)} \quad (17) \end{aligned}$$

ここに、 N_n は節点数、 $\Delta u_{J;i}^{(k_t)}$ および $t_{J;p}^{\text{in}(k_t)}$ は、離散表現されたき裂開口変位および入射波によってき裂表面に生じる表面力成分を表す。また、 $A_{IJ;pi}^{(k_t)}$ 、 $B_{IJ;pi}^{(k_t)}$ 、 D_{IJ} は影響関数であり、次式で表現される。

$$A_{IJ;pi}^{(k_t)} = \frac{\mathcal{R}^{-k_t}}{L} \sum_{l_t=0}^{L-1} e^{-2\pi i \frac{k_t l_t}{L}} \left[C_{pqkl} e_{rst} e_{rlj} \int_{\Gamma_t^+} \phi^I(\mathbf{x}) n_q^+(\mathbf{x}) \cdot \int_{\Gamma_t^+} \frac{\partial \phi^J(\mathbf{y})}{\partial y_t} n_s^+(\mathbf{y}) \hat{\Sigma}_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_{l_t}) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] \quad (18)$$

$$B_{IJ;pi}^{(k_t)} = \frac{\mathcal{R}^{-k_t}}{L} \sum_{l_t=0}^{L-1} s_{l_t}^2 e^{-2\pi i \frac{k_t l_t}{L}} \left[\rho C_{pqkl} \int_{\Gamma_t^+} \phi^I(\mathbf{x}) n_q^+(\mathbf{x}) \cdot \int_{\Gamma_t^+} \phi^J(\mathbf{y}) n_l^+(\mathbf{y}) \hat{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_{l_t}) d\Gamma(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] \quad (19)$$

$$D_{IJ} = \int_{\Gamma_t^+} \phi^I(\mathbf{x}) \phi^J(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (20)$$

ここに、 $s_{l_t} = \gamma(z_{l_t})/\Delta t$ であり、 $\phi^I(\mathbf{x})$ は空間に関する形状関数を表す。本論文では、形状関数 $\phi^I(\mathbf{x})$ をすべて区間線形の関数で与え、Galerkin 法の重み関数 $\psi(\mathbf{x})$ は、この形状関数 $\phi^I(\mathbf{x})$ に等しく、すなわち $\psi(\mathbf{x}) = \phi^I(\mathbf{x})$ で与える。式 (18)、(19) より、演算子積分時間領域境界要素法では、影響関数 $A_{IJ;pi}^{(k_t)}$ 、 $B_{IJ;pi}^{(k_t)}$ の計算に、2 次元異方性弾性波動問題の Laplace 像空間における基本解 $\hat{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_{l_t})$ および対応する応力成分 $\hat{\Sigma}_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_{l_t})$ を用いることが確認できる。

2 次元異方性弾性波動問題の Laplace 像空間における基本解 $\hat{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_{l_t})$ は、次式で与えられる。

$$\hat{U}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_{l_t}) = U_{ik}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{U}_{ik}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_{l_t}) \quad (21)$$

ここに、 $U_{ik}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 、 $\hat{U}_{ik}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_{l_t})$ は基本解の静的部分および動的部分を表す。基本解の静的部分 $U_{ik}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、次式で与えられる⁽⁹⁾。

$$U_{ik}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left[\sum_{m=1}^3 \frac{A_{ik}(\eta_m)}{\partial_\eta D(\eta_m)} \ln \chi_m \right] + R_{ik} \quad (22)$$

ただし、

$$R_{ik} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \Gamma_{ik}^{-1}(n_1, n_2) \ln |n_1| dl(\mathbf{n}) \quad (23)$$

