

スポット像を用いた収差逆解析の安定性

STABILITY OF ABERRATION RETRIEVAL METHOD USING SPOT IMAGES

岡田 和佳¹⁾, 天谷 賢治²⁾, 大西 有希³⁾

Kazuyoshi OKADA, Kenji AMAYA and Yuki ONISHI

- 1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-36, E-mail: kokada@a.mei.titech.ac.jp)
2) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-36, E-mail: kamaya@a.mei.titech.ac.jp)
3) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-36, E-mail: yonishi@a.mei.titech.ac.jp)

We have developed the aberration retrieval method using the spot images. In this paper, we study the stability of the present aberration retrieval method using the spot images. At first, the present aberration retrieval method is explained. Secondly, the stability indicator for the present aberration retrieval method is proposed. Finally, the stability indicators are calculated with changing the some conditions like the cell size of the imaging device, the number of the spot images, the analytical region and the term number of the Zernike coefficients.

Key Words: Inverse Analysis, Optical Engineering, Aberration Retrieval, Spot Images

1. はじめに

デジタルカメラに代表される光学機器の普及に伴い、結像レンズをはじめとする光学部品が我々の身近なものとなってきている。またレーザーの出現に伴い、非侵襲、非破壊な検査を目的とした光学計測や、切断や溶接などの加工技術などが発展し、ますます光学部品は重要となってきている。このような光学部品の普及に伴い、その検査技術もまた重要性を増している。これら光学部品の中でも結像レンズの役割は大きく、その性能を評価するために収差を計測することは重要である。

一般的な収差計測手法は干渉計を用いる方法である^(1, 2)。干渉計による収差計測手法は従来から信頼されており、光学部品の品質管理基準として広く用いられている。しかし、干渉計測に用いる参照光の作成には多くの労力を要する。また、干渉縞は空気の乱れや振動の影響を受けやすい。さらに、干渉計は多数の精密な光学部品で構成されるため高価である。

一方で Shack-Hartmann センサー⁽³⁾は、装置の微調整を必要とせず高効率に収差を計測することが可能である。しかし Shack-Hartmann センサーは、干渉計と比べて収差の同定精度が悪く空間分解能が低いなどの問題がある。また、マイクロレンズアレイなどの特殊な光学素子を用いるため装置が高価である。

以上の収差計測手法の問題点を克服するために、これまで我々はスポット像を用いた収差逆解析手法を開発してきた^(4, 5, 6)。本手法では、撮影したスポット像を逆解析すること

により収差を同定する。スポット像は簡便な光学系で撮影できるため装置は安価であり、複雑な光学系を微調整する必要もなく効率的な計測が可能である。また、干渉計と同程度の精度を得ることが実験により確かめられている。本手法では、逆解析に用いるスポット像のデフォーカス距離、デフォーカス像の枚数、解像度など様々な解析条件が存在するが、現状ではこれらの条件を経験により決定している。計測の高精度化、安定性の向上のためにも、これらの解析条件を合理的に決定することが求められる。

本研究では、スポット像を用いた収差逆解析手法の安定性について検討する。すなわちまず、スポット像を用いた収差逆解析手法について説明する。次に計測画像の変動に対する収差係数の変動を、本手法の安定性の指標として導入する。最後にデフォーカス像の枚数、解像度、解析領域、Zernike 項数に対して導入した指標を計算し、要求精度に対して必要な条件について検討する。

以上の検討により、スポット像を用いた収差解析手法における条件の選択に有用な指標を与えることができる。また、導入した安定性指標はデフォーカス距離などの計測条件の最適化などへの応用が期待される。

2. スポット像を用いた収差逆解析手法

2.1. スポット像の数値モデル

収差計測のための光学系の構成図及び座標系の定義を図 1 に示す。光学系はレーザー、3 枚のレンズ (Lens A, Lens B, Lens C)、撮像素子から構成される。撮像素子面上に $x-y$ 平面を取り、それに直交する軸を z 軸とする。波長 λ のレー

