

半無限弾性地盤上にまくらぎ支持された 軸力を受けるレールの分散解析

DISPERSION ANALYSIS OF AN AXIALLY LOADED RAIL DISCRETELY SUPPORTED ON AN ELASTIC HALF-SPACE

阿部和久¹⁾, 千田雄亮²⁾, 紅露一寛³⁾

Kazuhisa ABE, Yuusuke CHIDA and Kazuhiro KORO

- 1) 新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050, E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp)
2) 新潟大学大学院 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050 E-mail: f12e079a@mail.cc.niigata-u.ac.jp)
3) 新潟大学大学院 (〒 950-2181 新潟市五十嵐二の町 8050, E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

This paper presents a numerical method for an axially loaded rail periodically supported by sleepers on an elastic half-space. The rail is modeled by a Timoshenko beam. The interaction between the track and the ground is represented by the equivalent stiffness which reproduces the dynamic response of the semi-infinite elastic domain. An eigenvalue problem with respect to the axial load, wavenumber and frequency is derived by imposing the Floquet condition on the steady-state solution. The influences of the axial stress on the dispersion curves and the critical velocity are discussed within the framework of the unified problem.

Key Words: Continuous Welded Rail, Axial Load, Dispersion Analysis, Critical Velocity

1. はじめに

鉄道軌道のロングレールは、まくらぎによって周期的に支持されている。このような周期性の存在により、軌道内を伝播する波動の分散構造には、如何なるモードも存在しない周波数帯であるストップバンドが分布する。軌道において観測される卓越振動応答は、一般にストップバンド端に現れる定在波モードにより支配される。そのため、軌道の分散解析は当該構造の振動特性を把握する上で重要であり、様々な数値解法に基づいた検討が多くの研究者によりなされてきた(1, 2)。

また、列車の走行速度が地盤の Rayleigh 波速度に達すると、軌道変位が増大することが知られている。この走行速度は臨界速度と呼ばれており、軟弱地盤上に敷設された高速鉄道の場合、走行安定性や地盤振動に重要な影響を及ぼす恐れがある。そのため、様々なモデルに基づきその不安定現象が議論されてきた。例えば Sheng ら⁽³⁾ は、軌道を 3 次元半無限成層弾性体上に支持された Euler ばりにより表現している。その下で、軌道や地盤の物性値等が分散特性や臨界速度に及ぼす影響について調べている。なお、この文献では、軌道の表現に連続支持モデルを用いている。一方、現実の軌道をより忠実にモデル化した離散支持ばりを用いた解法が

Vostroukhov & Metrikine⁽⁴⁾ により採用されている。文献(4)では、地盤を剛基盤上におかれた有限厚の弾性場としてモデル化しているが、半無限成層地盤と離散支持軌道モデルの併用は文献(5)において検討されている。

ロングレールには、両端の可動部を除く不動区間において温度変化に因る軸力が発生する。この軸力はレール座屈の原因となるため軌道保守上重要な管理項目とされているが、上述の分散特性や臨界速度にも影響を及ぼし得る。前者に関する基礎的研究は Luo⁽⁶⁾ により行われている。そこでは、離散支持されたはりに作用する軸力と当該構造の分散特性との関係が議論されている。また著者のグループでは、ロングレールの分散特性の軸力依存性を利用した軸力測定法について検討を行っている⁽⁷⁾。そこでは、バンド端周波数の軸力依存性を利用し、共振周波数の変化から軸力を換算する方法について議論している。

一方、後者の軸力が軌道系の臨界速度に及ぼす影響については、Labra⁽⁸⁾ により検討されている。当該論文では、圧縮軸力により臨界速度が低下する現象が見出されている。なお、この文献も含め臨界速度に関する研究では、走行荷重を受ける軌道・地盤連成応答のモデル化が採用されている。この場合、臨界速度は最大軌道変位応答を与える荷重走行速度として求められる。これに対し Metrikine & Dieterman⁽⁹⁾ は分散曲線の軸力依存性の観点から、軸力と臨界速度との関係を