である。 $\Gamma_{ik}(n_1, n_2)$ は Christoffel テンソルを表し、媒質の弾性定数 C_{ijkl} および単位円周を表すベクトル \mathbf{n} の x_1, x_2 方向成分 n_1, n_2 を用いて

$$\Gamma_{ik}(n_1, n_2) = C_{ijkl} n_j n_l \quad (24)$$

で与えられる。なお、 $A_{ik}(\eta)$ 、 $D(\eta)$ は $\Gamma_{ik}(1, \eta)$ の余因子行列および行列式を表し、 $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ 、 $\chi_m = r_1 + r_2 \eta_m$ および $\partial_\eta = \partial/\partial\eta$ である。ただし、 r_1, r_2 はベクトル \mathbf{r} の x_1, x_2 方向成分を表す。また、 η_m ($m = 1, 2, 3$) は

$$D(\eta_m) = 0, \text{Im}[\eta_m] > 0 \quad (25)$$

を満たす解である。一方、基本解の動的部分 $\hat{U}_{ik}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は、文献⁽¹⁰⁾ に示されている時間領域基本解を Laplace 変換する

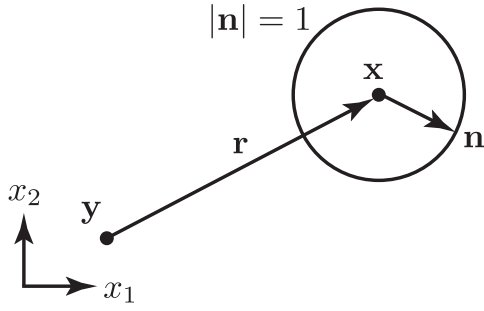


Fig. 2 Numerical integration over the unit circle ($|\mathbf{n}| = 1$).

ことで次の様に得ることができる.

$$\hat{U}_{ik}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 \frac{d_i^m d_k^m}{\rho c_m^2} L_m^D d\mathbf{l}(\mathbf{n}) \quad (26)$$

ただし,

$$L_m^D = 2 \ln |\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}| + e^{s \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|}{c_m}} E_1 \left(s \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|}{c_m} \right) + e^{-s \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|}{c_m}} \left\{ E_1 \left(-s \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|}{c_m} \right) + i\pi \right\} \quad (27)$$

である. ここに, $E_1(z)$ は指数積分, c_m は媒質中を伝播する波動の位相速度, d_i^m は位相速度 c_m で伝播する波動の振動方向を表す. 一般に, 異方性媒質中には, 位相速度 c_m が異なる3種類の波動が存在する. これらの波動のうち, 最も速度の速い波動は疑似P波 (qP波), その他の2種類の波動は疑似S波 (qS波) と呼ばれる. さらに, 疑似S波は, qS1波, qS2波と呼ぶことで, お互いを区別する. そのため, 2次元異方性弾性波動問題の基本解では, 3種類の波動の面内全周方向への伝播を考慮する意味で位相速度 c_m および振動方向 d_i^m の決定とともに, Fig.2に示す単位円周 ($|\mathbf{n}| = 1$) 上の積分を実行する手順が含まれている. 本論文では, 数値計算において, この単位円周 ($|\mathbf{n}| = 1$) 上の積分を Gauss の数値積分を用いて評価する⁽⁷⁾. なお, 基本解の応力成分 $\hat{\Sigma}_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は, 式(2)に示す Hooke の法則から導くことができる.

3. 数値解析例

以下に数値解析例を示す. はじめに, 等方性パラメータを用いて, 本手法の計算精度の確認を行い, その後, 異方性媒質中に存在するき裂による入射波の散乱解析を行う. なお, 異方性媒質中のき裂による入射波の散乱解析では, 単一のき裂による散乱問題の解析例と複数のき裂による散乱問題の解析例を示す.

3.1. 等方性パラメータを用いた計算精度の確認

本手法の妥当性を検証するため, 等方性パラメータを用いた計算精度の確認を行う. これまでの定式化には, 弾性定数 C_{ijkl} を含んでいる. したがって, 弾性定数 C_{ijkl} に対して, 等方性媒質に対する値を用いれば, 等方性媒質に対する波動解析を実行することができる. そこで, 等方性媒質の弾性定数を用いた本手法による解析結果と, 等方性媒質に対する基本解を用いた定式化によって得られた解析結果の比較を行う. なお, 2次元等方性弾性波動問題の Laplace 像空間にお

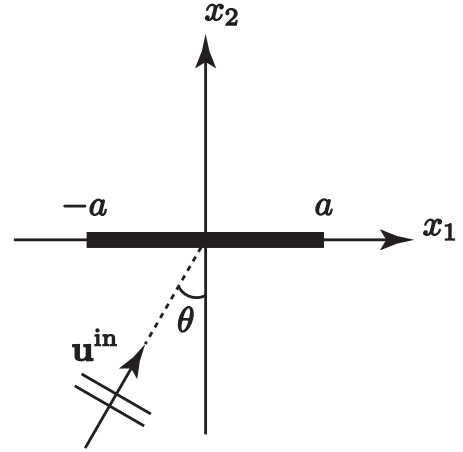


Fig. 3 Analysis model for verifying the accuracy of the proposed method.

