

## Two-Relaxation-Time を用いた IB-LBM による熱流動解析

NUMERICAL ANALYSIS OF THERMAL-HYDRAULICS BY IMMERSSED  
BOUNDARY-LATTICE BOLTZMANN METHOD USING TWO-RELAXATION-TIME瀬田 剛<sup>1)</sup>, 内田 洋助<sup>2)</sup>, Roberto Rojas<sup>3)</sup>, 林 公祐<sup>4)</sup>, 富山 明男<sup>5)</sup>

Takeshi SETA, Yosuke UCHIDA, Roberto ROJAS, Kosuke HAYASHI, Akio TOMIYAMA

- 1) 富山大学大学院理工学研究部 (工学) (〒 930-8555 富山市五福 3190, E-mail: seta@eng.u-toyama.ac.jp)  
 2) 富山大学大学院理工学教育部 (〒 930-8555 富山市五福 3190, E-mail: m1171204@ems.u-toyama.ac.jp)  
 3) 神戸大学大学院工学研究科 (〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1, E-mail: rojas@cfrg.scitec.kobe-u.ac.jp)  
 4) 神戸大学大学院工学研究科 (〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1, E-mail: hayashi@mech.kobe-u.ac.jp)  
 5) 神戸大学大学院工学研究科 (〒 657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1, E-mail: tomiyama@mech.kobe-u.ac.jp)

We use the two relaxation time (TRT) collision operator in the calculation by the immersed boundary-thermal lattice Boltzmann method (IB-TLBM) to reduce the temperature distortion around the boundary. In the linear collision operator of the TRT, we decompose the distribution function into the symmetric and antisymmetric components, and define relaxation parameters for each part. The Chapman-Enskog expansion indicates that one relaxation time for the antisymmetric component is related to the thermal conductivity. The rigorous analysis for the heat transfer between two plane plates shows that the other relaxation time for the symmetric part controls the temperature distortion at a high relaxation time (high thermal conductivity). In the numerical calculation of natural convection between a hot circular cylinder and a cold square enclosure, the numerical results of streamlines, isotherms, and Nusselt numbers show good agreement with those of the previous studies.

**Key Words:** Thermal Lattice Boltzmann Method, Immersed Boundary Method, Two Relaxation Time, Thermal-Hydraulics

## 1. はじめに

直交デカルト格子系を用い非圧縮性 Navier-Stokes (NS) 方程式が計算される格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, LBM)<sup>(1)</sup> に, 任意形状の境界条件の設定が可能な埋め込み境界法 (Immersed Boundary Method, IBM)<sup>(2)</sup> が適用された Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method (IB-LBM) が多数提案されている<sup>(3)</sup>. IB-LBM では, 緩和時間が増大すると境界近傍で流速分布に歪が発生する問題がある<sup>(3)</sup>. 林らは IB-LBM に Two Relaxation Time (TRT)<sup>(4)</sup> を適用することにより, 流速の歪が取り除かれることを示した<sup>(5)</sup>. IBM を適用した熱流動格子ボルツマン法<sup>(6)</sup> (Immersed Boundary-Thermal Lattice Boltzmann Method, IB-TLBM) においても, 緩和時間が大きくなると温度分布に歪が発生することが指摘されている<sup>(7)</sup>. 一般に, 緩和時間には  $\tau < 1$  の条件が用いられるが, マルチグリッド法が適用された LBM では緩和時間は空間刻み幅に反比例する<sup>(8)</sup>. 1

より大きい緩和時間に対する IB-TLBM の特性を調べることで, 歪の発生原因が特定され, 従来の境界条件に対するスキーム<sup>(9)</sup> と同様に, IB-LBM に対しても柔軟に緩和時間を設定できることが期待される. 本論文では, TRT の適用による IB-TLBM の温度分布の歪の除去の可能性を検討し, IB-TLBM の自然対流解析への適用性を検証する.

## 2. 計算手法

TLBM では離散速度  $\mathbf{c}_k$  に対応する分布関数  $g_k(\mathbf{x}, t)$  が,

$$g_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \delta_t, t + \delta_t) - g_k(\mathbf{x}, t) = -\frac{g_k^+(\mathbf{x}, t) - g_k^{+(eq)}(\mathbf{x}, t)}{\tau_c^+} - \frac{g_k^-(\mathbf{x}, t) - g_k^{-(eq)}(\mathbf{x}, t)}{\tau_c^-} + q_k(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

に従い時間発展する. ここで,  $\delta_t$  は無次元時間刻み幅,  $k$  は離散速度方向を示すインデックス,  $\tau_c^\pm$  は緩和時間,  $g_k^{\pm(eq)}(\mathbf{x}, t)$  は平衡分布関数,  $q_k$  はソース項である. 離散速度  $\mathbf{c}_k$  に対し

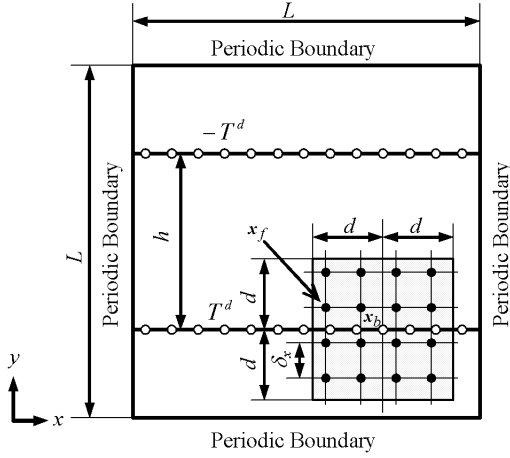


Fig.1 Schematic diagram of the IB-TLBM.

