計算数理工学論文集 Vol.12 (2012 年 12 月), 論文 No. 21-121212　JASCOME

境界適合曲線座標系を用いた流れ解析における格子直交性の効果

GRID ORTHOGONALITY EFFECT IN NUMERICAL FLOW CALCULATION WITH BODY FITTED CURVILINEAR COORDINATE SYSTEM

中根一朗 [1)]

Ichiro NAKANE

1) 神奈川工科大学 工学部 機械工学科（〒243-0292 厚木市下荻野 1030, E-mail: inakane@me.kanagawa-it.ac.jp）

Body fitted curvilinear coordinate systems (usually abbreviated to BFC) are widely used for calculating the flow around arbitrary complex bodies, but generally they are not orthogonal. The accuracy deteriorates if the departure from orthogonality is too large, and orthogonal coordinate systems make the application of boundary conditions more straightforward. In this study, the method for generating the orthogonal BFC based on the non-orthogonal BFC is suggested, and five kinds of BFC grids (one non-orthogonal and four orthogonal grids) are generated. The two-dimensional calculations were performed for the flow around a circular cylinder with these orthogonal and non-orthogonal grids. The calculation results were compared with the measurements. The validity of grid orthogonality and the method for generating the orthogonal BFC is confirmed.

Key Words : Orthogonal Curvilinear Coordinate System, BFC, CFD, Cylinder Wake

1. まえがき

任意の複雑形状物体周りの流れを差分解析する際には，通常，境界適合曲線座標系あるいはカットセル法が多く用いられる．

このうち，境界適合曲線座標系は，物体周りの流れを精度良く求める必要がある場合に使用されている．特に，楕円型偏微分方程式を解くことで得られる境界適合曲線座標系は，流線に近い座標線を生成できることと格子線の変化が滑らかであると言う利点を持っている．ただし，楕円型偏微分方程式による格子生成手法の先達である Thompson ら[(1)]が，「非直交性が極端に大きくならない限り，差分化手法により計算精度を維持できる」と報告していることからも分かるように，通常，この手法を用いる場合には，非直交系の座標線（格子）を生成することが多い．

しかしながら，彼らの言葉は，非直交座標系の致命的な欠点“非直交性が極端に大きい場合，つまり，極端に非直交となっている座標線（格子）が存在する場合には，差分スキームでは解決できない誤差を生む”を意味しており，少なくとも，非直交座標系での計算精度は，直交座標系での計算精度に比べて低くなることが予測される．このため，座標線の直交性を担保する格子生成手法も提案[(2)]されているが，どの程度の直交性がどの程度の精度向上をもたらすのかと言った，直交性による精度向上効果に関する報告は，管見において見あたらない．

そこで本報告では，矩形外周内部に配置された円柱周りの流れを対象として，非直交境界適合曲線座標系の計算格子と，直交する領域の広さを変えた４種類の直交境界適合曲線座標系の計算格子を作成し，これらを用いて数値計算をすることで座標線の直交性が計算精度向上にもたらす効果を検討する．

なお，今回作成する合計５種類の座標系（計算格子）において，各々の座標系間でドラスティックに座標線や格子形状が変化していると，直交性以外の変更因子が計算精度を左右してしまう可能性がある．そこで，本研究では，境界点と流れ方向に沿った座標線をそのままとして，これと交差する座標線のみを変化させることとした．このため，非直交境界適合曲線座標系の計算格子を基にして，この座標系の流れ方向に沿った座標線に，境界点はそのままで新たに直交する座標線を生成させる簡便な手法を提案するとともに，この手法を用いて直交する計算格子を生成した．

2. 直交境界適合曲線座標系の座標線（格子）の生成

本研究では，Thompson らの方法[(3)]により生成した非直交境界適合曲線座標系（Non-Orthogonal Body Fitted Curvilinear Coordinate System，以降，NBFC と略す）の座標線（格子）を基本として，これより，直交境界適合曲線座標系（Orthogonal Body Fitted Curvilinear Coordinate System，以降，OBFC と略す）