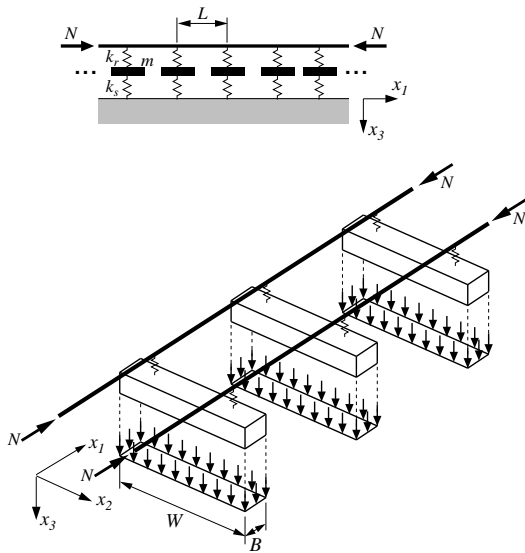


Fig. 1 Interaction model consisting of railway track and ground

議論している．一定速度の走行荷重下における軌道の動的応答特性は，波数-周波数空間内の分散曲線と走行速度を傾きを持つ走行線との交点に対応するモードにより支配される．臨界速度は，この走行線が分散曲線に接する場合の速度（傾き）として定義することもできる．文献 (9) ではこのような観点から臨界速度の軸力依存性の評価を試みている．

上述のとおり，本来軸力作用下における軌道系の分散特性と臨界速度とは，分散曲線に基づく共通した観点から議論することができるはずである．しかしながら，臨界速度は比較的小さな波数（長波長）成分により特徴付けられる現象であるため，文献 (8),(9) では簡易な一様支持モデルに基づき検討がなされている．これに対し，バンド特性は周期性に支配されるため，離散支持モデルの採用が必要となる．そのため，これらの問題は互いに異なるモデル化に基づき別々に検討されてきた．しかし軸力を受ける離散支持レールの分散解析に基づいた統一的議論は，軌道の動特性のさらなる理解に有用と考えられる．

そこで本研究では，3次元半無限弾性地盤上におかれたまくらぎにより離散支持され軸力を受けているレールをモデル化する．その際に，レールは無限長 Timoshenko ばりで与え，地盤との連成はその動特性を再現し得る等価剛性により定式化する．その下で，様々な軸力に対して分散解析を行い，軸力が分散特性と臨界速度に及ぼす影響を統一的に議論し，両者の関係について考察する．

2. 解法の構成

2.1. 連成系のモデル化

Fig.1 に示すように，3次元地盤上におかれたまくらぎにより離散支持された無限長レールを考える．レールは軸力 N (圧縮を正) を受ける Timoshenko ばりによりモデル化し，鉛直たわみを対象とする．まくらぎは軌道パッド k_r とまくらぎ下パッド k_s を介してレールと地盤に接合されているものと

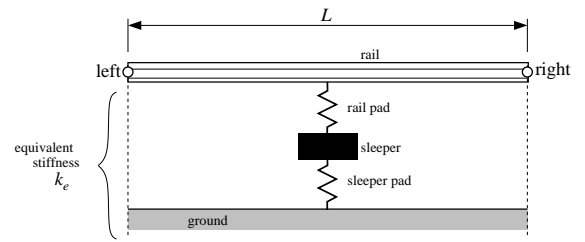


Fig. 2 Unit cell of track and ground

し，質量 m ，長さ W ，幅 B の剛体として与える．なお，まくらぎは等間隔 L で配置されているものとする．まくらぎから地盤に作用する接触力は，パネ k_s に作用する力とつり合い，まくらぎ下面全体に作用する一様分布力として近似する．一方，接触力のせん断応力成分が連成挙動に及ぼす影響は比較的小さいと考えられるので，ここでは無視する．また，実際の軌道はまくらぎと地盤（路盤）との間に道床を介しているが，ここではそれを省略した比較的簡易なモデルを用いる．地盤は等方均質な弾性体として与える．本研究では波動モードの分散解析を目的としているので，地盤・軌道系に減衰は考慮しない．