逆向きに離散速度  $c_{\bar{k}}$  に対応する分布関数  $g_{\bar{k}}$  を用い,

$$g_k^\pm = \frac{g_k \pm g_{\bar{k}}}{2}, \quad g_k^{\pm(eq)} = \frac{g_k^{(eq)} \pm g_{\bar{k}}^{(eq)}}{2}, \quad (2)$$

によって, 対称成分  $g_k^+$  と非対称成分  $g_k^-$  が定義される (4). D2Q9 モデルに対する平衡分布関数  $g_k^{(eq)}$  とソース項  $q_k$  は,

$$g_0^{(eq)} = -\frac{2\rho T}{3} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{c^2}, \quad (3)$$

$$g_{1,2,3,4}^{(eq)} = \frac{\rho T}{9} \left[ \frac{3}{2} + \frac{3\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u}}{2c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c^2} \right], \quad (4)$$

$$g_{5,6,7,8}^{(eq)} = \frac{\rho T}{36} \left[ 3 + \frac{6\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2c^2} \right], \quad (5)$$

$$q_0 = \frac{4\rho Q}{9}, \quad q_{1,2,3,4} = \frac{\rho Q}{9}, \quad q_{5,6,7,8} = \frac{\rho Q}{36}, \quad (6)$$

で与えられる. ここで,  $\rho$  は密度,  $T$  は温度,  $\mathbf{u}$  は流速,  $c$  は離散速度の大きさ,  $Q$  は熱源である. Chapman-Enskog 展開により, 式 (1) から温度方程式が導出される.

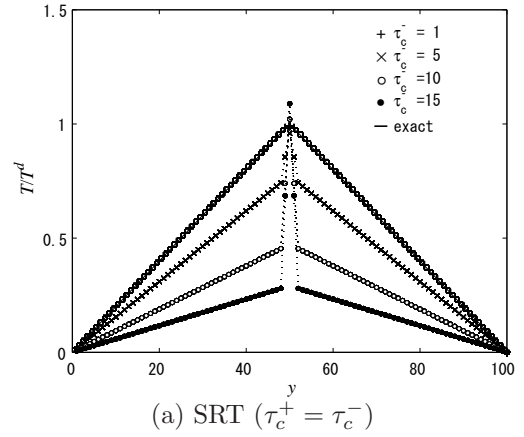
$$\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho T \mathbf{u}) = \chi \nabla^2 (\rho T) + \rho Q. \quad (7)$$

熱拡散率は  $\chi = \frac{2}{3}(\tau_c^- - \frac{1}{2})c^2\delta_t$  で与えられる. 温度は,

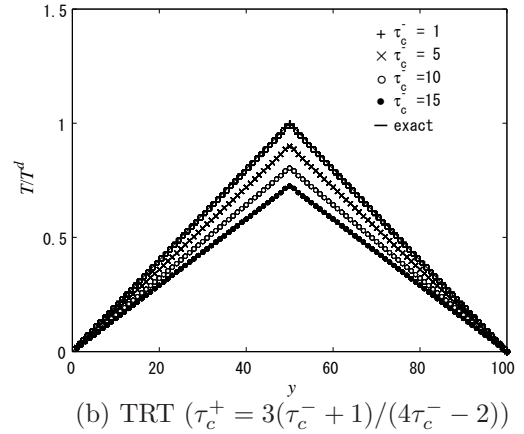
$$T = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^8 g_k, \quad (8)$$

で定義される. IBM では, Fig. 1 の白丸で示されるように, 境界面は点の集合体として近似される. この境界上の点  $\mathbf{x}_b$  に適切な熱源  $Q$  を発生させることで, 流体は構造体の影響を受ける. 熱源は Direct forcing method により,

$$Q(\mathbf{x}_b) = \frac{T^d(\mathbf{x}_b) - T_b(\mathbf{x}_b)}{\delta_t}, \quad (9)$$



(a) SRT ( $\tau_c^+ = \tau_c^-$ )



(b) TRT ( $\tau_c^+ = 3(\tau_c^- + 1)/(4\tau_c^- - 2)$ )

Fig.2 Temperature distributions calculated by the IB-TLBM.