2012 年 10 月 6 日受付，2012 年 11 月 12 日受理

の座標線（格子）を生成する．ただし，本報告において，計算結果の検証に用いた実験結果が対称な流れであったことから，計算する場も対称であるとし，流れ場の半分のみの格子を生成して計算時間の短縮をはかった．以下に，OBFC 格子生成の手順を示す．

Thompson らの方法[3]に従い，次式(1)のポアソン方程式を解いて領域内の ξ と η の分布を求め，これらの等値線として NBFC 格子を生成する．なお，下式中の P と Q は指定した場所に座標線を集中させるための制御関数である．また，NBFC 格子の理解を助けるため，Fig.1 に模式的に表した NBFC の計算格子を示す．

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = P(\xi,\eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = Q(\xi,\eta) \end{cases} \tag{1}$$

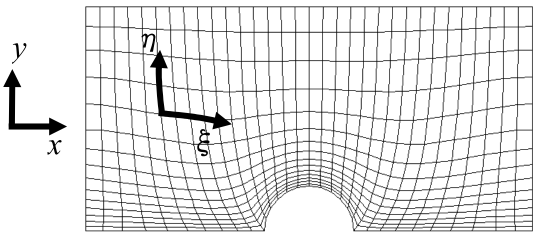


Fig.1　Schema of Non-Orthogonal Body Fitted Curvilinear Coordinate System (NBFC Grid)

Fig.1 の概略図，ならびに式(1)において P=0 とすることでラプラス方程式となることから明らかなように，NBFC 格子における ξ ライン（η ＝一定ライン）は，ポテンシャル流れの流線に近い分布となる．また，流れ解析においては，流れと直交・平行する方向に格子の２辺ずつを定めることにより，計算精度が向上することが知られていることから，NBFC 格子の ξ ラインをそのまま残し，ξ ラインに対して直交する ζ ラインを，以下の通りに生成する．

ξ ラインの接線方向の単位ベクトルは次式により表される．

$$t^{(\xi)} = \frac{x_\xi}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}}\boldsymbol{i} + \frac{y_\xi}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}}\boldsymbol{j} \tag{2}$$

ここで，この接線方向の単位ベクトルを表すポテンシャル量を ζ として，次式で定義すると，勾配と等値線は直交することから，ζ の等値線が ξ ラインに対して直交することとなる．

$$d\zeta = \frac{x_\xi}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}}dx + \frac{y_\xi}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}}dy \tag{3}$$

さらに，$dx = x_\xi d\xi + x_\eta d\eta$　　$dy = y_\xi d\xi + y_\eta d\eta$　であることから，前式(3)は次式(4)に変形される．

$$d\zeta = \frac{1}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}}\left\{\left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right)d\xi + \left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta\right)d\eta\right\} \tag{4}$$

従って，前式(4)を積分することで，ξ ラインに対して直交する ζ ラインが得られる．ただし，実際に ζ の値を算出する際には，次式(5)の通りに，ξ ライン（η ＝一定ライン）上での積分を行い，この等値線として ζ ラインを生成している．このため，前記した椙崎ら[2]の方法は３次元であることから当然として，例えば，２次元の近似直交座標系を生成する Akcelik[4]らの方法と比較しても，本研究の直交手法は相当に簡便である．

$$\begin{aligned} \zeta &= \int \frac{1}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}}\left\{\left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right)d\xi + \left(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta\right)d\eta\right\} \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}}\left(x_\xi^2 + y_\xi^2\right)d\xi = \int \sqrt{x_\xi^2 + y_\xi^2}\,d\xi \end{aligned} \tag{5}$$

ここで，この(5)式の積分が，本研究で提案している直交座標系を生成する手法の本質であることから，この積分の過程，つまり，ζ 値算出過程の詳細を以下に記す．まず，元の NBFC 格子の各格子点において，x_ξ と y_ξ の値を差分式により算出する．次に，算出された x_ξ と y_ξ を基に，ξ ライン上での式(5)の数値求積を行ない，ζ を求める．なお，この数値求積では，格子点毎の値を加算しつつ進行することとなるが，このような順次加算では数値誤差の大きくなる可能性が高い．そこで，後で示す Fig.3 より分かるように，対象としている場が左右対称であることから，対称線である半円の中点から伸びている η ライン（このラインは NBFC 格子でも ξ ラインに直交している）を基準として左右に積分を進めることで，重要な半円周りにおいて，誤差を小さくしている．