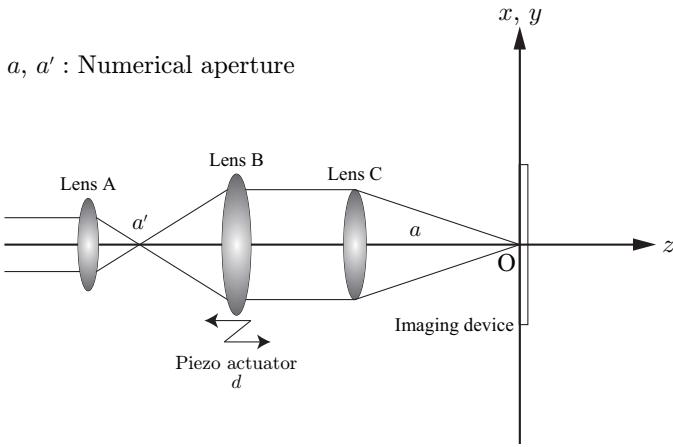


Fig. 1 The set up of the optical system for the aberration measurement and the definition of the coordinate system.

ザー光を Lens A に入射し, Lens B で再び平行光に戻す. このときの実効的な開口数を a' とする. Lens B を測定基準位置 d_0 からピエゾアクチュエータで z 方向に d だけ移動させることにより, Lens C への入射光に既知の位相変調を与える. このような簡便な光学系により容易にデフォーカスの位相変調を与えることができる. 様々な移動量 d で計測を行うことにより, 逆解析における情報量を増やし適切化する^(7, 8). 収差逆解析の結果得られる収差は, 光学系全体の収差である. 予め, 検査対象となる光学系以外の収差を計測しておき, その収差を計算により除去することで, 検査対象の光学系の収差を得ることができる.

光学系全体の瞳関数 $g(\xi, \eta)$ と入射光に既知の位相変調 $h(\xi, \eta; d)$ を与えたスポット像の複素振幅分布 $f(x, y; d)$ との関係は次式のように表される⁽⁹⁾.

$$f(x, y; d) = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{\sqrt{1-\xi^2}} g(\xi, \eta) h(\xi, \eta; d) \frac{e^{-i2\pi \frac{d}{\lambda} (x\xi + y\eta)}}{\sqrt{1 - a^2(\xi^2 + \eta^2)}} d\eta d\xi. \quad (1)$$

ここで, a は像側開口数である. また, 位相変調 $h(\xi, \eta; d)$ は次式で与えられる⁽¹⁰⁾.

$$h(\xi, \eta; d) = \exp \left[i2\pi \frac{d}{\lambda} \sqrt{1 - a^2(\xi^2 + \eta^2)} \right]. \quad (2)$$

ここで, a' は物体側開口数である.

次に, 瞳関数 $g(\xi, \eta)$ を Zernike 多項式⁽¹¹⁾ を用いて表現する. 振幅成分を低次の $(M+1)$ 項, 位相成分を 0 次成分を除く低次の N 項を用いて次式のように展開する.

$$g(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) e^{i2\pi\Phi(\xi, \eta)}, \quad (3)$$

$$A(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^M \alpha_i Z_i(\xi, \eta), \quad (4)$$

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^N \beta_i Z_i(\xi, \eta). \quad (5)$$

ここで, 関数 $Z_i(\xi, \eta)$ は Zernike 基底関数である. また, $\alpha = \{\alpha_i\}$, $\beta = \{\beta_i\}$ は Zernike 係数である. 通常, Zernike 係数

は Fringe Zernike 多項式の順に並べる. Zernike 係数の添え字 i と収差の関係を表 1 にまとめる.

Table 1 Relation between the Fringe Zernike index and the aberrations.

Index i	Aberration
0	Piston
1	X-Tilt
2	Y-Tilt
3	Defocus
4	3rd Astigmatism 0 degree
5	3rd Astigmatism 45 degree
6	3rd Coma 0 degree
7	3rd Coma 90 degree
8	3rd Spherical

以上の定式化により, 瞳関数を表す Zernike 係数 α , β を仮定すれば, 入射光に既知の位相変調 $h(x, y; d)$ を与えたスポット像,

$$I(x, y; d) = \|f(x, y; d)\|^2, \quad (6)$$

が計算される.