で与えられる. ここで,  $T^d$  は構造体の温度,  $T_b$  は熱源を  $Q = 0$  とした温度方程式 (7) を満足する温度である. IBM では, 式 (9) から求められる  $\mathbf{x}_b$  上の  $Q(\mathbf{x}_b)$  を補間し, Fig.1 の黒丸で示されるデカルト座標上の点  $\mathbf{x}_f$  における値  $Q(\mathbf{x}_f)$  を導出する. 補間された  $Q(\mathbf{x}_f)$  を温度方程式 (7) に代入し, 構造体と流体との連成問題が解かれる. Fig.1 の黒丸で示されたデカルト座標  $\mathbf{x}_f$  上の値は,

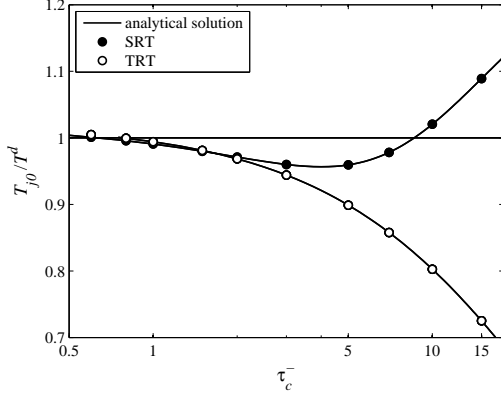
$$Q(\mathbf{x}_f) = \sum_{b=1}^N Q(\mathbf{x}_b) D(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b) \Delta s, \quad (10)$$

により求められる. ここで,  $D(\mathbf{x})$  はディラックのデルタ関数を平滑化した関数,  $N$  は境界を構成する点の総数,  $\Delta s$  は各点に対する単位面積を表し, 構造体が半径  $R$  の円の場合  $\Delta s = 2\pi R\delta_x/N$ , 長さ  $L$  の平板の場合は  $\Delta s = L\delta_x/N$  で与えられる.  $D(\mathbf{x})$  は次式で与えられる.

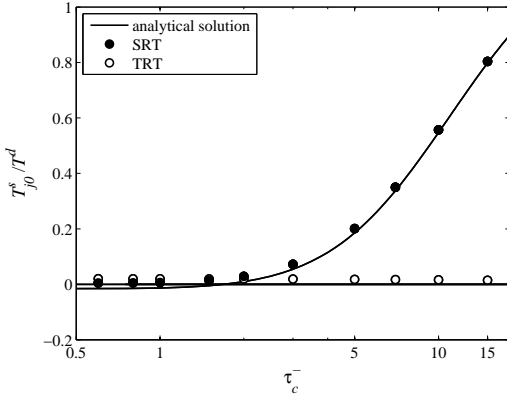
$$D(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b) = \delta(x_f - x_b)\delta(y_f - y_b), \quad (11)$$

$$\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{2d}(1 + \cos(\frac{\pi|r|}{d})) & |r| \leq d \\ 0 & |r| > d \end{cases}. \quad (12)$$

式 (9) に代入する境界上の温度  $T_b(\mathbf{x}_b)$  を求めるためには,



(a) temperature at boundary



(b) temperature distortion at boundary

Fig.3 Comparison of the analytical and numerical solutions for the IB-TLBM with TRT.

格子点  $\mathbf{x}_f$  上の温度  $T(\mathbf{x}_f)$  から，境界上の値  $T_b(\mathbf{x}_b)$  を導出する必要がある．この導出に対しても，式 (11)，(12) の関数  $D(\mathbf{x})$  が用いられる．境界上の値は，

$$T_b(\mathbf{x}_b) = \sum_f T(\mathbf{x}_f) D(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_b) \delta_x^2, \quad (13)$$

により求められる．式 (13) から得られた  $T_b(\mathbf{x}_b)$  を，式 (9) に代入することで，境界上の熱源が求められる．IB-TLBM のアルゴリズムは，以下ようになる．

Step 1. 構造体の温度  $T^d(\mathbf{x}_b)$  と，初期条件  $\rho^{(1)}(\mathbf{x}_f)$ ， $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}_f)$ ， $T^{(1)}(\mathbf{x}_f)$ ， $Q = 0$  を与える．式 (3)-(5) から， $g_k^{(1)} = g_k^{(eq)}$  とし，分布関数の初期条件  $g_k^{(1)}$  を与える．

Step 2. 式 (2) により，分布関数の対称成分と非対象成分  $g_k^{\pm(n)}$ ， $g_k^{\pm(eq)(n)}$  を求める．

Step 3. 式 (1) より， $g_k^{(n+1)}$  を計算し，定義式 (8) から  $T^{(n+1)}(\mathbf{x}_f)$  を求める．

Step 4. 式 (13) を用い， $T^{(n+1)}(\mathbf{x}_f)$  から境界上の温度  $T_b^{(n+1)}(\mathbf{x}_b)$  を求める．

Step 5. 式 (9) より，境界上の熱源  $Q^{(n+1)}(\mathbf{x}_b)$  を求める．

Step 6. 式 (10) より，デカルト座標上の  $Q^{(n+1)}(\mathbf{x}_f)$  を求める．

Step 7. Step 6 で求めた  $Q^{(n+1)}(\mathbf{x}_f)$  を式 (6) に代入する．式 (3)-(5) から， $g_k^{(eq)}$  を求める．