また，式(5)導出の過程より明らかなように，本報告における OBFC 格子は，ポテンシャル流れの流線と，これに対して直交する等ポテンシャル線の等値線を座標線にすることと概念的には同じである．従って，新たに生成する ζ ラインにおいても，座標線同士が交差することはなく，加えて，その変化も緩やかである．ただし，円柱に対して直交する座標線は放射状に広がるため，円柱から離れるに従って格子が極端に大きくなってしまう．そこで本報告では，計算領域全体の座標線を直交させるのではなく，円柱壁ならびに下側境界からある一定本数までの座標線を直交させることで，以下の４種類の部分直交格子を作成した．

(a) 円柱壁から 5 本目までが直交する計算格子
（ξo=5 と記す，直交領域が最も狭い OBFC 格子）
(b) 円柱壁から 15 本目までが直交する計算格子
（ξo=15 と記す）
(c) 円柱壁から 25 本目までが直交する計算格子
（ξo=25 と記す）
(d) 円柱壁から 35 本目までが直交する計算格子
（ξo=35 と記す，直交領域が最も広い OBFC 格子）

ここで，上記各計算格子における直交格子の割合を算出すると，ξ ラインの総数が 66 本であることから，全体の座標線

数に対して 7.5%〜53%の割合となる．また，(a)〜(d)の部分直交格子の非直交領域における座標線は，OBFC の座標線と NBFC の座標線の移動平均により算出し，最終的には NBFC の座標線に漸近させている．つまり，円柱から離れるにともなって，OBFC 格子は NBFC 格子に一致することとなる．

この手法により生成した格子を Fig.2，3 に示す．特に，比較が容易なように，円柱周りを 1/4 円ずつに切り取り接合させた Fig.2 において，円柱近傍における OBFC 格子の直交性が明らかである．加えて，Fig.3 の拡大図と Fig.2 より，直交領域の座標線と非直交領域の座標線が，滑らかに接合されていることも確認される．なお，Fig.2 より推察できるように，直交座標系においては，境界点の座標を適切に移動することで，格子形状変化をよりゆるやかにすることが可能である．ただし，ここでは，単純に直交性の効果のみを取り出すことを目的としたため，直交座標系と非直交座標系で境界点の位置も同じにしている．

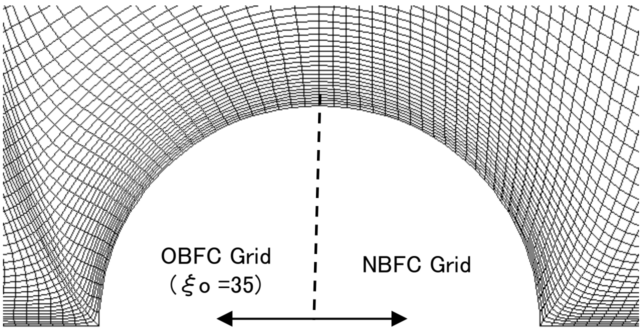
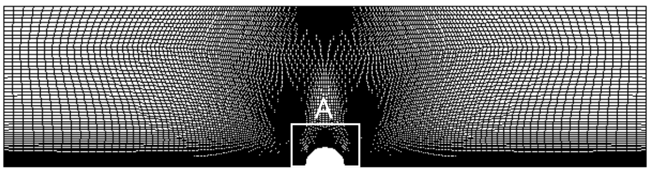
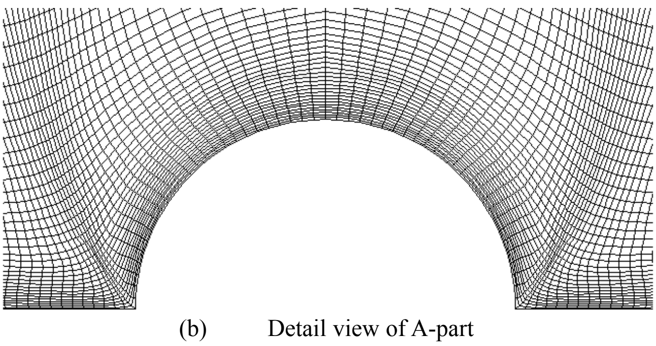


