

3次元輻射輸送方程式の境界値問題の数値計算とその応用

NUMERICAL CHALLENGES TO THE THREE DIMENSIONAL STATIONARY RADIATIVE TRANSPORT EQUATION

藤原宏志¹⁾

Hiroshi FUJIWARA

1) 京都大学大学院 情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: fujiwara@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

We discuss numerical treatments of the Dirichlet problem of the radiative transport equation in the three dimensions for high-accurate numerical simulations of near-infrared ray propagation in a human head. The diffusion approximation has been used to reduce computational resources, though it has disadvantages in treatments of a scattering phase function and measurements by optical fibers. An upwind scheme and the composite trapezoidal rule are used in our discretization, and its computational time is also shown.

Key Words: Radiative Transport Equation, Dirichlet Problem, Numerical Computation, Diffusion Approximation

1. 輸送方程式

本論文は、体内での光伝播の高信頼数値シミュレーションを目的とし、輻射輸送方程式の数値計算の必要性と実現可能性の2点を論じる。従来、取り扱いの容易さから輻射輸送方程式に対する拡散近似が広く利用されてきたが、計算機の性能向上により、輻射輸送方程式の直接的取り扱いが可能となってきた⁽³⁾。そこで本論文では、拡散近似では不十分であった光子の散乱の方向依存性および入受光ファイバの扱いが、輻射輸送方程式の直接数値計算において可能であることを示す。本研究が念頭に置く3次元の生体への応用においては、その数値計算は本質的に5次元の大規模問題となり、計算資源が問題となる。これに対し、頭部MR画像をもちいる場合に現実的な時間で計算可能であることを示す。

近年、人体に対する被曝のない非侵襲測定法として近赤外光の利用が研究されており、そのひとつに頭部の断層情報の取得が挙げられる。X線CTがX線の直進性を利用して断層画像を構成するのに対して、近赤外光は人体内部で必ずしも直進しないことから、拡散光トモグラフィとよばれる^(1, 10)。ここでは体内の近赤外光の伝播の数値モデルとして輻射輸送方程式(Radiative Transport Equation)がもちいられる。これは光の伝播を光子の立場から扱うもので、 $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ において $\xi \in S^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3; |\xi| = 1\}$ の速度をもつ光子密度 $I(t, x, \xi)$ に対して

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} = -\xi \cdot \nabla_x I - (\mu_s + \mu_a) I + \mu_s \int_{S^2} p(x; \xi, \xi') I(t, x, \xi') d\sigma_{\xi'} + q \quad (1)$$

で与えられる。ただし $\nabla_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$, $d\sigma_{\xi}$ は S^2 の面積要素である。本研究では領域の大きさに比して光子が十分に高速であると仮定し、次のDirichlet境界値問題の数値計算を考える。

$$-\xi \cdot \nabla_x I - (\mu_s + \mu_a) I + \mu_s \int_{S^2} p(x; \xi, \xi') I(x, \xi') d\sigma_{\xi'} + q = 0, \quad \text{in } \Omega \times S^2, \quad (2a)$$

$$I(x, \xi) = I_1(x, \xi), \quad \text{on } \Gamma_-. \quad (2b)$$

ここで $n(x)$ を $\partial\Omega$ の外向き単位法線として $\Gamma_- = \{(x, \xi); x \in \partial\Omega, n(x) \cdot \xi < 0\}$ とする。さらに $q = q(x, \xi)$ は内部粒子源, $\mu_s = \mu_s(x)$ は散乱係数, $\mu_a = \mu_a(x)$ は吸収係数, $p(x; \xi, \xi')$ は散乱の位相関数である。位相関数は $x \in \Omega$ における散乱で、粒子の速度が ξ' から ξ に変化する条件付き確率に対応する確率密度関数であり、

$$p(x; \xi, \xi') \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \int_{S^2} p(x; \xi, \xi') d\sigma_{\xi'} = 1$$

を満たす。さらに、 p は ξ, ξ' のなす角度に依存し、 ξ, ξ' の各々に依存しないものとする。

2. 輻射輸送方程式の拡散近似

本節ではRTEの近似として広く利用されている拡散近似(Diffusion Approximation)⁽¹⁾について述べる。

RTE (1) の解 I に対して $x \in \Omega$ における粒子密度と流束

$$\Phi(t, x) = \int_{S^2} I(t, x, \xi) d\sigma_{\xi},$$

$$J_i(t, x) = \int_{S^2} I(t, x, \xi) \xi_i d\sigma_{\xi}, \quad i = 1, 2, 3,$$

により, I の ξ についての 1 次近似

$$I(t, x, \xi) \approx \frac{1}{4\pi} \Phi(t, x) + \frac{3}{4\pi} J(t, x) \cdot \xi$$