2.2. 撮像素子の数理モデル

これまでの定式化により撮像素子面上におけるスポット像の強度分布 $I(x, y; d)$ が計算される. 実際の撮像素子ではこの強度分布が各セル毎に積分された値,

$$I_{i,j}(d) = \iint_{-\infty}^{\infty} I(x, y; d) \Pi^{(2)} \left(\frac{x_i - x}{s}, \frac{y_j - y}{t} \right) dx dy, \quad (7)$$

が得られ, さらに所望のサンプリング間隔になるように電子的にリサンプリングされる. ここで, $\Pi^{(2)}(x, y) = \Pi(x)\Pi(y)$ ($\Pi(x)$ は矩形関数) である. リサンプリングでは電気的な信号処理などが含まれるが, ここでは第一近似として画像の線形補間モデルを用いる. すなわち,

$$I'_{i',j'}(d) = \sum_{i,j} I_{i,j}(d) w(x'_{i'} - x_i + \delta_x, y'_{j'} - y_j + \delta_y) + c, \quad (8)$$

$$w(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Pi^{(2)} \left(\frac{x'}{s}, \frac{y'}{t} \right) \Pi^{(2)} \left(\frac{x - x'}{s'}, \frac{y - y'}{t'} \right) dx' dy'. \quad (9)$$

ここで, (s, t) は撮像素子のセルサイズ, (s', t') はリサンプリングの間隔, (x_i, y_j) は撮像素子の各セルの中心位置, $(x'_{i'}, y'_{j'})$ はリサンプリング時の各画素の中心位置, $w(x, y)$ はリサンプリングの窓関数である. また, (δ_x, δ_y) はリサンプリング時の中心のシフト量, c は暗電流により発生する画像のオフセットであり, 本手法では Zernike 係数 α , β に加え, これらの量 δ_x , δ_y , c も逆解析における未知量とする.

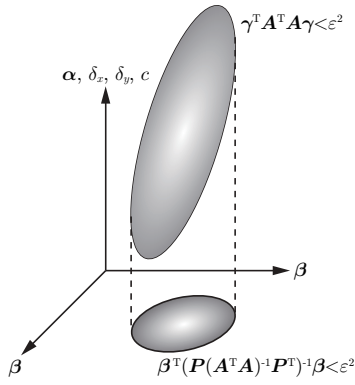


Fig. 2 The basic concept of the hyperellipsoid and its projection.

2.3. 逆問題の定式化

撮影した画像から収差係数を推定する逆問題を定式化する。コリメータの変位 $d = d_k$ における撮影画像の画素値を並べたベクトル $\bar{\mathbf{I}}_k$ と計算により得られる画像の画素値 $I'_{i',j'}(d_k)$ を並べたベクトル \mathbf{I}_k の二乗残差 J は次式である。

$$J(\gamma) = \sum_k \|(\mathbf{I}_k(\gamma) - \bar{\mathbf{I}}_k)\|^2. \quad (10)$$

ここで、 $\gamma = \{\alpha^T, \beta^T, \delta_x, \delta_y, c\}^T$ は本収差逆解析における未知量を成分とするベクトルであり、本問題における未知量の数は $M + N + 4$ である。式 (10) を最小化することで、収差係数を成分とするベクトル β を含むベクトル γ の最小二乗解 γ^* が得られる。

$$\gamma^* = \arg \min_{\gamma} J(\gamma). \quad (11)$$

この最小二乗問題は、Gauss-Newton 法や Levenberg-Marquardt 法などの非線形最小二乗法⁽¹²⁾ により解くことができる。

3. スポット像を用いた収差逆解析における安定性指標

本収差逆解析手法の安定性指標 κ として、計測画像 $\mathbf{I} = \{\mathbf{I}_0^T, \mathbf{I}_1^T, \dots\}^T$ の変動 $\|\delta \mathbf{I}\|$ に対する未知量ベクトル γ の変動 $\|\delta \gamma\|$ を導入する。条件数が計測量 \mathbf{I} の相対誤差に対する解 γ の相対誤差であるのに対し、ここでは計測量 \mathbf{I} の絶対誤差に対する解 γ の絶対誤差を安定性指標として用いる。すなわち、 γ から \mathbf{I} への線形化行列 $\mathbf{A}(\gamma) = \partial \mathbf{I} / \partial \gamma$ を用いて、

$$\kappa = \sup_{\gamma} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sup_{\|\delta \mathbf{I}\| \leq \epsilon} \frac{\|\delta \gamma\|}{\|\delta \mathbf{I}\|} = \sup_{\gamma} \sqrt{\|(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}\|}. \quad (12)$$