Fig.2　Comparison between Orthogonal (OBFC Grid　ξo =35, Left half side) and Non-Orthogonal (NBFC Grid, Right half side) Body Fitted Curvilinear Coordinate System



(a)　Whole view



(b)　　Detail view of A-part

Fig.3　Orthogonal Body Fitted Curvilinear Coordinate System (OBFC Grid　ξo =15)

3．数値計算手法と計算条件

本報告では，4 種類の OBFC 格子と，その元になった NBFC 格子を用い，円柱周りの流れを数値計算することで，OBFC 格子の有効性の確認を行った．計算手法の概要を以下に列挙する．

(a) 支配方程式：流れ関数 ψ ― 渦度 ω 系

(b) 離散化手法：有限体積法

(c) 差分スキーム：対流項はハイブリッド法による陰解法，拡散項は中心差分法

(d) 代数方程式の解法：３重対角行列法を用いた線順法

(e) 収束判定条件：各変数（ψ, ω）の各格子点における相対誤差の絶対値 $\left|(\psi_{i,j}^{n+1}-\psi_{i,j}^{n})/\psi_{i,j}^{n}\right|$，$\left|(\omega_{i,j}^{n+1}-\omega_{i,j}^{n})/\omega_{i,j}^{n}\right|$　（n：繰り返し回数，i,j：格子のインデックス）の最大誤差が 10^{-4} 未満

なお，境界条件は，以下の通りである．

(f) 円柱壁：ノースリップ壁

(g) 入口：一様流入

(h) 出口：十分発達した流れ［各変数（ψ, ω）の出口における流れ方向勾配がゼロ（$\partial\psi/\partial x|_{x_{\max}}=0$ ，$\partial\omega/\partial x|_{x_{\max}}=0$）］

(i) 上部境界：スリップ壁

(j) 円柱壁を除いた下部境界：対称面（対称境界）

また，Fig.2，3 より計算格子と計算場の概要把握は可能であると考えているが，定量的に，その概略を以下に追記する．

(k) 計算領域の大きさ：
　流れ方向が 16d，幅方向が 4d　[d：円柱直径]

(l) 座標(格子)線の数：
　流れ方向に 224 本，幅方向に 65 本

(m) 円柱より１点目の格子の大きさの平均値：
　円周方向が約 $4\mathrm{x}10^{-2}d$，半径方向が約 $1\mathrm{x}10^{-2}d$

なお，本研究での境界条件の与え方は Thompson らの方法[5]に準拠しており，加えて，支配方程式の離散化も，彼らの手法を有限体積法に応用したものである．従って，特に直交性を条件とするようなスキームは使用していない．つまり，前記した，彼らが言うところの「非直交性が極端に大きくならない限り，差分化手法により計算精度を維持できる」内容を組込んだ計算手法としている．

4．結果および考察

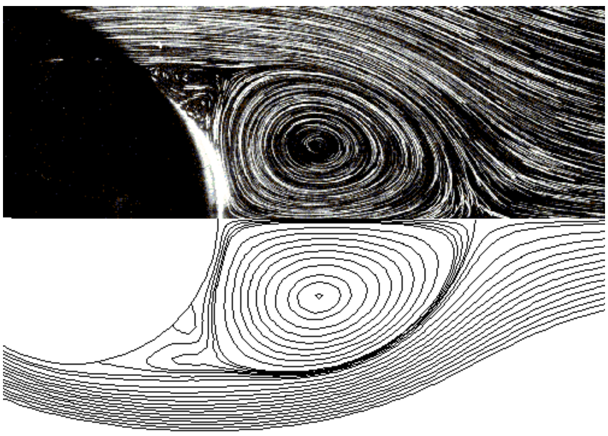
今回作成した部分直交座標系の中で，最も直交領域の広い ξo=35 の OBFC 格子と，その元となった NBFC 格子による円柱後流渦の数値計算結果を，Bouard ら[6]による無次元時間 $t^*=2.5$（$t^*=Ut/d$　U：代表速度，t：実時間）の可視化結果との比較により，Fig.4 に示す．ただし，(a)，(b)が Re=550 の結果であり，(c)，(d)は Re=3000 の結果である．また，結果の図