ける基本解は, 次式で与えられる.

$$\hat{u}_{ik}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{2\pi\mu} \left[K_0(s_T r) \delta_{ik} - \frac{1}{s_T^2} \{ K_0(s_T r) - K_0(s_L r) \} \right]_{,ik} \quad (28)$$

ただし, $s_L = s/c_L$, $s_T = s/c_T$ であり, c_L および c_T は, 縦波および横波の速度を表す. また, μ はせん断弾性定数 (Lamé の第二定数), $K_0(\cdot)$ は0次の第2種変形 Bessel 関数である.

解析対象として, Fig.3 に示す均質な線形弾性体中に存在する長さ $2a$ の直線形状のき裂に, 入射角 θ で平面波が入射する問題を考える. 媒質の密度を $\rho = 1$, Poisson 比を $\nu = 0.25$, 弾性定数を Lamé 定数 λ, μ を用いて $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ で与えた. 入射波 $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$ は縦波とし, 以下に示す単調増加する関数を用いた.

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = U_0 d_i \frac{c_T}{a} hH(h) \quad (29)$$

ただし,

$$h = t - \frac{x_1 + a}{c_L} \sin \theta - \frac{x_2}{c_L} \cos \theta \quad (30)$$

である. ここに, U_0 は入射波の振幅を表し, $H(\cdot)$ は Heaviside 関数である. また, d_i は入射波の振動方向を表し, 縦波の場合は $\mathbf{d} = [\sin \theta, \cos \theta]^T$ となる.

き裂の全長 $2a$ を 20 個の要素に分割し, 総時間ステップを $n_t = L = 8$, 時間増分 Δt を $c_T \Delta t / a = 0.1$ で与え, 入射角を $\theta = 0$ とした場合のき裂開口変位の時刻歴を Fig.4 に示す. Fig.4 において, 丸印は本定式化によって得られたき裂開口変位, 実線は式(28)に示す等方性弾性波動問題の基本解 $\hat{u}_{ik}^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ を用いた定式化によって得られたき裂開口変位を表す. き裂開口変位は, 入射波の振幅の増大とともに大きな値を示す. いずれの時刻においても両者の値は良く一致しており, 本手法によってき裂による入射波の散乱問題の数値解を精度よく計算できることが確認された.

3.2. 単一のき裂による入射波の散乱解析

次に, 異方性パラメータを用いた場合のき裂による入射波の散乱解析を行う. 解析対象は, 前節の計算精度の確認に用いた Fig.3 に示すモデルと同様とする. ここでは, 解析結

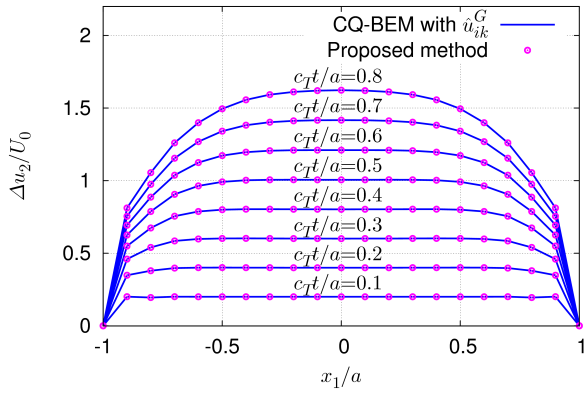


Fig. 4 Crack opening displacements at several times.