を仮定する. ただし $J = (J_1, J_2, J_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ である. 位相関数 p が十分滑らかで, 内部粒子源 q について $\int_{S^2} q(t, x, \xi) \xi_i d\sigma_\xi = 0$ ならば, (1) により Φ と J は

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= -\nabla \cdot J - \mu_a \Phi + Q, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial t} &= -\frac{1}{3} \nabla \Phi - (\mu_a + \mu'_s) J \end{aligned}$$

を満たす. ここで

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{3(\mu_a + \mu'_s)}, \quad \mu'_s = \mu_s(1-g), \\ g &= \int_{S^2} p(\xi, \xi') \xi \cdot \xi' d\sigma_{\xi'}, \\ Q(t, x) &= \int_{S^2} q(t, x, \xi) d\sigma_\xi \end{aligned} \quad (3)$$

とした. さらに $|\partial J / \partial t| \ll c$, すなわち Fick の法則として $J = -D \nabla \Phi$ を仮定することにより, Φ の関係式として次を得る.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = \nabla \cdot (D \nabla \Phi(t, x)) - \mu_a \Phi(t, x) + Q(t, x).$$

このとき対応する境界値問題は次で与えられる.

$$\nabla \cdot (D \nabla \Phi(x)) - \mu_a \Phi(x) + Q(x) = 0, \quad \text{in } \Omega, \quad (4a)$$

$$\Phi(x) = \int_{S^2} I_1(x, \xi) d\sigma_\xi, \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (4b)$$

DA における (4) は, RTE の境界値問題 (2) に比して解析的にも数値的にも取り扱いが容易であり, 広く利用されている. しかしながら, RTE に現れる位相関数 p は DA においてはパラメータ g としてのみ現れ, p の他の情報に依存しない. また DA において導入された Φ の数値解から, ある速度の粒子密度 (の近似) を求めることも困難であることに注意する.

3. 3次元輸送方程式の離散スキーム

本研究では RTE の境界値問題 (2) に対し, 上流差分と台形則により離散化をおこなう^(7, 3). 正数 $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ および正整数 M_ϕ, M_θ をとり, $\Delta\theta = \pi/M_\theta$, $\Delta\phi = 2\pi/M_\phi$, さらに $\theta_m = m\Delta\theta$, $\phi_n = n\Delta\phi$ とする. 空間に格子点 $x_{ijl} = (i\Delta x_1, j\Delta x_2, l\Delta x_3)$ を, また S^2 上に, 極座標により $\xi_{mn} = (\xi_{mn,1}, \xi_{mn,2}, \xi_{mn,3}) = (\sin\theta_m \cos\phi_n, \sin\theta_m \sin\phi_n, \cos\theta_m)$ を配し, $I(x_{ijl}, \xi_{mn})$ 相当値を $I_{ijl,mn}$ と書く. このとき,

$$\begin{aligned} A_\Delta I_{ijl,mn} &= -\xi_{mn,1} \frac{I_{i+1,j,l,mn} - I_{i-1,j,l,mn}}{2\Delta x_1} \\ &+ |\xi_{mn,1}| \frac{I_{i+1,j,l,mn} - 2I_{ijl,mn} + I_{i-1,j,l,mn}}{2\Delta x_1} \\ &- \xi_{mn,2} \frac{I_{i,j+1,l,mn} - I_{i,j-1,l,mn}}{2\Delta x_2} \\ &+ |\xi_{mn,2}| \frac{I_{i,j+1,l,mn} - 2I_{ijl,mn} + I_{i,j-1,l,mn}}{2\Delta x_2} \\ &- \xi_{mn,3} \frac{I_{i,j,l+1,mn} - I_{i,j,l-1,mn}}{2\Delta x_3} \\ &+ |\xi_{mn,3}| \frac{I_{i,j,l+1,mn} - 2I_{ijl,mn} + I_{i,j,l-1,mn}}{2\Delta x_3}, \end{aligned}$$