2.2. 分散解析手法

まくらぎ間隔 L で与えられる周期性により，本問題は地盤も含め Fig.2 に示す軌道 1 ユニットの問題に帰着することができる．Fig.2 においてパッド類，まくらぎ，地盤から成る下部構造はそれと等価なパネ k_e により表現する．なお， k_e は次式により具体的に与えられる．

$$k_e = k_r \frac{k_s k_G - (k_s + k_G) m \omega^2}{k_s k_G + (k_s + k_G) (k_r - m \omega^2)} \quad (1)$$

ここで， ω は円振動数， k_G は地盤の等価剛性である． k_G の具体的な導出については次節で述べる．分散解析手法は軌道系 1 ユニットの伝達行列 $[\mathbf{T}]$ に基づき構成する．当該行列は次の関係を与える．

$$[\mathbf{T}]\{\mathbf{A}_L\} = \{\mathbf{A}_R\} \quad (2)$$

ここで $\{\mathbf{A}_L\}, \{\mathbf{A}_R\}$ は，動的状態を規定するユニット左右端の係数である．Floquet 原理⁽²⁾により，定常解は次の周期条件をみたす．

$$\{\mathbf{A}_R\} = \lambda \{\mathbf{A}_L\}, \quad \lambda = e^{-ik_1 L} \quad (3)$$

ここで， k_1 は軌道長手座標 x_1 方向波数である．式 (3) を (2) に代入して，次の固有値問題を得る．

$$[\mathbf{T}]\{\mathbf{A}_L\} = \lambda \{\mathbf{A}_L\} \quad (4)$$

固有値 λ が実数値波数 k_1 を与える場合，これに対応するモードは減衰せずに伝播して行く波動となる．この時，振動数 ω と当該波数 k_1 とで与えられる (k_1, ω) 空間内の点は，分散曲線上に位置することとなる．なお，以下に述べるように，地盤の等価剛性 k_G は k_1 と ω を陰的に含む関数として与えられる．したがって，伝達行列 $[\mathbf{T}]$ も k_1 と ω に依存する．よって，式 (4) を $\lambda(k_1)$ に関する標準固有値問題として解くことはできない．本論文では， (k_1, ω) 空間のある領域を走査すること

で、 $[\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}] = 0$ (\mathbf{I} は恒等行列) をみたく分散曲線を探る方法を採る。

2.3. 伝達行列の導出

隣接するまくらぎ間のレール 1 スパンにおける運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} GA_r K(\psi' - u'') + Nu'' - \rho A_r \omega^2 u &= 0, \\ GA_r K(\psi - u') - EI\psi' - \rho I \omega^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $(\prime) = d(\prime)/dx_1$ 、 u はレールの鉛直たわみ、 ψ はレール断面回転角、 A_r は断面積、 ρ は質量密度、 G はせん断弾性係数、 E はヤング率、 I は断面二次モーメント、 K はせん断係数である。式 (5) の一般解は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} u &= Ae^{sx_1} + Be^{-sx_1} + Ce^{\tilde{s}x_1} + De^{-\tilde{s}x_1}, \\ \psi &= \gamma[Ae^{sx_1} - Be^{-sx_1}] + \tilde{\gamma}[Ce^{\tilde{s}x_1} - De^{-\tilde{s}x_1}] \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 A, B, C, D は $\{\mathbf{A}\}$ の成分であり、 (\prime) は複素共役である。また、 s と γ は次式により定義される係数である。

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{-\frac{\alpha'}{2} + i\sqrt{\beta' - \frac{\alpha'^2}{4}}}, \quad \gamma = as + \frac{\rho A_r \omega^2}{GA_r K_s}, \\ \alpha' &= \frac{1}{a}\left(\alpha - \frac{N\beta}{\rho A_r \omega^2}\right), \quad \beta' = \frac{\beta}{a}, \quad a = 1 - \frac{N}{GA_r K}, \\ \alpha &= \frac{\rho A_r \omega^2}{GA_r K} + \frac{\rho I \omega^2}{EI}, \quad \beta = \frac{\rho A_r \omega^2}{EI} \left(\frac{\rho I \omega^2}{GA_r K} - 1\right) \end{aligned} \quad (7)$$

