計算数理工学論文集 Vol. 12 (2012 年 12 月)，論文 No. 20-121212 JASCOME

ストークス流れ（遅い非圧縮性粘性流れ）問題の一般解

General Solutions of Stokes Flow Problem

登坂 宣好 [1)]

Nobuyoshi TOSAKA

1) 東京電機大未来科学部 (〒 120-8551 東京都足立区千住旭町 5 番 E-mail: nobtsk@cck.dendai.ac.jp)

The governing equations for the flow of an incompressible viscous fluid at low Reynolds number (the Stokes flow) are given by the Stokes equations instead of the well-known Navier-Stokes equations. There exist several efficient methods, especially numerical computation, in solving Stokes flow problems. In this paper, general solutions of not only steady but also unsteady Stokes flow problems are investgated analytically. With the aid of Hormander method in the theory of partial differential equation we can obtain general solutions of the linear coupled system of partial differential equations by the Stokes flow equations. The existing general solutions with biharmonic function, harmonic function, and integral expression in which Imai solution is included can be derived systematically from general solutions of the steady flow obtained in this paper. It is shown that there exist three kinds ofsolutions in unsteady flow.

Key Words: General Solution, Incompressible Viscous Fluid, Steady and Unsteady Slow Flows, Stokes Equations, Hormander Method, Biharmonic Function, Harmonic Function, Imai Solution, Naghdi-Hsu Solution

1. はじめに

流れ現象の解明には、その数理モデルに対する解析が必要となり、多くのモデル化が存在している。完全流体のポテンシャル流れと粘性流体の流れがそのモデルの代表的な例である。実際の流れとして水や水波を対象とする場合は、前者のモデル化、風の場合は、後者のモデル化が採用されている。これまで、水を含むタンク内に生じる動揺現象の解明には、多くの場合、完全流体としてのモデル化が採用されている。したがって、その解明には、ラプラス方程式の解析的な手法および数値シミュレーションが行われている。一方、風と構造物との連成現象の解明には非圧縮性の粘性流体の基本微分方程式である「ナヴェ・ストークス方程式」の数値シミュレーションが多用されている。この微分方程式は非線形方程式であり、数値解のみの構成が可能となっている。もし、対象とする流れ現象が、”遅い ”流れであるならば、微分方程式は線形化され、いわゆる「ストークス流れ」となり、「ストークス方程式」を解析すればよいことになる。ストークス方程式は線形であるので、解析的に ”一般解 ”が構成されることになる。

そこで、水のような流体を対象とする場合、「非粘性の完全流体としてモデル化するのか、少しでも粘性効果を考慮するのが妥当なのか」、モデル化の判断が必要となる。そのためには、解析的な取り扱いのできる線形モデルとしてのストークス方程式に対する一般解の構成が必要となる。そこで、完全流体を支配するラプラス方程式の解（調和関数）とストークス方程式の解析解とを用いて 2 つの線形モデルの適用性が議論できることになる。さらに、ストークス方程式の解析解から「遅い流れ」の適用範囲も明確化できることになる。もちろん、この解析的な一般解から具体的な境界値問題や初期値ー境界値問題に対する特解が与えられれば、数値解との比較を通して数値シミュレーション結果の検証も可能となる。

ストークス方程式の解析的な一般解は、これまで、定常解についていくつかの解の構成に関する議論 [(2, 3, 4)] が存在している。一方、非定常解については、球座標系を対象とした表現 [(5)] が与えられているに過ぎない。今井解 [(2)] は、ベクトル場のヘルムホルツ分解に基ずく構成を示した。[(3, 4)] は、等方等質静弾性体の解からの誘導である。そこで、本論では、遅い粘性流れ現象を対象とした「ストークス流れ問

2012 年 10 月 10 日受付，2012 年 11 月 13 日受理

題」の支配方程式である、ストークス方程式と非圧縮条件式からなる連立偏微分方程式の解析的な一般解を定常および非定常共に構成することを目的とする。この連立偏微分方程式に、ホルマンダーの方法 [1]（微分作用素行列）を適用することによって、支配方程式を満たす速度ベクトルと圧力とに対するベクトル場およびスカラー場による表現が得られることになる。すなわち、速度ベクトルと圧力とのポテンシャル表現である。なお、本論では、この解のポテンシャル表現における決定方程式は明示的に与えているが、その具体的な解の表現は与えていない。定常問題では、これらの表現から、前述した既存の各解が「今井解」を含めて系統的に得られることも明らかにする。この結果、ストークス流れ問題の一般解の構成に関していくつかの立場が考えられるが、一つのアプローチを提示することができる。