Table 1 Setting of the Mie Scattering Kernel⁽⁶⁾

Radius of Scatterer	1260 [nm]
Refractive Index of Scatterer	1.504
Refractive Index of Medium	1.530
Wave Length in Vacuum	1310 [nm]

$$\Sigma_\Delta I_{ijl,mn} = (\mu_s(x_{ijl}) + \mu_a(x_{ijl})) I_{ijl,mn},$$

$$\begin{aligned} K_\Delta I_{ijl,mn} &= \mu_s(x_{ijl}) \Delta\theta \Delta\phi \sum_{\substack{1 \leq \mu < M_\theta \\ 0 \leq \nu < M_\phi}} p(x_{ijl}; \xi_{mn}, \xi_{\mu\nu}) I_{ijl,\mu\nu} \sin\theta_\mu \end{aligned}$$

の離散化により, 連立一次方程式

$$(A_\Delta - \Sigma_\Delta + K_\Delta) I_{ijl,mn} = -q(x_{ijl}, \xi_{mn}), \quad \text{in } X, \quad (5a)$$

$$I_{ijl,mn} = I_1(x_{ijl}, \xi_{mn}), \quad \text{on } \Gamma_-, \quad (5b)$$

を得る. 適当な仮定のもとで離散解は一意的に存在して (2) の厳密解への収束性を有するとともに, 連立方程式に対する Gauss-Seidel 法が収束する^(3, 4). 以下では $q = 0$ とする.

4. 位相関数と拡散近似

RTE の位相関数 p は粒子の散乱の様子を表すが, 上述のとおり DA にはパラメータ g のみが現れるため, p が異なる場合にも g の値が同一であればその差異は DA で現れないという問題点がある. 本節ではこれを数値例により検証する. なお本節の例は, 近赤外光が人体内の伝播で示す特徴のひとつである前方散乱を考慮したものである.

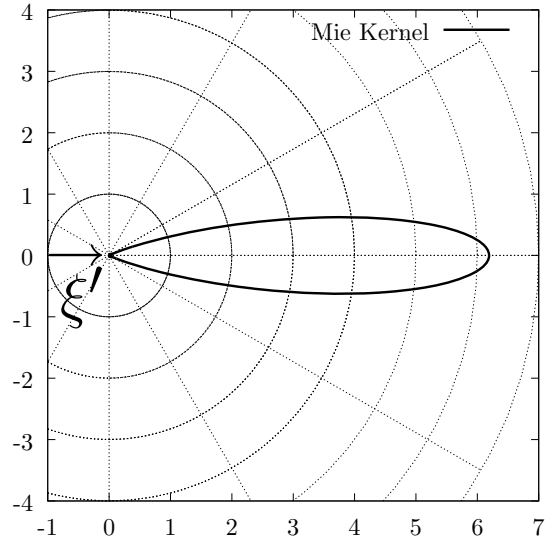


Fig. 1 The Mie Scattering Kernel $p(\xi, \xi')$ with Parameters in Table 1 and $\xi' = (1, 0, 0)$

計算例として, $\Omega = (0, 51.2)^3$, $\mu_s = 1.09$, $\mu_a = 0.08$ の立方体において, 位相関数として Table 1 で与えられる Mie

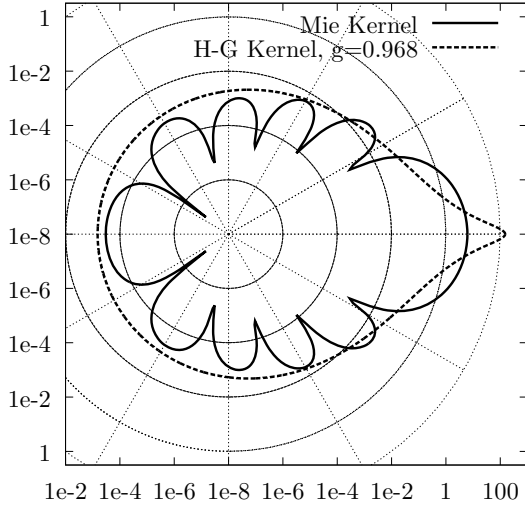


Fig. 2 The Mie Kernel with Parameters in Table 1 and the Henyey-Greenstein Kernel with $g = 0.968$, Logarithmic Scale for the Radial Direction

核^(6, 8)を考える．この Mie 核 $p(\xi, \xi')$ を, ξ' をひとつ固定して, 動径方向に $p(\xi, \xi')$ の大きさを, 角度方向に ξ と ξ' のなす角をとる極座標で Fig. 1 および Fig. 2 に示す．ただし Fig. 2 は, 動径方向に対数軸としている．この Mie 核に対しては $g \approx 0.967935$ であった．境界値は, $\lambda \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ をひとつ固定して,

$$\tilde{I}_1(x, \xi; \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}\right),$$