i および $i+1$ 番スパンの境界に位置するまくらぎ支持点において、以下の適合条件と力およびモーメントのつり合い条件が課される。

$$\begin{aligned} u_i(L) &= u_{i+1}(0), \quad \psi_i(L) = \psi_{i+1}(0), \\ Q_i(L) + k_e u_i(L) - Nu'_i(L) &= Q_{i+1}(0) - Nu'_{i+1}(0), \\ M_i(L) &= M_{i+1}(0) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $(\prime)_i$ は第 i 番スパンにおける値である。なお、せん断力 Q と曲げモーメント M は次式により与えられる。

$$Q = GA_r K(u' - \psi), \quad M = -EI\psi' \quad (9)$$

式 (6) を (8) に代入し、 $\{\mathbf{A}_i\}$ と $\{\mathbf{A}_{i+1}\}$ について整理すると、 4×4 の行列 $[\mathbf{M}_i], [\mathbf{M}_{i+1}]$ を介して次のような関係式を得る。

$$[\mathbf{M}_i]\{\mathbf{A}_i\} = [\mathbf{M}_{i+1}]\{\mathbf{A}_{i+1}\} \quad (10)$$

式 (10) より、伝達行列は次式で与えられる。

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{M}_{i+1}^{-1} \mathbf{M}_i] \quad (11)$$

3. 地盤等価剛性の導出

3.1. 解くべき問題

波数 k_1 と円振動数 ω の下で、地盤内を伝播する波動場を考える。この場合、定常解は式 (3) と同様に次の Floquet の周期条件をみたくす。

$$f(x_1 + L) = e^{-ik_1 L} f(x_1) \quad (12)$$

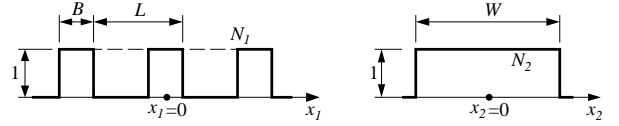


Fig. 3 Functions $N_1(x_1)$ and $N_2(x_2)$ representing the sleeper contact force

ここで f は変位や応力等の解である。地盤応答は以下の境界値問題の解として定義される。

$$\begin{aligned} \mu_G(\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}) + \lambda_G \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho_G \omega^2 \mathbf{u} &= 0, \quad \text{in } \Omega_G, \\ \sigma_{33}(\tilde{x}_1 + nL, x_2, 0) &= -\frac{2F_0^S}{BW} N_1(x_1) N_2(x_2) e^{-ik_1 nL}, \\ x_1 = \tilde{x}_1 + nL, \quad |\tilde{x}_1| &\leq \frac{L}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \sigma_{31}(x_1, x_2, 0) = \sigma_{32}(x_1, x_2, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 μ_G, λ_G は地盤 Ω_G の Lamé 定数、 ρ_G は質量密度である。 \mathbf{u} は変位、 σ_{ij} は応力成分、 F_0^S は $x_1 = 0$ に位置しているまくらぎと地盤とのレール 1 本当りの接触力である。 N_1, N_2 は Fig.3 に示されている関数であり、まくらぎ接触力を構成する関数である。

式 (13) の支配方程式をみたくす解を、Helmholtz ポテンシャル⁽¹⁰⁾ により表現する。

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \psi \quad (14)$$

なお、式 (14) における ϕ と ψ は次式をみたくすものである。

$$\begin{aligned} C_L^2 \nabla^2 \phi + \omega^2 \phi &= 0, \\ C_T^2 \nabla^2 \psi + \omega^2 \psi &= 0, \quad \nabla \cdot \psi = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、 C_L, C_T は縦波と横波の伝播速度である。また、第 3 番目の方程式は解を一意に決定するために導入している。

3.2. 解の Fourier 変換

式 (12) の周期性をみたくすように、 ϕ, ψ を次式により級数展開して与える。

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2, x_3) &= \sum_n \Phi_n(x_2, x_3) e^{iv_n x_1}, \\ \psi(x_1, x_2, x_3) &= \sum_n \Psi_n(x_2, x_3) e^{iv_n x_1}, \\ v_n &= \frac{2n\pi}{L} - k_1 \end{aligned} \quad (16)$$