2. 基礎微分方程式

本論で対象とする流体の運動を支配する基本関係式を以下に示す。

- 運動方程式

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{S} + \boldsymbol{b} = \rho\, \dot{\boldsymbol{v}} \tag{1}$$

$$(\ S_{ij,j} + b_i = \rho\, \dot{v}_i\ )$$

- 質量保存則

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

$$(\ v_{i,i} = 0\ \ )$$

- 構成方程式

$$\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{1} + \mu\,(\boldsymbol{\nabla v} + \boldsymbol{\nabla v^T}) \tag{3}$$

$$(\ S_{ij} = -p\ \delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})\ \ )$$

ただし、各量は次の通りである。

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}, t)$: 応力テンソル、

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t)$: 物体力ベクトル、

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$: 速度ベクトル

ρ : 質量密度、μ : 粘性係数

以上の基礎関係式から次のような速度ベクトルと圧力に関する基礎微分方程式を得る。

- ストークス方程式

$$-\,\rho\,\dot{\boldsymbol{v}} + \mu\,\triangle\boldsymbol{v} - \nabla p + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

$$(\ -\rho\ \dot{v}_i + \mu\ v_{i,jj} - p_i + b_i = 0\ )$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

$$(\ v_{i,i} = 0\ \ )$$

または、

$$\Box_\nu \boldsymbol{v} - \nabla q + \boldsymbol{c} = 0 \tag{6}$$

$$(\ \ \Box_\nu v_i - q_{,i} + c_i = 0\ \ )$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{7}$$

$$(\ v_{i,i} = 0\ \ )$$

ただし、

$\Box_\nu = \nu\triangle - \dfrac{\partial}{\partial t}$: 熱微分作用素、$\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$: 動粘性係数、$\boldsymbol{c} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{\rho}$、　$\triangle$: 調和微分演算子

以上で示した非定常ストークス方程式に対して、運動方程式の div をとり、非圧縮条件を考慮することによって次のような圧力 q に関するポアソン方程式を得る。

$$\triangle\ q = \mathrm{div}\ \boldsymbol{c} \tag{8}$$

なお、次のような諸量の置き換えをすると、

$$\Box_\nu = \nu\ \triangle - \frac{\partial}{\partial t}\quad\rightarrow\quad \mu\ \triangle \tag{9}$$

$$q = \frac{p}{\rho}\quad\rightarrow\quad p \tag{10}$$

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{b}}{\rho}\quad\rightarrow\quad \boldsymbol{b} \tag{11}$$

以下の定常ストークス流れに対する基礎微分方程式を得る。

$$\mu\ \triangle\ \boldsymbol{v} - \nabla p + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{12}$$

$$(\ \mu\ v_{i,jj} - p_{,i} + b_i = 0\ \ \ )$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{13}$$

$$(\ v_{i,i} = 0\ \ \ \ )$$

$$\triangle p = \boldsymbol{b} \tag{14}$$

$$(\ p_{,ii} = b_{i,i}\ \ )$$

この定常の基礎微分方程式（12）については、次のような回転型の表現も知られている。

$$-\,\mu\ \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v} - \nabla p + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{15}$$

$$(\ -\mu\ (v_{j,ij} - v_{i,jj}) - p_{,i} + b_i = 0\ )$$

3. 定常問題

3.1. 一般解の構成

まづ始めに 3 次元定常問題に関する基礎微分方程式（12）〜（14）を満たすような一般解を構成する。式（12）、（13）を次のような各座標成分に関して表現する。

$$\mu\ v_{1,ll} - p_{,1} + b_1 = 0 \tag{16}$$

$$\mu\ v_{2,ll} - p_{,2} + b_2 = 0 \tag{17}$$

$$\mu\ v_{3,ll} - p_{,3} + b_3 = 0 \tag{18}$$

$$v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3} = 0 \tag{19}$$

この連立微分方程式をまとめて次のように行列表現する。

$$\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{v}} + \tilde{\boldsymbol{b}} = \tilde{\boldsymbol{0}} \tag{20}$$

$$(\ \tilde{L_{ij}}\tilde{v_j} + \tilde{b_i} = 0\ )$$

ただし、行列とベクトルとを次のように与える。

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} \mu\triangle & 0 & 0 & D_1 \\ 0 & \mu\triangle & 0 & D_2 \\ 0 & 0 & \mu\triangle & D_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ p \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