ただし $\sigma = 0.2$, τ は ξ と λ のなす角度

によって

$$I_1(x, \xi) = \begin{cases} \tilde{I}_1(x, \xi; (1, 0, 0)), & x = (0, 12.8, 12.8); \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

とした．離散化パラメータを $\Delta x_i = 0.4$, $\Delta\theta = \Delta\phi = 3[\text{deg}]$ として数値計算をおこない, $x_3 = 12.8$ における $\Phi(x) = \int_{S^2} I(x, \xi) d\sigma_\xi$ の計算結果を Fig. 3 に示す．

一方, 生体内の光伝播の解析では, 位相関数として主に Henyey-Greenstein 核

$$p(x; \xi, \xi') = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - g^2}{(1 - 2g\xi \cdot \xi' + g^2)^{3/2}}$$

が利用される⁽⁵⁾．ここに現れる g の値は (3) と等しい．上述の Mie 核と同じ $g = 0.968$ をもつ Henyey-Greenstein 核を Fig. 2 に, 同様の設定での計算結果を Fig. 4 に示す．さらに, この g の値での DA による計算結果を Fig. 5 に示す．

数値計算結果から, g の値が等しい Mie 核と Henyey-Greenstein 核での計算結果に顕著な違いがあることがわかる．一方, DA はそのいずれの近似にもなっておらず, DA を RTE の近似として扱う際には注意を要することがわかる．

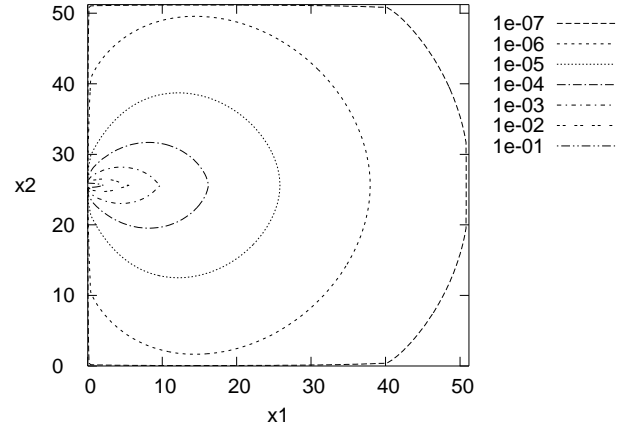


Fig. 3 Numerical Results $\Phi(x)$ on $x_3 = 12.8$ by the Mie Kernel

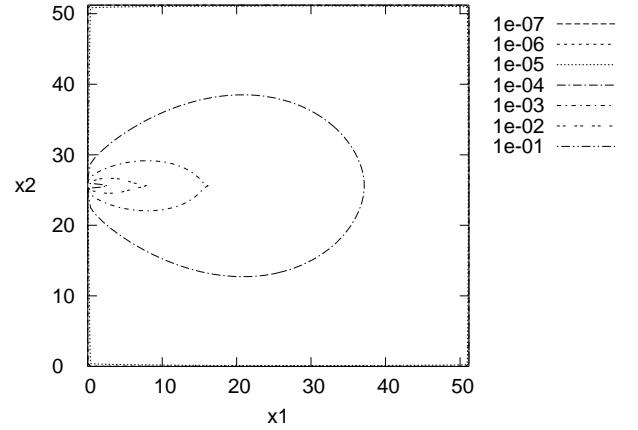


Fig. 4 Numerical Results $\Phi(x)$ on $x_3 = 12.8$ by the Henyey-Greenstein Kernel with $g = 0.967935$

5. RTE における光ファイバの指向性と開口数の取り扱い
光ファイバをもちいる光学測定においてはその指向性と開口数 (Numerical Aperture) を考慮することが重要であるが, DA においては各点における粒子密度が議論の対象であり, これらファイバの特性は反映されない．本節では, RTE において粒子の速度 ξ が現れることに着目したファイバの指向性と開口数の扱いを提案し, 数値計算例によってその有効性を示す．

点 $C \in \mathbb{R}^3$ をとる．点 P に先端があり, C を向いた開口数 NA の光ファイバを考える (Fig. 6)．このファイバでは P におけるすべての光子, すなわち $\Phi(P)$ を測定することはできず, 光ファイバに向かう光子のみが捕えられる．精確には, このファイバで捕捉される点 P での光子は, その速度 ξ が

$$\angle(\xi, \overrightarrow{CP}) \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad \sin \angle(\xi, \overrightarrow{CP}) \leq \text{NA}$$