ϕ, ψ の x_2 に関する Fourier 変換域での解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= \sum_n \hat{\Phi}_n(k_2, x_3) e^{iv_n x_1}, \\ \hat{\psi} &= \sum_n \hat{\Psi}_n(k_2, x_3) e^{iv_n x_1} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 $(\hat{\prime})$ は次式で定義された Fourier 変換を表し、 k_2 は x_2 方向波数である。

$$\hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f e^{ik_2 x_2} dx_2 \quad (18)$$

式 (15) の各式の Fourier 変換は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} C_L^2 \hat{\nabla}^2 \hat{\phi} + \omega^2 \hat{\phi} &= 0, \quad C_T^2 \hat{\nabla}^2 \hat{\psi} + \omega^2 \hat{\psi} = 0, \\ \hat{\nabla} \cdot \hat{\psi} &= 0, \quad \hat{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, -ik_2, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

式 (17) を (19) に代入して次式を得る .

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_n'' &= \beta_{Ln}^2 \hat{\Phi}_n, & \beta_{Ln}^2 &= \nu_n^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{C_L^2}, \\ \hat{\Psi}_n'' &= \beta_{Tn}^2 \hat{\Psi}_n, & \beta_{Tn}^2 &= \nu_n^2 + k_2^2 - \frac{\omega^2}{C_T^2}\end{aligned}\quad (20)$$

上式の一般解は次式のように与えられる .

$$\begin{aligned}\hat{\phi} &= \sum_n A_n e^{-\beta_{Ln} x_3} e^{i \nu_n x_1}, \\ \hat{\psi} &= \sum_n B_n e^{-\beta_{Tn} x_3} e^{i \nu_n x_1}\end{aligned}\quad (21)$$

ここで, A_n, B_n は定数であり, これらの値は境界条件をみたすように決定する . そのために, 式 (13) で規定される応力 σ_{33} の Fourier 変換を求めると, $2F_0^S/BW = 1$ とした場合に対し次式を得る .

$$\hat{\sigma}_{33} = \sum_n C_n e^{i \nu_n x_1}, \quad C_n = \frac{4}{L \nu_n k_2} \sin \nu_n \sin \frac{W k_2}{2} \quad (22)$$

すると式 (13) の境界条件と式 (19) の第 3 式より, A_n, B_n に関して次式を得る .

($k_2 \neq 0$)

$$\begin{aligned}\left\{2(\nu_n^2 + k_2^2) - \frac{\omega^2}{C_T^2}\right\} A_n - 2i \frac{\beta_{Tn}}{k_2} (\nu_n^2 + k_2^2) B_{1n} &= \frac{C_n}{\mu_G}, \\ 2i \beta_{Ln} k_2 A_n + \left\{2(\nu_n^2 + k_2^2) - \frac{\omega^2}{C_T^2}\right\} B_{1n} &= 0, \\ B_{2n} = \frac{\nu_n}{k_2} B_{1n}, \quad B_{3n} &= 0\end{aligned}\quad (23)$$

($k_2 = 0$)

$$\begin{aligned}\left\{2(\nu_n^2 + k_2^2) - \frac{\omega^2}{C_T^2}\right\} A_n - 2i \beta_{Tn} \nu_n B_{2n} &= \frac{C_n}{\mu_G}, \\ 2i \beta_{Ln} \nu_n A_n + (\nu_n^2 + \beta_{Tn}^2) B_{2n} &= 0, \\ B_{1n} = B_{3n} &= 0\end{aligned}\quad (24)$$

3.3. 等価剛性

式 (23) または (24) より A_n, B_n を得る . すると鉛直変位の Fourier 変換 \hat{u}_3 は $\hat{u} = \hat{\nabla} \hat{\phi} + \hat{\nabla} \times \hat{\psi}$ より求めることができる . なお, まくらぎ直下の地盤変位を, まくらぎ底面重心位置の変位で代表させるものとする . 代表ユニットセルのまくらぎ重心 (原点) における鉛直変位は次の逆 Fourier 変換により求めることができる .

$$u_3(0, 0, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \hat{u}_3(0, k_2, 0) dk_2 \quad (25)$$

\hat{u}_3 は式 (23), (24) の連立方程式に関する行列式のゼロ点において特異性を有する^(11, 12). この特異性 (または擬特異性) については, 特異項を解析積分で求め, 残りの項を数値積分により求めることで処理した .