Step 8. 1 タイムステップ  $\delta_t$  進め Step 2 に戻る．

### 3. 数値計算

#### 3.1. 温度歪みの解析

IB-TLBM で発生する温度の歪みに対する TRT の影響を検証するため，Fig. 1 に示す対称な温度境界を設定する．計算領域に  $200 \times 200$  の格子点数を用い， $y = 50\delta_x$ ， $y = 150\delta_x$  の位置に，IBM により， $T = 1$ ， $T = -1$  の温度を設定する．境界間の格子点数  $h = 100$  である．式 (12) において  $d = 2\delta_x$  とする．流速  $\mathbf{u} = (u, v)$  に対し  $u = v = 0$ ， $\rho = \text{const.}$ ， $dT/dt = 0$  の条件を用いる．Le *et al.* (3) や He *et al.* (10) が用いた手法を適用し，解析解を導出する． $y$  座標を示す添え字  $j$  を  $g_k$ ， $T$ ， $Q$  に付加し，式 (1) を陽に記述すると，次式のように示せる．

$$g_0^j = \frac{4\tau_c^+ \delta_t \rho Q_j}{9}, \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} + \frac{1}{\tau_c^-} \right) g_1^j + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} - \frac{1}{\tau_c^-} \right) g_3^j = \frac{\rho T_j}{6\tau_c^+} + \frac{\delta_x \rho Q_j}{9}, \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} + \frac{1}{\tau_c^-} \right) g_3^j + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} - \frac{1}{\tau_c^-} \right) g_1^j = \frac{\rho T_j}{6\tau_c^+} + \frac{\delta_x \rho Q_j}{9}, \quad (16)$$

$$g_2^j = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} + \frac{1}{\tau_c^-} \right) \right\} g_2^{j-1} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} - \frac{1}{\tau_c^-} \right) g_4^{j-1} + \frac{\rho T_{j-1}}{6\tau_c^+} + \frac{\delta_x \rho Q_{j-1}}{9}, \quad (17)$$

$$g_4^j = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} + \frac{1}{\tau_c^-} \right) \right\} g_4^{j+1} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} - \frac{1}{\tau_c^-} \right) g_2^{j+1} + \frac{\rho T_{j+1}}{6\tau_c^+} + \frac{\delta_x \rho Q_{j+1}}{9}, \quad (18)$$

$$g_5^j = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} + \frac{1}{\tau_c^-} \right) \right\} g_5^{j-1} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} - \frac{1}{\tau_c^-} \right) g_7^{j-1} + \frac{\rho T_{j-1}}{12\tau_c^+} + \frac{\delta_x \rho Q_{j-1}}{36}, \quad (19)$$

$$g_6^j = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} + \frac{1}{\tau_c^-} \right) \right\} g_6^{j-1} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} - \frac{1}{\tau_c^-} \right) g_8^{j-1} + \frac{\rho T_{j-1}}{12\tau_c^+} + \frac{\delta_x \rho Q_{j-1}}{36}, \quad (20)$$

$$g_7^j = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} + \frac{1}{\tau_c^-} \right) \right\} g_7^{j+1} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} - \frac{1}{\tau_c^-} \right) g_5^{j+1} + \frac{\rho T_{j+1}}{12\tau_c^+} + \frac{\delta_x \rho Q_{j+1}}{36}, \quad (21)$$

$$g_8^j = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} + \frac{1}{\tau_c^-} \right) \right\} g_8^{j+1} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau_c^+} - \frac{1}{\tau_c^-} \right) g_6^{j+1} + \frac{\rho T_{j+1}}{12\tau_c^+} + \frac{\delta_x \rho Q_{j+1}}{36}. \quad (22)$$

温度の定義式 (8) と，式 (14)-(22) を用いることにより，

$$0 = \chi \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{\delta_x^2} + Q_j + \frac{3\tau_c^- + 2\tau_c^+ - 4\tau_c^+ \tau_c^-}{6} (Q_{j+1} - 2Q_j + Q_{j-1}), \quad (23)$$

が得られる．Fig. 1 の白丸で示される IBM による境界が設定された  $y$  座標の位置を  $j_0$  で表す．位置  $j_0$  における熱源を