を満たすと考えられる．ただし $\angle(\xi, \overrightarrow{CP})$ はベクトル ξ と \overrightarrow{CP} のなす角である．これを満たす ξ の全体を $S^2(\overrightarrow{CP}, \text{NA})$

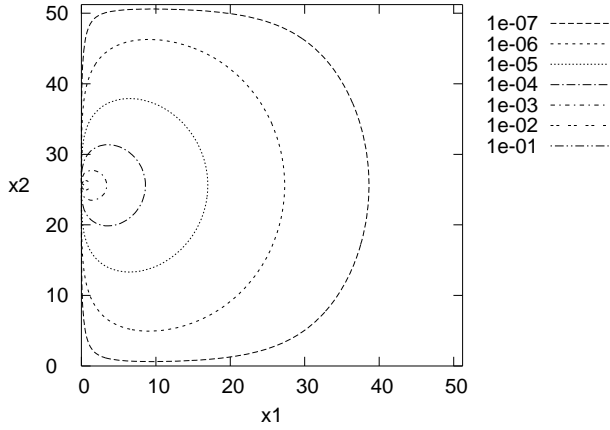


Fig. 5 Numerical Results $\Phi(x)$ on $x_3 = 12.8$ by Diffusion Approximation with $g = 0.967935$

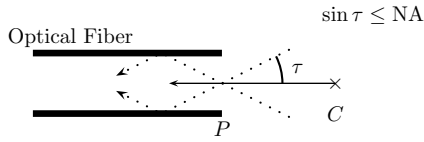


Fig. 6 Optical Fiber and Numerical Aperture

とすると、光ファイバに進入する光子数は

$$\tilde{\Phi}(P, \vec{CP}, NA) = \int_{S^2(\vec{CP}, NA)} I(P, \xi) d\sigma_\xi \quad (6)$$

であり、ファイバによって観測される光強度は $\tilde{\Phi}$ に比例すると考えられる。また入光における指向性は、例えば \tilde{I}_1 では λ によって表すことができる。

入光のファイバの角度を変えながら、異なる開口数の受光ファイバをもちいて光強度を観測することを想定し、以下の設定の数値計算により $\tilde{\Phi}$ を求める。計算領域を $\Omega = (0, 128) \times (0, 256) \times (0, 256)$ とし、点 $C = (128, 128, 128)$ とし、半球 $B = \{x \in \Omega; |x - C| < 128\}$ を考える (Fig. 7)。位相関数は Table 1 の Mie 核とし、 B では $\mu_s = 1.09, \mu_a = 0.08$, $\Omega \setminus B$ では $\mu_s = \mu_a = 0$ とした。

入光ファイバの角度の変更を扱うため、点 $D = (0, 128, 128) \in \partial B \cap \partial \Omega$ において、方向 $\xi_\alpha = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, $0 \leq \alpha \leq \pi/4$ に粒子を入射することを想定し、境界条件を次で与える。

$$I_1(x, \xi) = \begin{cases} \tilde{I}_1(x, \xi; \xi_\alpha), & x = D; \\ 0, & x \in \partial \Omega \setminus \{D\}. \end{cases}$$

領域 B の境界を、外向き法線方向に進行する光強度を受光ファイバで観測することを想定して、 ∂B の近傍の点 $P = (3, 158, 128)$ と $Q = (3, 98, 128)$ において、 $\tilde{\Phi}(P, \vec{CP}, NA)$ および $\tilde{\Phi}(Q, \vec{CQ}, NA)$ を求めた結果を Fig. 8 に示す。ただし $NA = 0.22$ または 0.44 とした。このとき $|P - D| = |Q - D| \approx 30.1$, $|P - C| = |Q - C| \approx 128.5$, すなわち $P, Q \notin \bar{B}$ である。ここで離散化のパラメータを $\Delta x_i = 1, \Delta \theta = \Delta \phi = 3[\text{deg}]$ とした。