単位荷重 $F_0^S = 1$ による変位は次式で与えられる .

$$u'_G = -\frac{2}{BW} u_3(0, 0, 0) \quad (26)$$

すると, $k_G u'_G = F_0^S$ より, 地盤の等価剛性は次式により求められることとなる .

$$k_G = \frac{1}{u'_G} \quad (27)$$

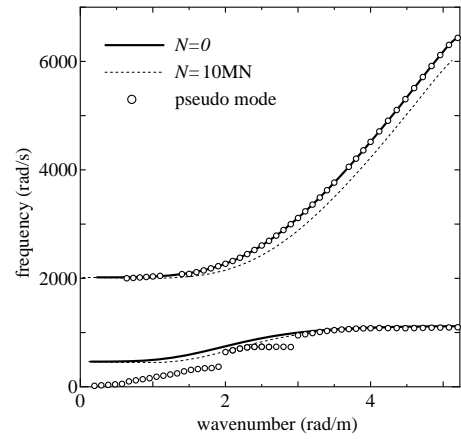


Fig. 4 Dispersion curves and pseudo modes of railway track on rigid and elastic foundations

4. 解析例

4.1. 解析条件

JIS 60kg レールと PC まくらぎから構成される軌道を対象とし, レール 1 本当りのまくらぎ質量を 100kg, $B=0.2\text{m}$, $W=2\text{m}$ と設定した . なお, レールの各物性値は, $GA_r K=209\text{MN}$, $EI=637\text{MN}\cdot\text{m}^2$, $\rho I=0.242\text{kg}\cdot\text{m}$, $\rho A_r=60.8\text{kg/m}$ である . また, パッド類のバネ定数は標準的な値⁽¹³⁾ として $k_r=110\text{MN/m}$, $k_s=30\text{MN/m}$ とした .

4.2. 剛基盤上の軌道

軌道の基本的動特性を確認する目的で, 剛基盤上に置かれた軌道系を対象に分散曲線を求めた (Fig.4) . なお, 剛基盤は式 (1) で $k_G \rightarrow \infty$ とすることで容易に表現できる . また, 実際のレールに作用する軸力は 1MN 程度であり, それ以上大きくなると水平座屈を生ずる . Fig.4 には軸力の影響を示す目的で, $N=0$ の場合に加え $N=10\text{MN}$ と著大な軸力の場合を示した . 圧縮軸力の増加により, 分散曲線が低周波数側に移動する様子が確認できる . ちなみに, 軸力が座屈荷重に達すると, 座屈モードを与える波数において分散曲線の周波数はゼロとなる⁽¹⁴⁾ .

4.3. 弾性地盤上の軌道

$\mu_G=17\text{MPa}$, $\rho_G=1700\text{kg/m}^3$ の比較的軟弱な地盤を対象とする . なお, ポアソン比は 0.3 とした . このとき, 横波と Rayleigh 波の伝播速度はそれぞれ $C_T=100\text{m/s}$, $C_R \approx 92.7\text{m/s}$ となる . この場合, 高速列車の走行速度は地盤の Rayleigh 波速度に匹敵する値と成り得る .

Fig.4 の様にレール軸力が座屈軸力に比べて小さい場合, 剛基盤上の軌道の分散曲線は地盤の Rayleigh 波モード線より高周波数側に位置する . そのため, 軟弱地盤内に波動エネルギーが漏出し, 軌道に沿って伝播するモードは消滅する . このとき, 軌道内を伝わる波動は減衰を伴う擬似モードを与えるはずである . 本軟弱地盤上に敷設された軸力ゼロの軌道を対象に, 式 (4) から求めたモード減衰が極小値をとる周波数を抽出したものが Fig.4 のプロット点である . 1000rad/s