ここで、本収差逆解析手法は非線形逆問題であるため、線形化行列 \mathbf{A} が γ の関数であり、その上限を見積もる必要があることに注意されたい。 $\gamma^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \gamma < \epsilon^2$ は解空間の超楕円体を表し、未知量ベクトル γ はこの超楕円体の大きさに基づき変動する。この超楕円体の概念図を図 2 に示す。式 (12) で定義される安定性指標 κ は未知量ベクトル γ 全体の変動を表すが、本手法における未知量ベクトル γ には振幅係数ベクトル α や撮像素子のモデルパラメータ δ_x, δ_y, c が含まれる。本手法は収差解析が目的であるため、収差係数ベクトル β の

Table 2 Range of the unknown vector γ for the study of the stability of the aberration retrieval method (L : Low-resolution, H : High-resolution) .

Unknown quantity	L	H
α_0	90~110	22~42
$\alpha_i (i \neq 0)$	-10~10	-10~10
β_1, β_2	0	0
$\beta_i (i \neq 1, 2)$	-1~1	-1~1
δ_x, δ_y	-1~1	-
c	13~17	13~17

Table 3 List of the conditions for calculating the stability indicator (L : Low-resolution, H : High-resolution) .

Cell size	(L)	1.85, 2.467, 3.7, 7.4
s [μm]	(H)	14.8, 29.6, 44.4, 59.2
Number of images	(L)	1, 3, 5, 7, 9, 11
K	(H)	1, 2, 3
Analytical region	(L)	10, 15, 20
R [μm]	(H)	971, 1144, 1404
Zernike term number	(L)	8, 15
$M = N$	(H)	8, 15

変動が最も重要である。そこで、未知量ベクトル γ の解空間の $(M + N + 4)$ 次元超楕円体を収差係数 β の N 次元超平面に射影した N 次元超楕円体に着目する。すなわち、 $\beta = \mathbf{P} \gamma$ を満たす射影行列 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{N \times (M+N+4)}$ とすると、

$$\kappa_{\beta} = \sup_{\gamma} \sqrt{\| \mathbf{P} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{P}^T \|}, \quad (13)$$

が収差係数 β の変動を表す。ノルムとして 2-ノルムを採用すれば、

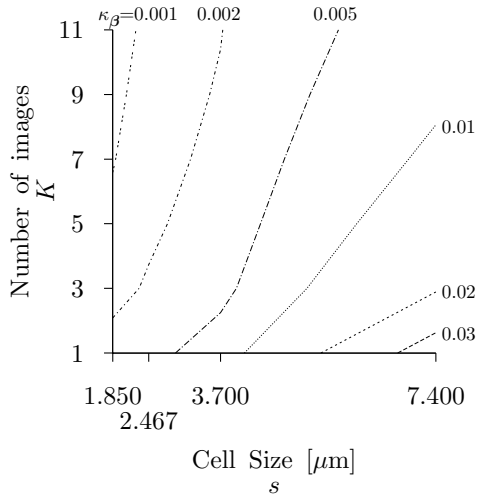
$$\kappa_{\beta} = \sup_{\gamma} \sqrt{\lambda_{\max} (\mathbf{P} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{P}^T)}. \quad (14)$$

ここで、 λ_{\max} は行列の最大固有値を表す。本研究では κ_{β} を指標とし、本収差逆解析の安定性について検討する。

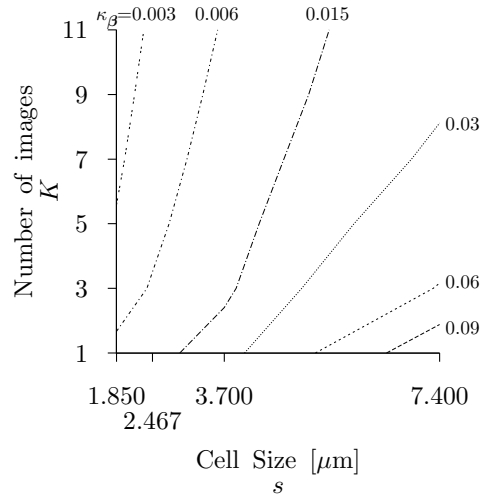
4. スポット像を用いた収差逆解析の安定性の検討の代表例

4.1. 安定性指標の計算

本節では、収差逆解析において低解像度スポット像を用いる場合と高解像度スポット像を用いる場合に対して安定性指標 κ_{β} を計算する。安定性指標 κ_{β} の計算においてスポット像の測定条件、収差逆解析の条件を変更し、本収差逆解析手法における適切な測定条件、解析条件について検討する。