果を解析を行う媒質の群速度曲線と比較することで、その妥当性を検討する。異方性媒質中を伝播する波動の群速度 g_{jm} は、任意の伝播方向 $\mathbf{l} = [l_1, l_2]^T$ に対して、

$$g_{jm} = \frac{1}{\rho c_m} C_{ijkl} d_i^m d_j^m l_k, \quad m = \text{qP, qS1, qS2} \quad (31)$$

で与えられる。式 (31) をもとに得られる群速度を全周方向にプロットすることによって、群速度曲線を求めることができる。群速度曲線を用いることで、伝播方向によって異なる位相速度 c_m および振動方向 d_i^m を有する波動の干渉によって生じる複雑な波面を把握することができる。

本論文では、単斜晶系異方性材料であるグラファイトエポキシを用いた場合の解析結果を示す。グラファイトエポキシの密度は $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$ であり、Voigt 表記による弾性定数 C_{pq} は次式で与えられる。

$$C_{pq} = \begin{bmatrix} 95.5 & 28.9 & 4.03 & 0 & 0 & 44.7 \\ & 25.9 & 4.65 & 0 & 0 & 15.6 \\ & & 16.3 & 0 & 0 & 0.54 \\ & & & 4.4 & -1.78 & 0 \\ & \text{Sym.} & & & 6.45 & 0 \\ & & & & & 32.7 \end{bmatrix} \quad (32)$$

ただし、単位は GPa である。なお、Voigt 記号による弾性定数 C_{pq} は、例えば文献 (7) でみられる様に、容易に通常の弾性定数 C_{ijkl} へと変換できることに注意する。グラファイトエポキシの群速度曲線を Fig.5 に示す。同図に示すグラファイトエポキシの群速度曲線において、疑似 P 波および疑似 S1 波は面内方向にのみ偏向し、疑似 S2 波は純に面外方向に偏向する。そのため、本論文に示す解析結果には、疑似 P 波および疑似 S1 波が現れる。なお、面外成分と面内成分がカップリングする場合、本手法を用いた解析結果には、カップリングする波動の面内成分のみが現れ、面外成分による波動の干渉を取り扱うことができない点に注意する。また、入射波は無限遠方から伝播する平面波とし、次式で与える。

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = U_0 d_i \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi c^{\text{in}}}{a} h \right) \right] \left\{ H(h) - H \left(h - \frac{a}{c^{\text{in}}} \right) \right\} \quad (33)$$

ただし、

$$h = t - \frac{x_1 + a}{c^{\text{in}}} \sin \theta - \frac{x_2}{c^{\text{in}}} \cos \theta \quad (34)$$

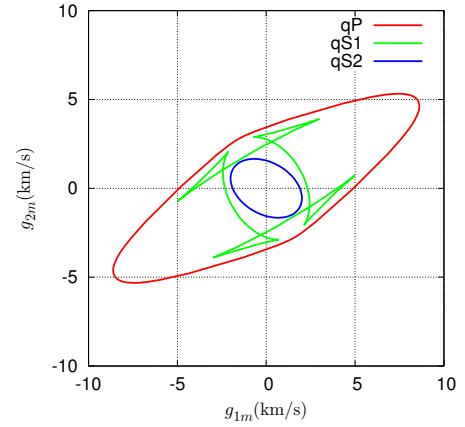


Fig. 5 Group velocity curves for graphite-epoxy.