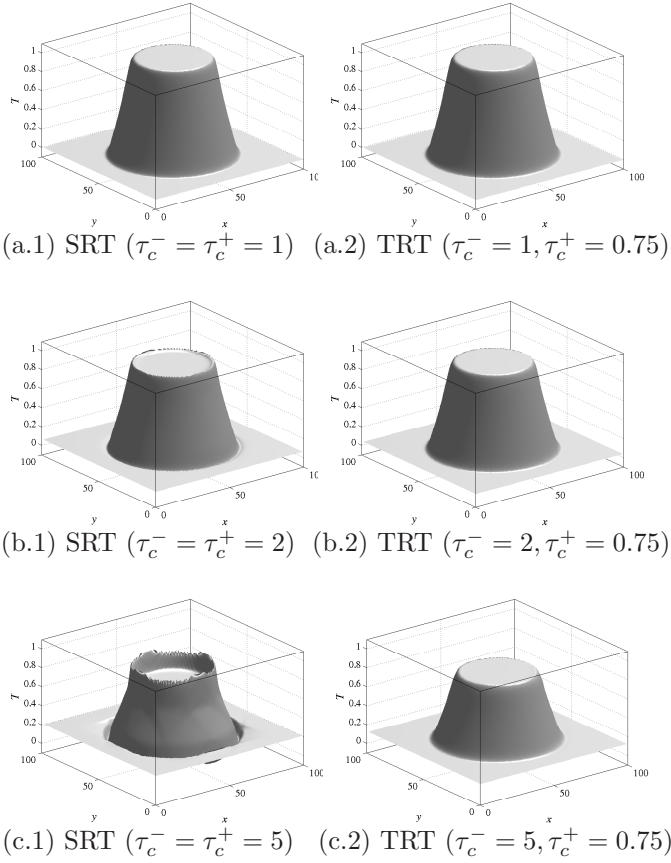


Fig. 4 Temperature distributions between two concentric cylinders.

$Q_0$  とすると, 式 (10) より,

$$Q_{j_0} = \frac{Q_0}{2}, \quad Q_{j_0 \pm 1} = \frac{Q_0}{4}, \quad Q_{|j-j_0| \geq 2} = 0, \quad (24)$$

となる. 式 (24) を式 (23) に代入すると,

$$T_{j_0} - T_{j_0+1} = \frac{Q_0 \delta_x^2}{\chi} \left( \frac{1}{4} - \frac{3\tau_c^- + 2\tau_c^+ - 4\tau_c^+ \tau_c^-}{24} \right), \quad (25)$$

$$T_{j_0+1} - T_{j_0+2} = \frac{Q_0 \delta_x^2}{\chi} \left( \frac{1}{2} - \frac{3\tau_c^- + 2\tau_c^+ - 4\tau_c^+ \tau_c^-}{24} \right), \quad (26)$$

$$T_{j-1} - T_j = \frac{Q_0 \delta_x^2}{2\chi}, \quad \text{for } j > j_0 + 2, \quad (27)$$

が得られる. 式 (27) が全領域で成り立てば,  $j_0$  と  $j_0 + 2$  における温度は,

$$\bar{T}_{j_0} = \frac{Q_0 \delta_x^2 h}{2\chi} \frac{1}{2}, \quad (28)$$

$$T_{j_0+2} = \frac{Q_0 \delta_x^2}{2\chi} \left( \frac{h}{2} - 2 \right), \quad (29)$$

となるはずである. 式 (25), (26), (29) より,

$$T_{j_0} = \frac{Q_0 \delta_x^2}{\chi} \left( \frac{h}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3\tau_c^- + 2\tau_c^+ - 4\tau_c^+ \tau_c^-}{12} \right), \quad (30)$$

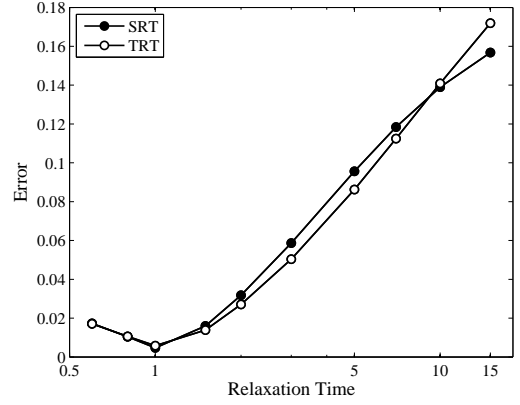


Fig. 5 Relative error of the temperature between the two concentric cylinders.

$$T_{j_0 \pm 1} = \frac{Q_0 \delta_x^2}{\chi} \left( \frac{h}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3\tau_c^+ + 2\tau_c^- - 4\tau_c^+ \tau_c^-}{24} \right), \quad (31)$$

が得られる. 式 (13) に式 (30), (31) を代入すると,

$$\begin{aligned} T_b &= \frac{T_{j_0}}{2} + \frac{T_{j_0+1}}{4} + \frac{T_{j_0-1}}{4} \\ &= \frac{Q_0 \delta_x^2}{\chi} \left( \frac{h}{4} - \frac{3}{8} - \frac{3\tau_c^- + 2\tau_c^+ - 4\tau_c^+ \tau_c^-}{16} \right), \end{aligned} \quad (32)$$

のように境界上の温度  $T_b$  が得られる. 式 (9) より,  $Q_0 = \frac{T^d - T^b}{\delta_t}$  であるから, 構造体の温度  $T^d$  は,

$$\begin{aligned} T^d &= T^b + \delta_t Q_0 \\ &= \frac{Q_0 \delta_x^2}{\chi} \left( \frac{h}{4} - \frac{17}{24} - \frac{\tau_c^-}{8} + \frac{23\tau_c^-}{48} + \frac{\tau_c^+ \tau_c^-}{4} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

となる. 式 (30) から式 (28) を引くと, 温度の歪は,

$$T_{j_0}^s = T_{j_0} - \bar{T}_{j_0} = \frac{Q_0 \delta_x^2 (4\tau_c^- \tau_c^+ - 3\tau_c^- - 2\tau_c^+ - 3)}{12\chi}, \quad (34)$$