においては，Bouard らによる可視化結果[6]を上部に，数値計算結果を下部に配置し，これをひとまとめに接合させて 1 枚の結果にしている．従って，(a)，(c)の下部流線が ξo=35 の OBFC 格子による計算結果であり, (b), (d)の下部流線が NBFC 格子による計算結果である．

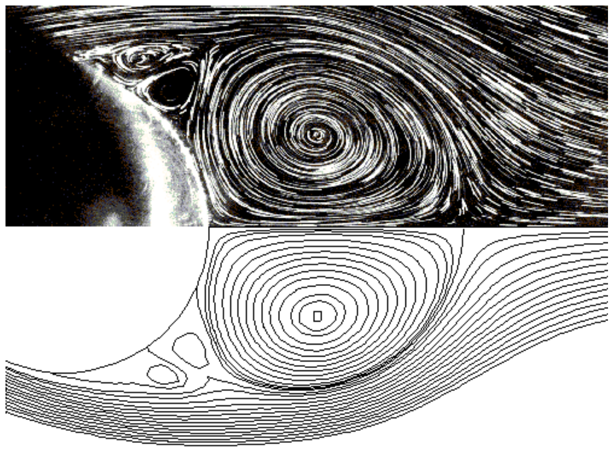
同図より明らかなように，渦中心位置や剥離点位置等，いずれの計算結果も可視化結果によく一致しているように見える．しかしながら，詳細に観察すると，ξo=35 の OBFC 格子と NBFC 格子では，再循環領域の流れ方向長さ（次図 Fig.5 における L）に違いのあることが分かる．これは，Re=550 と Re=3000 のどちらにおいても同様に見受けられ，NBFC 格子による計算結果は，ξo=35 の OBFC 格子の計算結果のみならず，可視化結果と比較しても，再循環領域が流れ方向に縦長になっている．つまり，非直交座標系の計算精度の低さが，定性的にも現れていると推察される．

そこで，今回作成した 4 種類の OBFC 格子とその元になった NBFC 格子において，定量的にどの程度の計算結果の違いを生ずるかを，Fig.5 に示す円柱後流渦のパラメータを対象として，やはり Bouard らの結果[6]と計算結果を比較することにより検討した．その結果を Fig.6 に示す．なお，Fig.5 の円柱後流渦のパラメータにおいて，a : 円柱後端から渦中心までの x 方向距離，b : 双子渦の中心間距離，L : 中心線上での閉じた円柱後流渦の長さ，である．

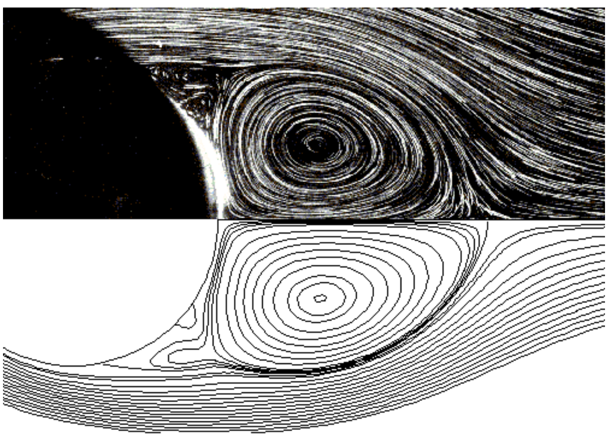
Fig.6 より明らかなように，全体として，数値計算結果と Bouard らの可視化結果[6]は良く一致している．また，格子の違いによる影響を見て取ると，渦中心のパラメータ a/d，$b/2d$ においては，その違いがわずかである．加えて，a/d，$b/2d$ における微妙な計算格子による違いも，計算格子による一定の傾向を持っている訳ではなく，渦中心の読みとり精度や数値計算の収束性に関わると思われるランダムな違いであると判断される．しかしながら，Fig.4 において問題となった渦の長さ L/d に関しては，Fig.6(a)より分かるように，計算結果の可視化結果との違いと，計算に用いた格子の直交する領域の広さとの間に明らかな相関があり，直交する領域が狭くなるの