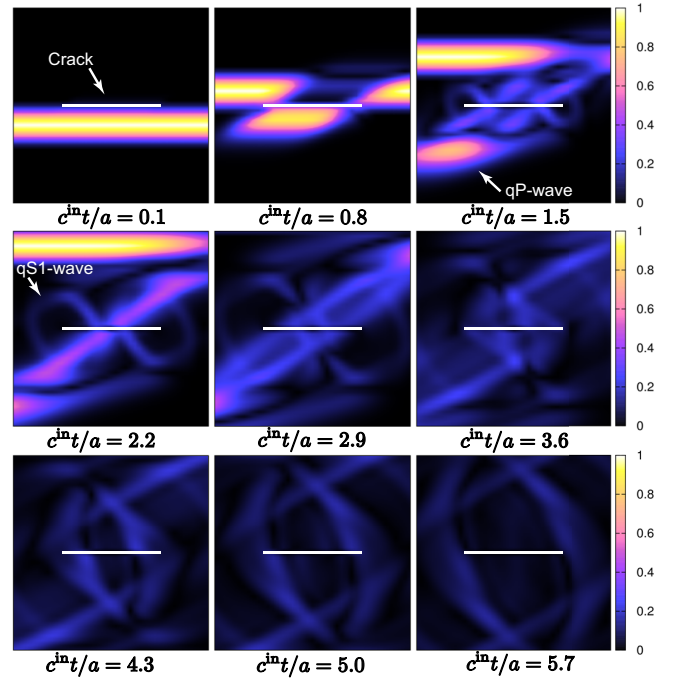


Fig. 6 Time history of $|\mathbf{u}|/U_0$ around a crack in graphite-epoxy at several times.

である。ここに、 c^{in} は入射波の位相速度を表す。入射波は疑似 P 波とし、入射角は $\theta = 0$ で与えた。き裂の全長 $2a$ を 20 個の要素に分割し (11)、総時間ステップを $n_t = L = 64$ とした。また、時間増分 Δt は $c^{\text{in}} \Delta t / a = 0.1$ で与えた。

Fig.6 にグラファイトエポキシ中のき裂による入射波の散乱解析結果を示す。ただし、ここでは全変位の絶対値 $|\mathbf{u}|$ を入射波の振幅 U_0 で正規化した値 $|\mathbf{u}|/U_0$ の時間変化を示している。Fig.6 より、き裂によって散乱される疑似 P 波および疑似 S1 波が確認できる。また、 $c^{\text{in}} t / a = 2.2, 2.9$ において、き裂の先端近傍で散乱される波動は、群速度曲線の特徴を良く再現できていることが確認できる。

3.3. 複数のき裂による入射波の散乱解析

最後に、異方性媒質中に複数のき裂が存在する場合の入射波の散乱問題の解析結果を示す。解析モデルとして、Fig.7 に示す均質で異方性を有する線形弾性体中に長さ $2a$ の直線形状のき裂が 4 つ存在する問題を考える。入射波は、3.2 節

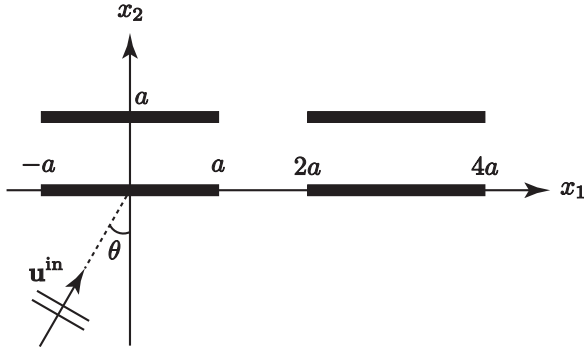


Fig. 7 Analysis model for wave scattering by aligned straight cracks.

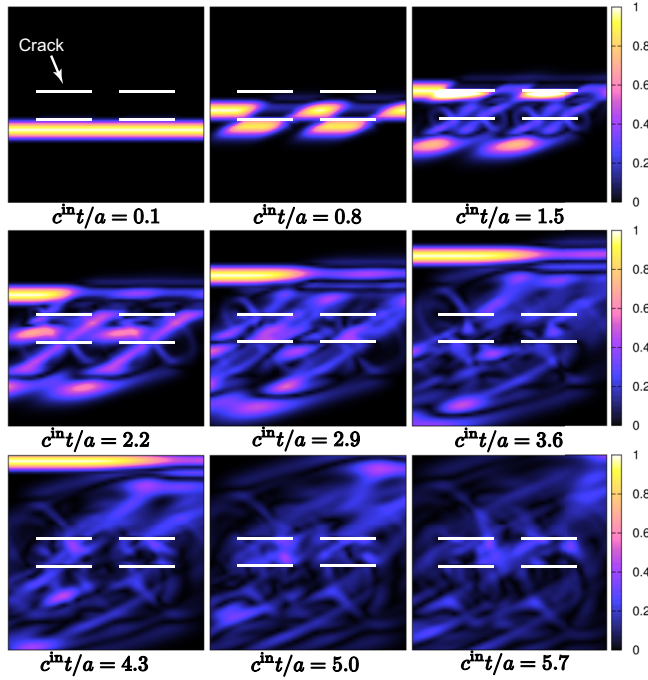


Fig. 8 Time history of $|u|/U_0$ around aligned straight cracks in graphite-epoxy at several times.