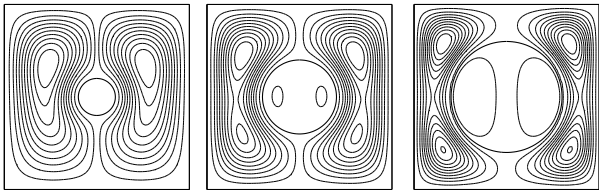
と求まる.  $T_{j_0}^s = 0$  とするためには,  $\tau_c^-$  に対し,  $\tau_c^+$  が,

$$\tau_c^+ = \frac{3(\tau_c^- + 1)}{4\tau_c^- - 2}, \quad (35)$$

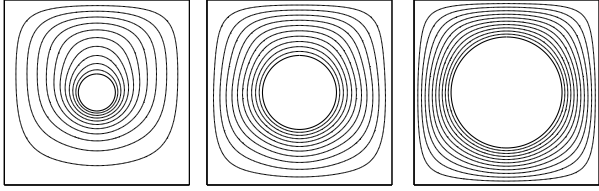
の関係を満足する必要がある. 式 (30), (33), (34) から,  $j_0$  における温度の値, 温度の歪は次式で与えられる.

$$\frac{T_{j_0}}{T^d} = \frac{\frac{h}{4} - \frac{1}{4} - \frac{\tau_c^-}{4} - \frac{\tau_c^+}{6} + \frac{\tau_c^+ \tau_c^-}{3}}{\frac{h}{4} - \frac{17}{24} + \frac{23\tau_c^-}{48} - \frac{\tau_c^-}{8} + \frac{\tau_c^+ \tau_c^-}{4}}, \quad (36)$$

$$\frac{T_{j_0}^s}{T^d} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{\tau_c^-}{4} - \frac{\tau_c^+}{6} + \frac{\tau_c^+ \tau_c^-}{3}}{\frac{h}{4} - \frac{17}{24} + \frac{23\tau_c^-}{48} - \frac{\tau_c^-}{8} + \frac{\tau_c^+ \tau_c^-}{4}}. \quad (37)$$

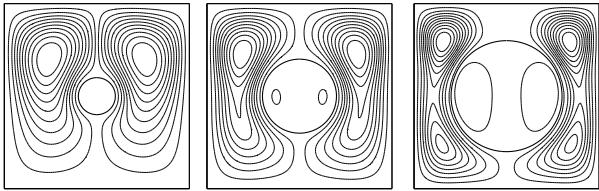


(a.1)  $R/L = 0.1$  (a.2)  $R/L = 0.2$  (a.3)  $R/L = 0.3$

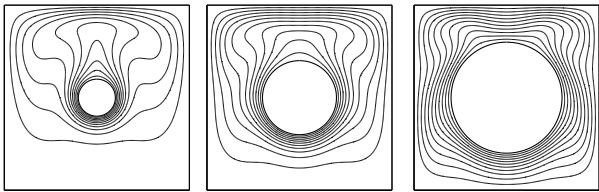


(b.1)  $R/L = 0.1$  (b.2)  $R/L = 0.2$  (b.3)  $R/L = 0.3$

$$(Ra = 10^4, \tau_v^+ = 0.5758, \tau_c^- = 0.5534)$$

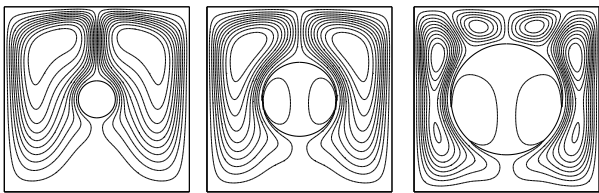


(a.1)  $R/L = 0.1$  (a.2)  $R/L = 0.2$  (a.3)  $R/L = 0.3$

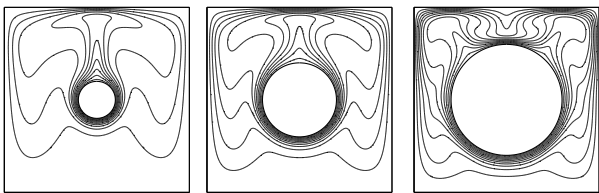


(b.1)  $R/L = 0.1$  (b.2)  $R/L = 0.2$  (b.3)  $R/L = 0.3$

$$(Ra = 10^5, \tau_v^+ = 0.5799, \tau_c^- = 0.5563)$$



(a.1)  $R/L = 0.1$  (a.2)  $R/L = 0.2$  (a.3)  $R/L = 0.3$



(b.1)  $R/L = 0.1$  (b.2)  $R/L = 0.2$  (b.3)  $R/L = 0.3$

$$(Ra = 10^6, \tau_v^+ = 0.5632, \tau_c^- = 0.5445)$$

Fig. 6 Natural convection between a hot circular cylinder and a cold square enclosure. (a) Streamlines; (b) Isotherms.