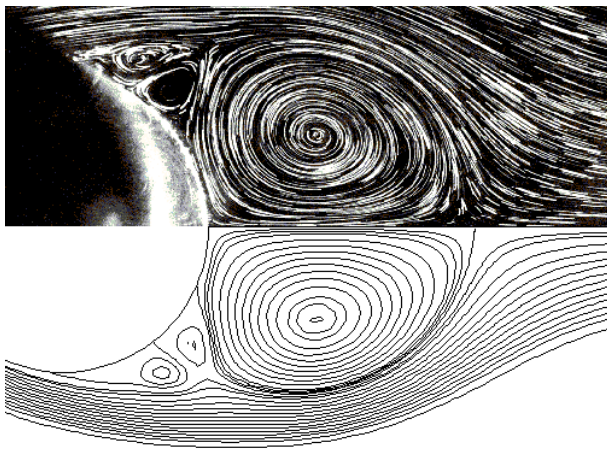
(a) Re=550, t^*=2.5, OBFC Grid（ξo=35）



(c) Re=3000, t^*=2.5, OBFC Grid（ξo=35）



(b) Re=550, t^*=2.5, NBFC Grid



(d) Re=3000, t^*=2.5, NBFC Grid

Fig.4 Comparison between calculated and measured streamlines behind a circular cylinder
Upper half side: Flow visualization[4], Lower half side: Numerical calculation

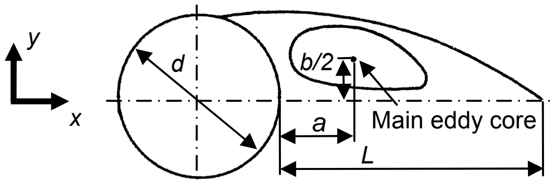
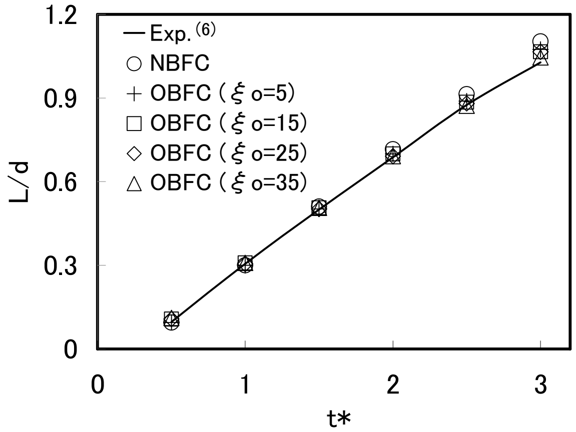
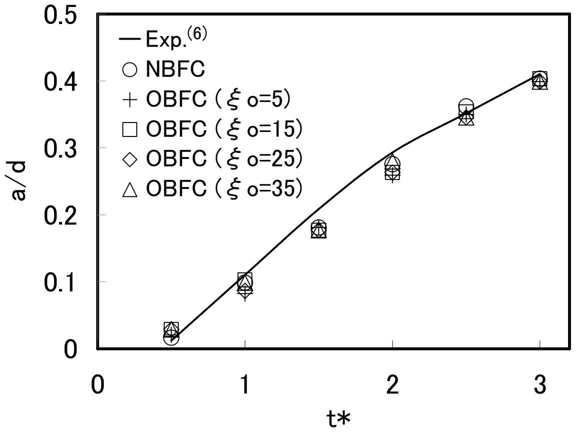