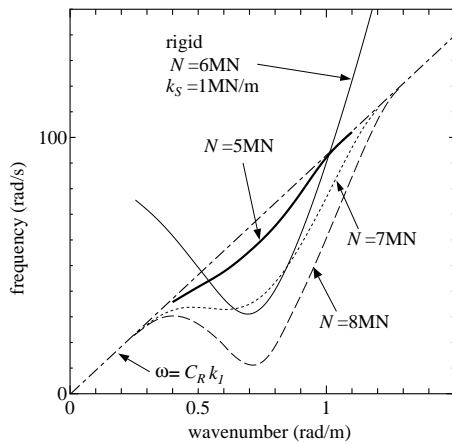


Fig. 5 Dispersion curves of railway track on an elastic ground

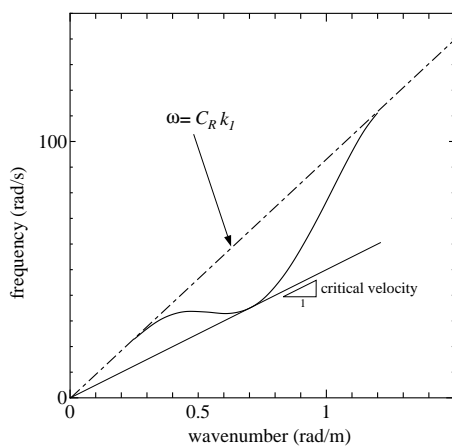


Fig. 6 Dispersion curve and critical velocity ($N=7\text{MN}$)

以上の高周波数域では剛基盤上の軌道の分散曲線とほぼ一致していることがわかる。下から2番目の分散曲線は、主にレールのみ独立して振動するモードを与える⁽¹³⁾。したがって、地盤剛性はほとんど影響せず、擬似モードの減衰もわずかなることがその理由として考えられる。一方、一番下に位置する分散曲線は、まくらぎ振動を伴うモードである⁽¹³⁾。そのため地盤連成下では地盤振動と当該モードとが連成し、Fig.4の低周波数域(長波長域)において擬似モードは地盤のRayleigh波モードに漸近する。

軸力が大きくなると軌道の分散曲線はRayleigh波モード線より下方に位置するようになる。Fig.5は $N=5,7,8\text{MN}$ に対して求めた地盤・軌道連成系の分散曲線を示したものである。Fig.5より、軸力増加により分散曲線位置が下降する様子が確認できる。ちなみに、本地盤設定の場合、その等価剛性は 1MN/m 程度であった。この値はまくらぎ下パッドの剛性 $k_s=30\text{MN}$ よりはるかに小さく、剛基盤に比べ軌道支持剛性は大幅に低下する。そのため、レールの座屈荷重も低くなり、加えて分散曲線の軸力依存性もより鋭敏となる。その結果、Fig.5に示すように分散曲線がRayleigh波モード線より下方に現れるようになったものと解釈することができる。

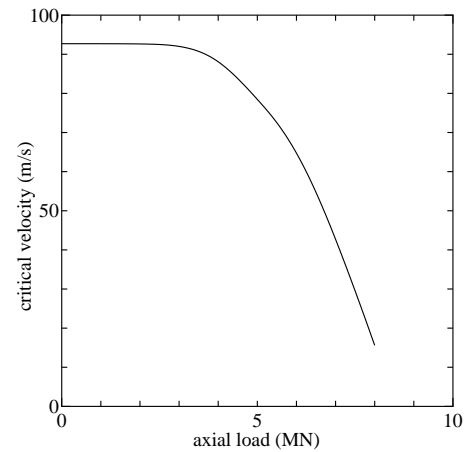


Fig. 7 Relationship between axial load and critical velocity

このことを確認するため、剛基盤上の軌道において $k_s=1\text{MN/m}$ とした場合の分散曲線をFig.5に細い実線で示した。なお、レール軸力は 6MN としている。当該の分散曲線は、地盤・軌道連成系の分散曲線と同様、Rayleigh波モード線より下方に位置しており、上述の議論を裏付ける結果となっている。

走行列車の臨界速度は、Fig.6のように波数-周波数空間におけるその走行線(傾きが走行速度で与えられる直線)が軌道・地盤連成系の分散曲線に接する際の傾きにより与えられる⁽⁹⁾。Fig.7は、様々なレール軸力に対し、このようにして臨界速度を求めた結果を示したものである。小さな軸力下での臨界速度はほぼ地盤のRayleigh波速度に一致しているが、 3MN 以上の軸力から速度低下が顕著になり、 $8\sim 9\text{MN}$ 程度で座屈に至ることがわかる。ただし前述のとおり実際の軌道では、初期不整の存在の下、 1MN 程度の軸力で水平座屈が先行して発生することとなる。したがって、現実には臨界速度の低下が顕著となる軸力にまで達することは無く、軸力が臨界速度に大きく影響することはないものと考えられる。