$\delta_x = \delta_t = c = 1$ としたIB-TLBMによって計算した温度分布について、半分の計算領域に対する結果を Fig. 2 に示す。ここで、収束判定条件は  $\max|T^{(n+1)} - T^{(n)}| \leq 10^{-8}$  とした。 $\tau_c^- = \tau_c^+$  の場合、式 (1) は Single Relaxation Time (SRT) に相当する。Fig. 2 (a) に示されるように、SRT では、 $\tau_c^- = 1$  において数値解は厳密解と一致するが、 $\tau_c^-$  が増加するにつれ、温度分布に歪が生じる。式 (35) の  $\tau_c^-$  と  $\tau_c^+$  の関係式を満足する TRT による計算結果を Fig. 2 (b) に示す。式 (35) の関係式を満足することで、TRT では  $\tau_c^-$  が増加しても温度の歪が発生しない。境界における温度の値と温度の歪に関して、Fig. 2 から得られた計算結果と式 (36), (37) の解析解とを Fig. 3 に示す。Fig. 3 において計算結果と理論解とが良く一致しており、式 (36), (37) の解析解の妥当性が実証された。Fig. 3 (a) において TRT で計算された境界値には誤差が生じるが、TRT は  $\tau_c^-$  が大きい場合に発生する温度の歪の除去に有効であることが Fig. 3 (b) から分かる。

次に、二重円筒管内の 2 次元熱伝導問題に対する TRT の有効性を検証する。計算領域は  $100\delta_x \times 100\delta_x$ 、内円の半径は  $R_i = 22.5\delta_x$ 、外円の半径は  $R_o = 35\delta_x$ 、内円の温度は  $T_i = 1$ 、外円の温度は  $T_o = 0$  とする。領域の中心からの半径  $R$  に対する温度方程式の厳密解  $\bar{T}$  は、

$$\bar{T}(R) = \frac{T_o \log(R/R_i) - T_i \log(R/R_o)}{\log(R_o/R_i)}, \quad (38)$$

で与えられる。2 次元問題に対しては、 $T_{j0}^s = 0$  とする  $\tau_c^+$  の値は不明なため、 $\tau_c^+ = \lim_{\tau_c^- \rightarrow \infty} \{(3\tau_c^- + 3)/(4\tau_c^- - 2)\} = 3/4$  を用いる。Fig. 4 に計算結果を示す。 $\tau_c^- = 1$  に対し、SRT, TRT とともに厳密解とほぼ等しい結果を示しているが、SRT では  $\tau_c^- = 2$  に対し温度分布に歪が発生することが Fig. 4(b.1) から分かる。Fig. 4(c.1), (c.2) に示されるように、 $\tau_c^- = 5$  に対し、SRT では温度分布の歪が増大するが、TRT では歪は発生しない。ただし、Fig. 2(b) の結果と同様に、TRT では温度が厳密解と比較し小さくなるという欠点がある。Fig. 4 で示された計算結果から得られた誤差  $\text{Error} = \sqrt{\sum_x (T(x) - \bar{T}(x))^2 / \sum_x \bar{T}(x)^2}$  を、Fig. 5 に示す。 $\tau_c^- < 1$  において TRT と SRT の精度に差はないが、TRT は SRT と比較し、温度の歪が発生しないため、 $\tau_c^-$  が大きくなっても誤差は小さい。TRT では歪が発生しないが、Fig. 4 から明らかなように、 $\tau_c^-$  の増加とともに温度の値が厳密解より小さくなる。そのため、 $\tau_c^- = 15$  において、TRT の誤差は SRT よりも大きくなる。

### 3.2. 自然対流の数値解析

TRT を適用した IB-TLBM を用い円柱周りの自然対流解析を行い、ヌセルト数、流れ関数、温度分布を検証する。壁面を  $T = 0$  に設定した正方領域内の中心に  $T = 1$  の円柱を設定する。浮力はブシネスク近似  $G_y = \beta g(T - T_m)$  により与える。 $\beta$  は体積膨張率、 $g$  は重力加速度の大きさ、 $T_m$  は基準温度を表し、 $T_m = 0.5$  とする。正方領域の境界条件には、非平衡分布関数に対するバウンズバック・スキーム<sup>(11)</sup>を、円柱には IBM

Table 1 Comparison of surface-averaged Nusselt number.

Ra	$R/L$	Present	Ref.[12]	Ref.[13]
$10^4$	0.1	2.207	2.071	2.08
	0.2	3.469	3.331	3.24
	0.3	5.832	5.826	5.40
$10^5$	0.1	4.063	3.825	3.79
	0.2	5.298	5.08	4.86
	0.3	6.738	6.212	6.21
$10^6$	0.1	6.669	6.107	6.11
	0.2	9.862	9.374	8.90
	0.3	13.17	11.62	12.00