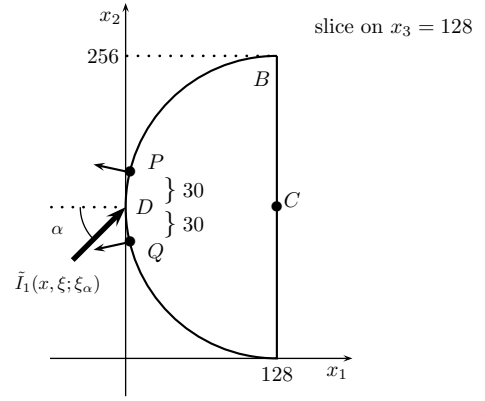


Fig. 7 Computational Domain and Settings

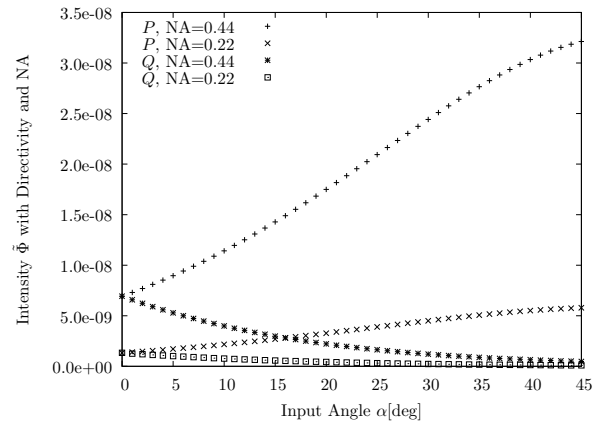


Fig. 8 Intensity (6) with Directivity and NA Depending on Input Angle

得られた計算結果では、入射の角度 α および開口数が $\tilde{\Phi}$ に反映されており、 $\tilde{\Phi}$ は光ファイバの特徴をいかした値として妥当であることがわかる。一方、DA ではこの差を扱うことはできない。

6. ヒト頭部 MR 画像をもちいた場合の計算時間

以上により、光ファイバによる入受光を考慮した精密な光子伝播の数値シミュレーションには 3 次元 RTE の数値計算が必要であることが示されたが、その離散問題 (5) は、 S^2 の離散化を含めると 5 次元の大規模問題となる。本節では、脳科学で利用されるヒト頭部における近赤外光伝播シミュレーションを念頭におき、MR 画像から得られる情報を利用する数値計算が現実的な計算資源で実行可能であることを示す。

本研究では、Fig. 9 に示す $181 \times 217 \times 181$ ボクセルからなる MR 画像を利用した。各ボクセルは 1 辺が 1mm の立方体であり、その頂点に離散問題 (5) の差分法でもちいる格子点を配する。各ボクセルにおける光学特性値は対応する組織の生体光学特性値⁽⁹⁾ を利用し、格子点における光学特性値はその点を頂点とするボクセルの平均値とした。各辺に沿った座標軸を適当に定め、位相関数は $g = 0.9$ の Henyey-Greenstein 核とした。境界条件は、頭頂付近の境界

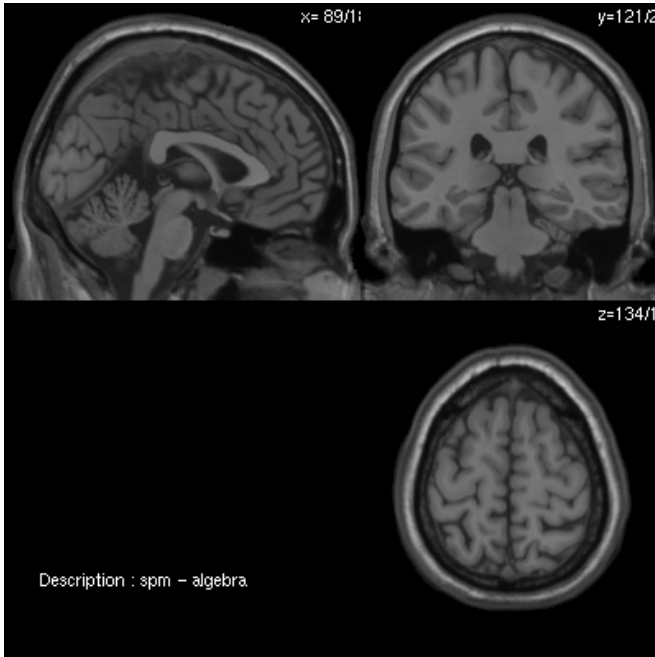


Fig. 9 3D MR Image of Human Head

にあたる $x = (90, 122, 6)$ において, $\lambda = (0, 0, 1)$ を鉛直方向として $\tilde{I}_1(x, \xi; \lambda)$ とし, 他では 0 とした.

このとき $\Delta x_i = 1$ であり, 頭部に含まれると判定された空間方向の格子点数は約 406 万個であった. 角度方向の離散化パラメータを $\Delta\theta = \Delta\phi = 3.75[\text{deg}]$ もしくは $3[\text{deg}]$ とした場合, 離散問題の未知数はそれぞれ 183 億個, 287 億個であった. ここで $3.75[\text{deg}]$ は $M_\theta = 48$ に対応しており, $M_\theta \leq 44$ では離散問題 (5) の係数行列が狭義優対角とならなかった⁽³⁾.