5. おわりに

地盤上に敷設された軌道モデルを構成し、レール軸力が分散特性や列車の臨界速度に及ぼす影響について調べた。軌道はまくらぎにより離散支持されているものとし、その下で与えられる周期性に基づき具体的解法を構成した。地盤は半無限一様弾性場としてモデル化し、地盤応答を等価剛性で評価して軌道と地盤との連成を表現した。

地盤との連成を考慮した軌道モデルの場合、小さな軸力の下では分散モードが消滅することを確認した。ただし、比較的高い周波数域では剛基盤上の軌道が有する分散曲線にほぼ対応する擬似モードが存在することがわかった。このことは、現実の軌道でも高周波数域におけるレール振動特性は、剛基盤上の軌道モデルに基づく分散解析で十分評価可能であることを意味している。一方、比較的大きな軸力作用下では分散曲線が存在することを確認した。これは、擬似モードであったものが、軸力増加により地盤のRayleigh波モード線より低周波数側に移動することで減衰を伴わない伝播モードに

変化したものであることがわかった。

最後に、分散曲線に接する荷重走行線の傾きより臨界速度を求めた。臨界速度は軸力の増加と共に急減少するものの、実際に発生し得る軸力下では臨界速度の顕著な低下は認められなかった。なお前述のとおり、実際の軌道は初期不整存在下において理論座屈荷重より小さな軸力下で水平座屈を生ずる。よって、水平変位の臨界速度も低軸力域から減少し出す可能性がある。この点については今後検討するつもりである。

参考文献

- (1) Mead, D.J. : Free wave propagation in periodically supported, Infinite beams, *J.Sound Vib.*, **11**, 181-197, 1970.
- (2) Tassilly, E. : Propagation of bending waves in a periodic beam, *Int.J.Engng Sci.*, **25**, 85-94, 1987.
- (3) Sheng, X., Jones, C.J.C. and Thompson, D.J. : A theoretical study on the influence of the track on train-induced ground vibration, *J. Sound Vib.*, **272**, 909-936, 2004.
- (4) Vostroukhov, A.V. and Metrikine, A.V. : Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track, *Int. J. Solids Struct.*, **40**, 5723-5752, 2003.
- (5) Metrikine, A.V. : The steady-state response of a periodically inhomogeneous model of a railway track to a moving load, *Environmental Vibrations*, ed. H.Takemiya, 103-113, 2005.
- (6) Luo, Y. : Frequency analysis of infinite continuous beam under axial loads, *J. Sound Vib.*, **213**, 791-800, 1998.
- (7) Abe, K., Shimizu, S. and Aikawa, A. : Theoretical study on a measuring method of rail axial stress via vibration modes of periodic track, *Proc. of WCRR2011*, Lille, 2011.
- (8) Labra, J.J. : An axially stressed railroad track on an elastic continuum subjected to a moving load, *Acta Mechanica*, **22**, 113-129, 1975.
- (9) Metrikine, A.V. and Dieterman, H.A. : Lateral vibrations of an axially compressed beam on an elastic half-space due to a moving load, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **18**, 147-158, 1999.
- (10) Eringen, A.C. and Şuhubi, E.S. : *Elastodynamics*, Vol.2, Academic Press, 1975.
- (11) Dieterman, H.A. and Metrikine, A. : The equivalent stiffness of a half-space interacting with a beam. Critical velocities of a moving load along the beam, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **15**, 67-90, 1996.
- (12) Dieterman, H.A. and Metrikine, A.V. : Steady-state displacement of a beam on an elastic half-space due to a uniformly moving constant load, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **16**, 295-306, 1997.
- (13) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛 : まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, *応用力学論文集*, **10**, 1029-1036, 2007.
- (14) 清水紗希, 阿部和久, 相川 明, 紅露一寛 : 軸力を受けるレールの波動伝播解析, *計算数理工学論文集*, **9**, 67-72, 2009.