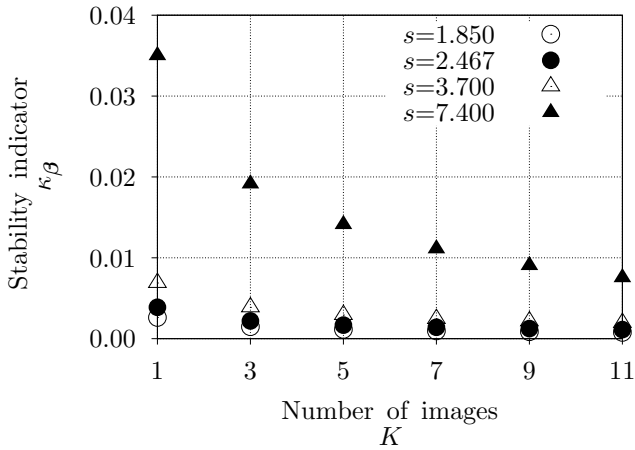


(a) $M = N = 8$.

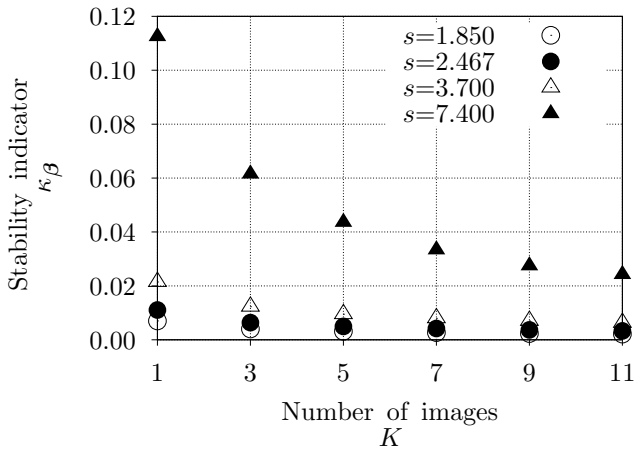


(b) $M = N = 15$.

Fig. 3 The stability indicator κ_β using the low-resolution images in the case of $R = 15$ with respect to the cell size s and the number of the images K .



(a) $M = N = 8$.



(b) $M = N = 15$.

Fig. 4 The stability indicator κ_β using the low-resolution images in the case of $R = 15$ with respect to the number of the images K .

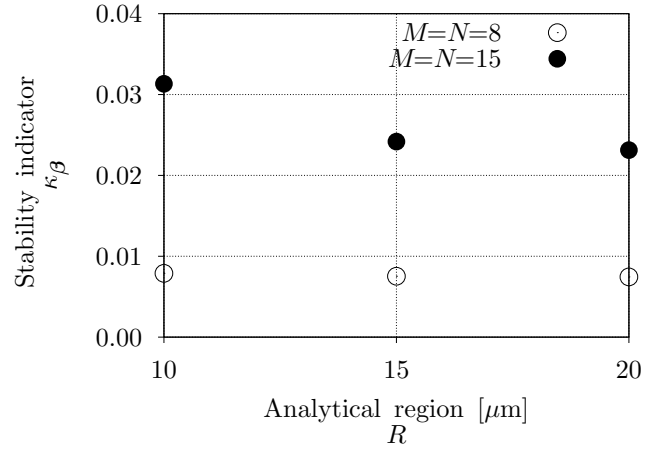


Fig. 5 The stability indicator κ_β using the low-resolution images in the case of $s = 7.4$, $K = 11$ with respect to the analytical region R .