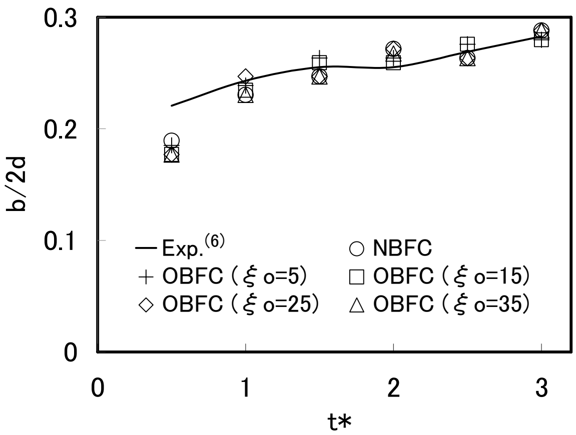
Fig.5　Geometrical parameters of the closed cylinder wake



(a)　Closed wake length *L*/*d*



(b)　*x*-coordinates of the main eddy core *a*/*d*



(c)　*y*-coordinates of the main eddy core *b*/2*d*

Fig.6　Comparison with the characteristics of the cylinder wake calculated by the orthogonal and non-orthogonal grid (Re=550)

にともなって，可視化結果との違いが顕著になっている．特に，*t**=3.0 においては，ξo=35 の OBFC 格子による計算結果が可視化結果と 2%弱の違いで一致しているのに対し, NBFC 格子における計算結果と可視化結果の違いは約 8%となっている．さらに，この違いは，*t** が大きくなるに従ってより顕著になるような傾向を示している．

なお，渦の長さ *L/d* においてのみ格子の非直交性の影響が現れ，渦中心位置 *a/d*，*b/2d* に関して格子の違いによる影響がほとんど現れないのは, 再循環領域, 特に渦中心近傍では, 流速が遅いためであると推察される．これは，以下のような理由による．壁面に沿った方向と，それに対して垂直な方向で構成する直交座標系においては，移流項による偽拡散が防止され，精度の高い解が得られる．ただし，流速が遅い場合には，そもそも拡散の影響が大きいことから，偽拡散を防止することの利点が小さくなると考えられる．またこのため，Re が小さい場合には，渦の長さ *L/d* においても，座標の直交性の利点が計算結果に反映されづらいと予測される．実際，これに関しては，より小さな Re=31 の結果である Fig.7 から確認され，格子に関わらず，計算結果はほぼ等しく，可視化結果とも良く一致している．なお，このため，逆に Re が大きい場合には，NBFC 格子における計算精度の低下が顕著になると推察される．

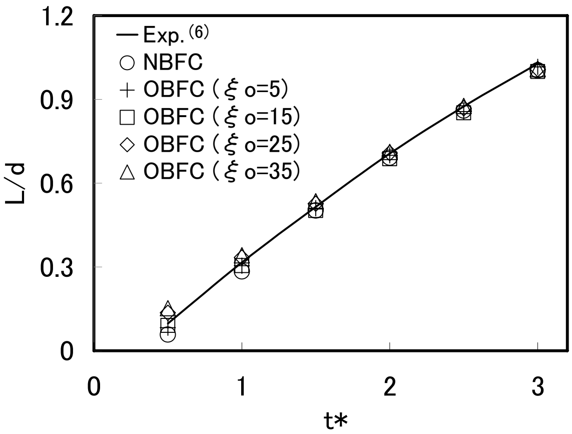


Fig.7　Comparison with the closed cylinder wake length calculated by the orthogonal and non-orthogonal grid (Re=31)

そこで，より大きな Re で比較することと，複数の既報告との比較を行うことによる信頼性の向上を目的として，Bouard ら[6]と同様の計測を行った永田ら[7]の Re=1200 の結果を用いて同様の評価を行った．ただし，対象としたのは直交性の効果が現れていた閉じた円柱後流渦の長さ *L* のみであり，その結果を Fig.8 に示す．同図より分かるように，永田らの計測結果に比べ，計算結果は，無時限時間 *t**が遅い場合に渦の長さ *L/d* が若干大きくなっている．ただし，永田ら結果との比較においても，やはり，直交する領域が狭くなるほど可視化計測結果と数値計算結果の違いが顕著になっており，*t**=3.0 においては，ξo=35 の OBFC 格子による計算結果が可