数値計算結果を Fig. 10 に, 計算時間を Table 2 に示す. ここでは Gauss-Seidel 法をもちい, 最大値ノルムでの残差

Table 2 Computational Time Using 3D MRI Information

#Procs	$\Delta\theta = \Delta\phi = 3.75[\text{deg}]$	$\Delta\theta = \Delta\phi = 3[\text{deg}]$
512	645 [min]	Not Available
1024	443	1156 [min]
2048	201	669

が 10^{-14} 以下となったときに反復を停止した. 数値計算は Opteron 6238 (2.50GHz) で倍精度浮動小数点演算をもちい, MPI 並列計算をおこなった. もちいたプログラムで MPI のプロセス数が 512 の場合, 離散化パラメータを $\Delta\theta = \Delta\phi = 3[\text{deg}]$ とするとメモリが不足した. 一方, 同様の設定のもとで $g = 0.9$ とする DA の数値計算結果を Fig. 11 に示す.

Fig. 10 においては数値解が 10^{-32} 以上の範囲を, Fig. 11 においては 10^{-60} 以上の範囲の値を示しているが, ほとんどの領域において解が表示されておらず, 数値解がそれぞれ

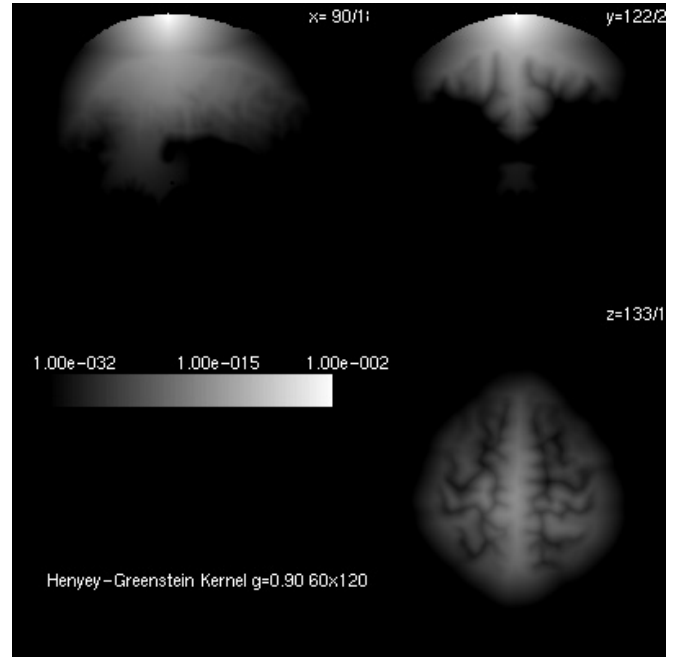


Fig. 10 3D RTE Results Using MRI Information

$10^{-32}, 10^{-60}$ 未満となっていることを示している. これは, RTE および DA の数値解が入光点から離れるに従って指数的に減少していることを示している.

これら解の値が小さい範囲においては丸め誤差の影響を考慮する必要がある. これには多倍長計算が有効であるが, RTE においてはメモリ量の問題から適用は困難であった. そこで DA に対して, 倍精度演算で Gauss-Seidel 法での最大値ノルムで残差が 10^{-13} 未満となる数値解 $\Phi_{ijl}^{\text{double}}$ と, 多倍長計算環境 exflib⁽²⁾ により 10 進 100 桁の精度で残差が 10^{-95} 未満となる数値解 $\Phi_{ijl}^{100\text{digits}}$ を比較した. 100 桁での数値解が $\Phi_{ijl}^{100\text{digits}} \geq 10^{-60}$ の範囲では両者の相対誤差 $|\Phi_{ijl}^{100\text{digits}} - \Phi_{ijl}^{\text{double}}| / \Phi_{ijl}^{100\text{digits}}$ は 0.081 未満であり, 丸め誤差の影響は見られなかった. この結果から RTE の数値計算結果における丸め誤差の影響を論じることはできないものの, RTE の数値解においてその影響を無視できると考えられる 10^{-16} 以上の値をとる領域での RTE と, 対応する領域での DA の違いは顕著であり, 光の伝播のシミュレーションとしての扱いに際しては注意を要する. また計算結果から, RTE の数値解は, 頭皮および頭骨に対応する領域で減衰し, 吸収係数が小さい脳脊髄液に相当する領域を伝播する様子が見られる. これより, 頭部の 3 次元構造を考慮した数値計算の必要性がわかる.