4.2. 計算条件

レーザーの波長を $650[\text{nm}]$ 、光学系の物体側開口数、すなわち a' を 0.36 、像側開口数、すなわち a を低解像度の場合で 0.09 、高解像度の場合で 0.0018 とする。撮像素子のセルサイズは $s[\mu\text{m}] \times 0.858s[\mu\text{m}]$ であり、これを画素サイズ $s[\mu\text{m}] \times s[\mu\text{m}]$ にリサンプリングした画像が得られる。ただし、スポット像の解像度が高高い場合、撮像素子によるサンプリングの影響は極めて小さい。そこで、撮像素子によるサンプリングの計算は行わず、スポット像の強度分布をサンプリング間隔 $s[\mu\text{m}] \times s[\mu\text{m}]$ でサンプリングする計算を行う。

入射光に位相変調を与えるためのコリメータレンズの測定基準位置からの移動量 d は、低解像度の場合で $d = \pm(20000 - 500k)$ ($k = 0, 1, \dots, K$)、高解像度の場合で $d = \pm(20000 - 2500k)$ ($k = 0, 1, \dots, K$) とする。解析領域は $R[\mu\text{m}] \times R[\mu\text{m}]$ の正方形領域とする。安定性指標 κ_β の計算では、未知量ベ

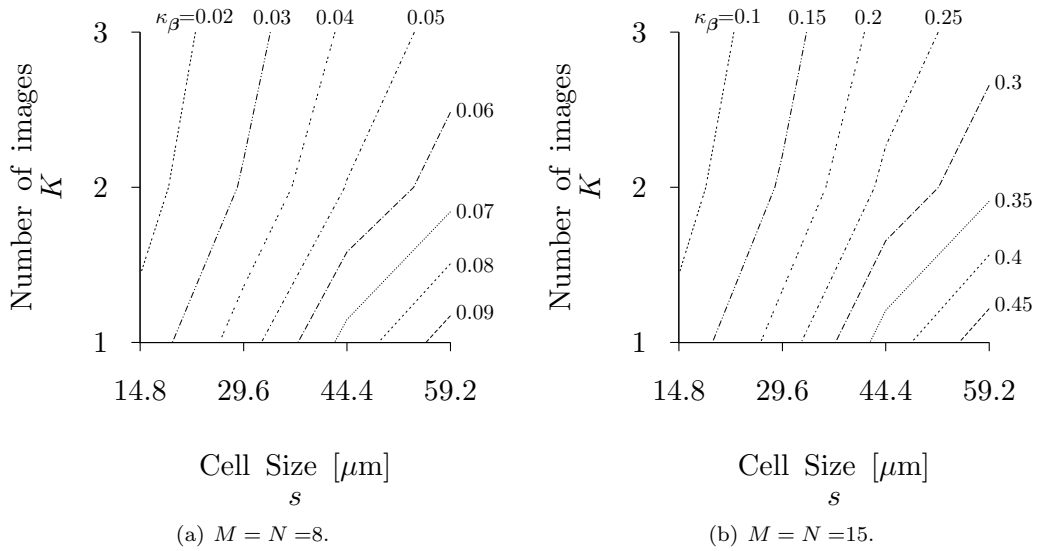


Fig. 6 The stability indicator κ_β using the high-resolution images in the case of $R = 1144$ with respect to the cell size s and the number of the images K .

クトル γ に対する上限を評価する必要がある。本検討では γ をランダムに変更し 1000 回計算を行ってその最大値を評価する。このとき、 γ は一様乱数で与える。未知量ベクトル γ の与え方を表 2 にまとめる。以上の条件のもと、画素サイズ s 、画像枚数 K 、解析領域 R 、Zernike 項数 M, N を変更しながら安定性指標 κ_β を計算する。

変更する条件の一覧を表 3 にまとめる。

4.3. 計算結果

図 3 は低解像度の場合の解析領域 $R = 15$ における画素サイズ s 及び画像枚数 K に対する安定性指標 κ_β を、図 4 は低解像度の場合の解析領域 $R = 15$ における画像枚数 K に対する安定性指標 κ_β を、図 5 は低解像度の場合の画素サイズ $s = 7.4$ 、画像枚数 $K = 11$ における解析領域 R に対する安定性指標 κ_β を示している。図 6 は高解像度の場合の解析領域 $R = 1144$ における画素サイズ s 及び画像枚数 K に対する安定性指標 κ_β を、図 7 は高解像度の場合の解析領域 $R = 1144$ における画素サイズ s に対する安定性指標 κ_β を、図 8 は高解像度の場合の画素サイズ $s = 29.6$ 、画像枚数 $K = 1$ における解析領域 R に対する安定性指標 κ_β を示している。