と同様に平面疑似P波とし、式(33)、(34)で与え、入射角は $\theta = 0$ とした。

4つのき裂はそれぞれ20個(計80個)の要素に分割し、総時間ステップを $n_t = L = 64$ 、時間増分 Δt を $c^{\text{in}} \Delta t/a = 0.1$ で与えた。なお、解析対象とする異方性媒質は3.2節と同様にグラファイトエポキシとした。

解析結果として、全変位の絶対値 $|u|$ を入射波の振幅 U_0 で正規化した値 $|u|/U_0$ の時間変化を Fig.8 に示す。き裂が複数存在する様な、より複雑な問題に対しても、本手法の適用が可能であることが示された。

4. おわりに

本論文では、異方性媒質中のき裂による入射波の散乱問題に、演算子積分時間領域境界要素法を適用した。定式化には、積分核に超特異性を含まない表面力境界積分方程式を用い、空間に関する離散化には Galerkin 法を用いた。本手法の妥当性を検討するため、はじめに、等方性パラメータを用いた計算精度の確認を行い、その後、異方性媒質中の単一の

き裂による入射波の散乱解析を行った。解析結果は、群速度曲線と調和的であり、異方性媒質特有の波動散乱の様子を再現することができた。また、複数のき裂による入射波の散乱問題に対しても本手法の適用が可能であることを示した。

今後は、本論文では取り扱わなかった様々な異方性媒質に対して本手法を適用するとともに、大規模問題への適用に向けた計算時間の短縮を図る。具体的には、MPIやGPUを用いた並列化および高速多重極法を用いた計算効率の向上を行う予定である。

参考文献

- (1) Lubich, C.: Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52**(1988), pp. 129–145.
- (2) 斎藤隆泰, 石田貴之, 福井卓雄, 廣瀬壮一: 粘弾性面外波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算工学論文集, (2008), No. 20080011.
- (3) 斎藤隆泰, 近澤文香, 廣瀬壮一: 演算子積分時間領域境界要素法を用いた飽和多孔質弾性体における大規模波動散乱解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), **68**(2012), pp. I.187–I.197.
- (4) 西村直志, 小林昭一: 積分方程式による3次元動弾性クラック決定問題の定式化, 境界要素法論文集, **10**(1993), pp. 137–142.
- (5) Zhang, Ch.: A novel derivation of non-hypersingular time-domain BIEs for transient elastodynamic crack analysis, *Int. J. Solids Struct.*, **28**(1991), pp. 267–281.
- (6) Zhang, Ch.: Transient elastodynamic antiplane crack analysis of anisotropic solids, *Int. J. Solids Struct.*, **37**(2000), pp. 6107–6130.
- (7) 古川陽, 斎藤隆泰, 廣瀬壮一: 2次元異方性弾性波動問題に対する演算子積分時間領域境界要素法, 土木学会論文集 A2(応用力学), **68**(2012), pp. I.269–I.278.
- (8) 斎藤隆泰, 田中遊雲, 廣瀬壮一: 3次元異方性弾性波動問題におけるLubichの方法を用いた時間領域境界要素法, 計算数理工学論文集, **10**(2010), pp. 111–116.
- (9) Wang, C.-Y.: Two-dimensional elastostatic Green's functions for general anisotropic solids and generalization of Stroh's formalism, *Int. J. Solids Struct.*, **31**(1994), pp. 2591–2597.
- (10) Wang, C.-Y. and Achenbach, J.D.: Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids, *Geophys. J. Int.*, **118**(1994), pp. 384–392.
- (11) García-Sánchez, F., Zhang, Ch. and Sáez, A.: Mesh-sensitivity analysis of dynamic BEM for cracked anisotropic solids, *Advances in Boundary Element Techniques VIII*, (2007), pp. 31–36.