を用いる。レイリー数  $Ra$  と、計算領域の幅  $L$  と円柱半径  $R$  の比  $R/L$  による平均ヌセルト数、流れ関数、温度分布への影響を検証する。格子点数と代表速度  $U_0$  は、 $Ra = 10^4$  に対し  $151 \times 151$ ,  $U_0 = 0.2c$ ,  $Ra = 10^5$  に対し  $201 \times 201$ ,  $U_0 = 0.5c$ ,  $Ra = 10^6$  に対し  $251 \times 251$ ,  $U_0 = 0.1c$  とする。プラントル数は  $Pr = 0.71$  である。NS 方程式の計算には TRT を適用した IB-LBM<sup>(5)</sup> を用いる。緩和時間は  $\tau_v^+ = 3U_0L\sqrt{Pr/Ra} + 0.5$ ,  $\tau_c^- = 1.5U_0L/\sqrt{PrRa} + 0.5$  で与え、 $\tau_v^- = \tau_c^+ = 0.75$  とする。Fig. 6 に示されるように、本手法で計算された流れ関数および温度分布は、Moukalled<sup>(12)</sup> や Shu<sup>(13)</sup> の計算結果とよい一致を示している。なお、Moukalled<sup>(12)</sup> は  $42 \times 35$  の格子点を、Shu<sup>(13)</sup> は  $Ra = 10^4$  に対し  $31 \times 21$ ,  $Ra = 10^5$  に対し  $41 \times 21$ ,  $Ra = 10^6$  に対し  $69 \times 39$  の格子点を用いている。円柱表面平均ヌセルト数  $\bar{Nu}$  と流れ関数の最大値を、表 1, 表 2 に示す。表 1, 表 2 において、本計算結果は参照解<sup>(12, 13)</sup> と良い一致を示しており、本手法が自然対流解析に適用可能であることが示された。

#### 4. おわりに

IB-TLBM に TRT を適用することにより、境界近傍で発生する温度分布の歪が除去されることが明らかになった。円柱周りの自然対流解析において、平均表面ヌセルト数、流れ関数、温度分布は、参照解<sup>(12, 13)</sup> と良い一致を示し、本手法の自然対流解析に対する適用性が実証された。なお、 $\tau_c^- < 1$  であるため、TRT による自然対流解析に対する歪の除去の影響は観察出来なかった。今後、TRT の温度の値が低くなる問題を解決する予定である。本研究は科学研究費 (No.23560190) の支援のもとで行われた。ここに謝意を表する。

#### 参考文献

- (1) Chen, S., Doolen, G. D.: Lattice Boltzmann method for fluid flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**(1998), pp. 329–364.
- (2) Peskin, C. S.: Flow patterns around heart valves: A numerical method, *J. Comput. Phys.*, **10**(1972), pp. 252–271.
- (3) Le, G., Zhang, J.: Boundary slip from the immersed boundary lattice Boltzmann models, *Phys. Rev. E*, **79**(2009), pp. 026701.

Table 2 Comparison of maximum absolute values of the stream function.

Ra	$R/L$	Present	Ref.[12]	Ref.[13]
$10^4$	0.1	1.75	1.73	1.71
	0.2	0.99	1.02	0.97
	0.3	0.49	0.50	0.49
$10^5$	0.1	10.12	10.15	9.93
	0.2	8.28	8.38	8.10
	0.3	5.06	5.10	5.10
$10^6$	0.1	21.00	25.35	20.98
	0.2	23.93	24.07	24.13
	0.3	18.76	21.30	20.46

- (4) Ginzburg, I., Verhaeghe, F., d’Humières, D.: Two-relaxation-time lattice Boltzmann scheme: About parametrization, velocity, pressure and mixed boundary conditions, *Commun. Comput. Phys.*, **3**(2008), pp. 427–478.
- (5) Hayashi, K., Rojas, R., Seta, T., Tomiyama, A.: A two-relaxation time based immersed boundary-lattice Boltzmann method, *J. Comput. Multiphase Flows*, **4**(2012), pp. 193–210.
- (6) Peng, Y., Shu, C., Chew, Y. T.: Simplified thermal lattice Boltzmann model for incompressible thermal flow, *Phys. Rev. E, Physical Review E*, **68**(2003), pp. 026701.
- (7) 瀬田剛: 埋め込み境界法を用いた格子ボルツマン法による自然対流解析, *日本数理工学論文集*, **10**(2010), pp. 1-6.
- (8) Peng, Y., Shu, C., Chew, Y.T., Niu X.D., Lu, X.Y.: Application of multi-block approach in the immersed boundary-lattice Boltzmann method for viscous fluid flows, *J. Comput. Phys.*, **218**(2006), pp. 460–478.
- (9) Inamuro, T., Yoshino, M., Ogino, F.: A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations, *Phys. Fluids*, **7**(1995), pp. 2928–2930.
- (10) He, X., Zou, Q., Luo, L.S., Dembo, M. Analytic solutions of simple flows and analysis of nonslip boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, *J. Stat. Phys.*, **87**(1997), pp. 115–136.
- (11) Zou, Q., He, X.: On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model, *Phys. Fluids*, **9**(1997), pp. 1591–1598.
- (12) Moukalled, F., Acharya, S.: Natural convection in the annulus between concentric horizontal circular and square cylinders, *J. Thermophysics Heat Tr.*, **10**(1996), pp. 524–531.
- (13) Shu, C., Zhu, Y. D.: Efficient computation of natural convection in a concentric annulus between an outer square cylinder and an inner circular cylinder, *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, **38**(2002), pp. 429–445.