計算結果より、画素サイズ s が小さくなるほど、画像枚数 K が増えるほど、解析領域 R が大きくなるほど安定性指標 κ_β は小さくなり、安定性が増していることが確認できる。一方で、未知量の数 $M = N$ が増えると安定性指標 κ_β は大きくなり、安定性が悪くなることを確認できる。

4.4. 安定性指標の利用例

安定性指標の利用例として、 $s = 7.4$ 、 $R = 15$ 、 $M = N = 8$ 、低解像度のケースにおいて必要な画像枚数 K について検討する。 $\delta \mathbf{I}$ の標準偏差を σ_I 、長さを L とする。このとき、 $\delta \mathbf{I} \approx \sigma_I \sqrt{L}$ となる。よって、推定される収差係数の変動 $\delta \beta$ の標準偏差 σ_β は、 $\sigma_\beta \approx \sigma_I \kappa_\beta \sqrt{L/N}$ である。

$\delta \mathbf{I}$ の標準偏差を $\sigma_I = 0.707$ とした場合の画像枚数 K に対する収差係数の変動 $\delta \beta$ の標準偏差 σ_β の変化を図 9 に示

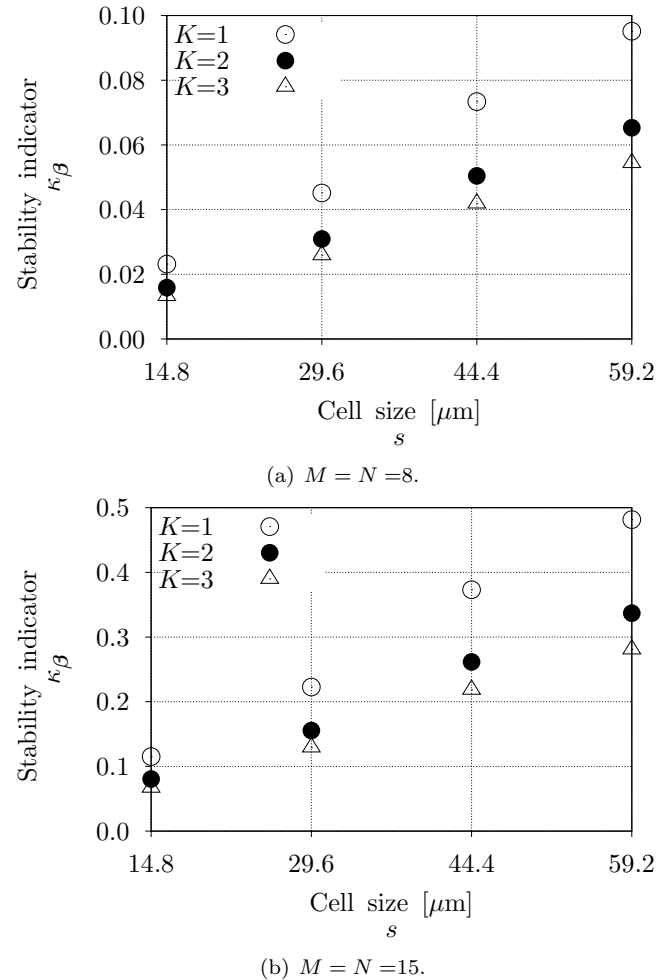


Fig. 7 The stability indicator κ_β using the high-resolution images in the case of $R = 1144$ with respect to the cell size s .