視化結果と 5%弱の違いで一致しているのに対し，NBFC 格子における計算結果と可視化結果の違いは約 12%である．従って，Re=550 の場合に比べ， Re が大きいこの場合に違いが大きくなっている．

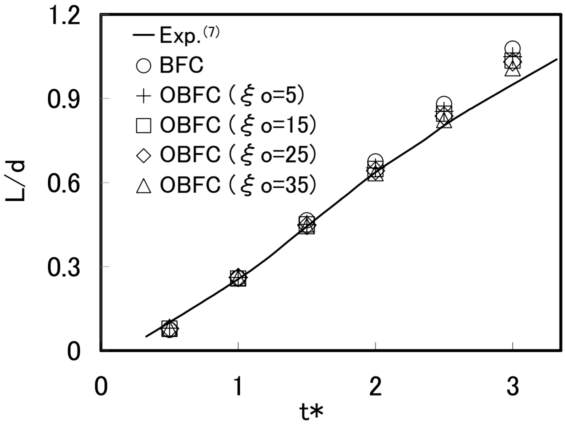


Fig.8 Comparison with the closed cylinder wake length calculated by the orthogonal and non-orthogonal grid (Re=1200)

5. まとめ

本研究では，流れ方向に沿った座標線と境界点位置を変更せず，これと交差する座標線のみを流れ方向の座標線に直交させた座標線を生成することで，格子の直交性が数値計算精度に与える効果と，このような直交格子生成法の有用性を検討した．その結果，直交領域が広い座標系ほど，可視化結果に一致する解が得られた．つまり，格子直交が数値計算において重要であることと，本研究で提案している簡便な直交格子生成法でも充分に有効であることが確認された．また，この格子直交の効果は Re が大きい場合ほど大きく，Re が小さい場合には，格子が直交していることのメリットが計算結果に反映されづらくなる．ただし，実現象，特に工業分野での流れにおいては，ほとんどの場合，Re が非常に大きいことから，数値計算に関わる格子生成においては，格子の直交性に留意する必要があると考えられる．

最後に, 本研究の実現象への展開に関して追記する. 現在, この手法を地面効果翼機の最適翼形状の数値予測に適用しているところである．同機の翼性能では，地面高さがパラメータとなり，しかも，迎え角によってもこの高さが変化する．このため，O型，C型の格子ではなく，本研究と同様のH型の格子を翼の上下面に別々に適用し，これを貼り合わせて使用することとしている．これにより，地面高さに関わらず翼上部格子は変化させる必要がなく，しかも，翼下部格子においても内挿等の代数的な処理により，地面高さの変化への対応を可能としている．

参考文献

(1) Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A and Mastin, C.W. : Numerical Grid Generation −Foundations and Applications−, (1985), Elsevier Science Publishing Co., Inc.

(2) 椙崎康平，川田 重夫：3 次元数値計算格子生成に関する研究, 電子情報通信学会技術研究報告. SS, ソフトウェアサイエンス，**97-391**(1997)，pp 9-16.

(3) Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin, C.W. : TOMCAT - A Code for Numerical Generation of Boundary Fitted Curvilinear Coordinate Systems on Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, J. Computational Physics, **24**(1977), pp 274-302.

(4) Akcelik, V., Jaramaz, B. and Ghattas, O. : Nearly Orthogonal Two-Dimensional Grid Generation with Aspect Ratio Control, J. Computational Physics, **171**(2001), pp 805-821.

(5) Thames, F.C., Thompson, J.F. and Mastin, C.W. : Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for Arbitrary Two-Dimensional Airfoils, Proc. NASA Conf. Aerodynamic Analyses Requiring Advanced Computers, NASA SP-347(1975), pp 469-530.

(6) Bouard, R. and Coutanceau, M. : The Early Stage of Development of the Wake Behind an Impulsively Started Cylinder for $40 < Re < 10^4$, J. Fluid Mechanics, **101-3**(1980), pp 583-607.

(7) 永田拓，船田英明，松井辰彌：突然出発する円柱背後の非定常渦領域の流れ:第 2 報,速度場と循環，日本機械学會論文集 B 編，**51-463**(1985)，pp 748-755.