これらは近赤外光の伝播シミュレーションを念頭においているものの, 3 次元輻射輸送方程式および拡散近似の数値計算の結果であることに注意する. 本研究で得られた RTE の数値計算法を統合してファントム実験の結果と比較検討し, 光伝播の高精度かつ高信頼な数値シミュレーションを実現することが今後の課題である.

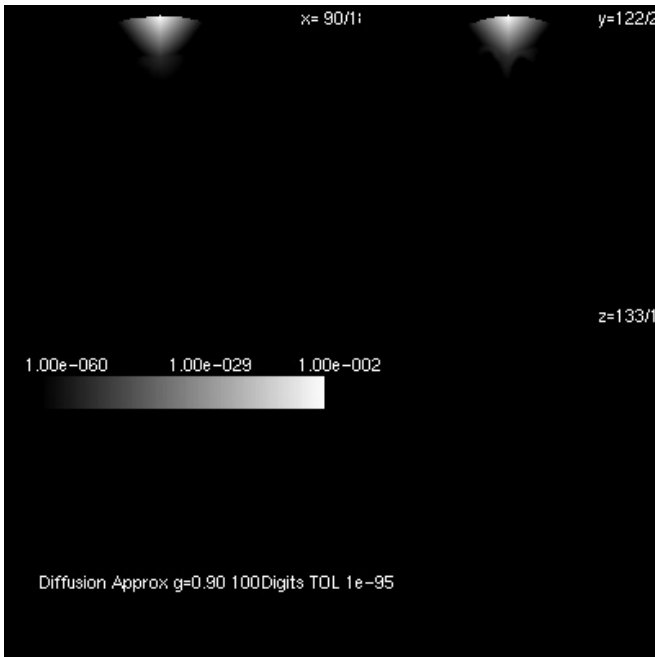


Fig. 11 3D Diffusion Approximation Using MRI Information Computed by 100 Decimal Digits

謝辞 本研究の遂行にあたり、東森信就講師（一橋大学）、磯祐介教授（京都大学）および京都大学大学院医学研究科脳機能総合研究センターに有益なご助言を頂きました。特に本研究で利用したファントムデータおよびヒト頭部 MR 画像の光学特性値の情報をご提供くださった大石直也研究員（同センター）に御礼申し上げます。本研究は科研費（若手研究（B）No. 23740075, 挑戦的萌芽研究 No. 23654034）の助成を受けました。

参考文献

(1) S. R. Arridge, Optical Tomography in Medical Imaging, *Inverse Problems*, **15** (1999), R41–R93.

- (2) H. Fujiwara, exflib — extend precision floating-point arithmetic library, <http://www-an.acs.i.kyoto-u.ac.jp/~fujiwara/exflib>.
- (3) 藤原宏志, 多重格子法による輸送方程式の定常問題に対する差分法の高速解法, *計算数理工学論文集*, **11** (2011), pp. 13–18.
- (4) H. Fujiwara, Numerical Analysis of the Stationary Radiative Transport Equation by Finite Difference and Trapezoidal Rule, in preparation.
- (5) L. G. Henyey and J. L. Greenstein, Diffuse Radiation in the Galaxy, *Annales d'Astrophysique*, **3** (1940), pp. 117–137.
- (6) Japan Science and Technology Agency (JST) A-STEP Funding Program No. 2121313B (2011).
- (7) A. D. Klose, U. Netz, J. Beuthan and A. H. Hielscher, Optical Tomography Using the Time-Independent Equation of Radiative Transfer — Part 1 : Forward Model, *J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, **72** (2002), pp. 691–713.
- (8) G. Mie, Beiträge zur Optik Trüber Medien, Speziell Kolloidaler Metallösungen, *Annalen der Physik*, **25** (1908) pp. 377–445.
- (9) E. Okada and D. T. Delpy, Near-Infrared Light Propagation in an Adult Head Model. II. Effect of Superficial Tissue Thickness on the Sensitivity of the Near-Infrared Spectroscopy Signal, *Applied Optics*, **42** (2003), pp. 2915–2922.
- (10) F. Gao, H. Zhao, and Y. Yamada, Improvement of Image Quality in Diffuse Optical Tomography Using Full Time-Resolved Data, *Applied Optics*, **41** (2002), pp. 778–791.