参考文献

- (1) 高田元弘: 干渉計によるレーザ光の波面収差測定, 光アイアンス, **12**(2001), pp. 19–22.
- (2) G. Harbers, P. J. Kunst, and G. W. R. Leibbrant: Analysis of lateral shearing interferograms by use of Zernike polynomials, APPLIED OPTICS, **35**(1996), pp. 6162–6172.
- (3) W.H.Southwell: Wavefront estimation from wavefront slope measurements, Journal of Optical Society of America, **70**(1980), pp. 998–1006.
- (4) Masashi UESHIMA, Kenji AMAYA, and Kosei KATAOKA: Development of Practical Performance Aberration Retrieval Method from Spot Intensity Images using Inverse Analysis, Optical Review, **16**(2009), pp. 141–148.
- (5) Kazuyoshi OKADA, Kenji AMAYA, Masashi UESHIMA, and Yuki ONISHI: Development of Off-Axis Aberration Retrieval Method using Spot Images, 7th International Conference on Optics-photonics Design & Fabrication, (2010).
- (6) 岡田和佳, 天谷賢治, 大西有希: 低解像度スポット像からの収差解析手法の開発, 第23回計算力学講演会講演論文集, (2010), pp. 175–176.
- (7) 久保司郎: 逆問題, 計算力学とCAEシリーズ, (1992), 培風館.
- (8) Deepu Rajan and Subhasis Chaudhuri: Simultaneous Estimation of Super-resolved Intensity and Depth Maps from Low Resolution Defocused Observations of a Scene, Proceedings Eighth IEEE International Conference on Computer Vision ICCV 2001, **1**(2001), pp. 113–118.
- (9) 岡田和佳, 天谷賢治, 大西有希: スポット像からの収差解析のための軸外結像を考慮した数理モデルの構築, 第61回理論応用力学講演会講演論文集, (2012).
- (10) E. G. Williams: Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography, (2005), Springer-Verlag.
- (11) M. Born and E. Wolf: Principles of Optics, (1974), Pergamon Press.
- (12) K.Madsen, H.B.Nielsen, and O.Tingleff: METHODS FOR NON-LINEAR LEAST SQUARES PROBLEMS, (2004), Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark.

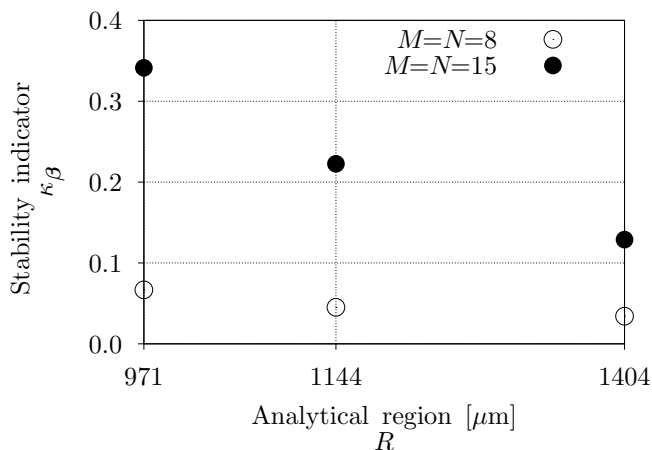


Fig. 8 The stability indicator κ_β using the high-resolution images in the case of $s = 29.6$, $K = 1$ with respect to the analytical region R .

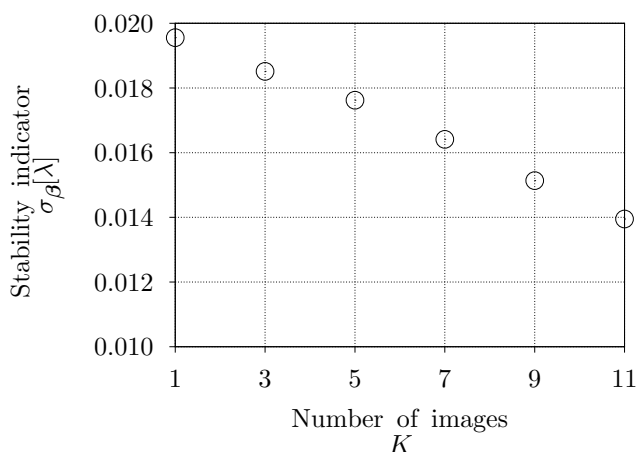


Fig. 9 The standard deviation σ_β using the low-resolution images in case of $s = 7.4$, $R = 15$, $M = N = 8$ with respect to the number of the images K .

す。図9より、要求精度が $0.02[\lambda]$ であれば $K = 1$ で十分であることがわかる。要求精度が $0.015[\lambda]$ であれば $K > 9$ が要求されることがわかる。

5. おわりに

本研究では、これまで我々が開発してきたスポット像を用いた収差逆解析手法の安定性について検討した。本稿ではまず、スポット像を用いた収差逆解析手法について説明した。次に本手法の安定性の指標として、計測画像の変動に対する収差係数の変動を導入した。デフォーカス像の枚数、解像度に対して導入した指標を計算し、要求精度に対して必要なデフォーカス像の枚数、解像度について検討した。

以上の検討により、スポット像を用いた収差解析手法における条件の選択に有用な指標を提示した。また、導入した安定性指標はデフォーカス距離などの計測条件の最適化などへの応用が期待される。