なお、各座標成分に関する偏微分作用素を次のように略記している。

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\ , \quad (i = 1, 2, 3)$$

連立微分方程式（20）の解 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ を微分作用素行列 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ の adjoint 行列を $\tilde{\boldsymbol{M}}$ とすると、ベクトル場 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ を用いて,

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \tilde{\boldsymbol{M}}\tilde{\boldsymbol{a}} \tag{23}$$

とすると、未知ベクトル場 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ は次のような微分方程式の解として与えられる。

$$\tilde{L}\tilde{\boldsymbol{a}} + \tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0} \tag{24}$$

ただし、

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \mu\triangle\boldsymbol{M}$$

$$= \mu\triangle \begin{bmatrix} D_2^2 + D_3^2 & -D_2D_1 & -D_1D_3 & \mu\triangle D_1 \\ -D_1D_2 & D_1^2 + D_3^2 & -D_2D_3 & \mu\triangle D_2 \\ -D_1D_3 & -D_2D_3 & D_1^2 + D_2^2 & \mu\triangle D_3 \\ -\mu\triangle D_1 & -\mu\triangle D_2 & -\mu\triangle D_3 & \mu^2\triangle^2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\tilde{L} := \det\tilde{\boldsymbol{L}} = \mu^2\triangle^3 \tag{26}$$

以上によって、解ベクトル場 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ は、次のように与えられることになる。

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \mu\triangle\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{M}(\mu\triangle\tilde{\boldsymbol{a}}) = \boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \tag{27}$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ p \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{M}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \alpha \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$= \begin{bmatrix} D_2^2 + D_3^2 & -D_2D_1 & -D_3D_1 & \mu D_1\triangle \\ -D_1D_2 & D_3^2 + D_1^2 & -D_3D_2 & \mu D_2\triangle \\ -D_1D_3 & -D_2D_3 & D_1^2 + D_2^2 & \mu D_3\triangle \\ -\mu D_1\triangle & -\mu D_2\triangle & -\mu D_3\triangle & \mu^2\triangle^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$= \begin{pmatrix} (D_2^2 + D_3^2)\alpha_1 - D_2D_1\alpha_2 - D_3D_1\alpha_3 + \mu D_1\triangle\alpha \\ -D_1D_2\alpha_1 + (D_3^2 + D_1^2)\alpha_2 - D_3D_2\alpha_3 + \mu D_2\triangle\alpha \\ -D_1D_3\alpha_1 - D_2D_3\alpha_2 + (D_1^2 + D_2^2)\alpha_3 + \mu D_3\triangle\alpha \\ -\mu\triangle(D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2 + D_3\alpha_3) + \mu^2\triangle^2\alpha \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$= \begin{pmatrix} \triangle\alpha_1 - D_1(D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2 + D_3\alpha_3) + \mu D_1\triangle\alpha \\ \triangle\alpha_2 - D_2(D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2 + D_3\alpha_3) + \mu D_2\triangle\alpha \\ \triangle\alpha_3 - D_3(D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2 + D_3\alpha_3) + \mu D_3\triangle\alpha \\ -\mu\triangle(D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2 + D_3\alpha_3) + \mu^2\triangle^2\alpha \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$= \begin{pmatrix} \triangle\boldsymbol{\alpha} - \nabla\mathrm{div}\boldsymbol{\alpha} + \nabla(\mu\triangle\alpha) \\ -\mu\triangle\mathrm{div}\boldsymbol{\alpha} + \mu^2\triangle^2\alpha \end{pmatrix} \tag{32}$$

以上によって、定常ストークス問題の解は次のように表される。

$$\boldsymbol{v} = \triangle\boldsymbol{\alpha} - \nabla\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} + \nabla\ (\mu\ \triangle\alpha) = \triangle\boldsymbol{\alpha} - \nabla\ (\mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} - \mu\ \triangle\alpha) \tag{33}$$

$$p = -\mu\ \triangle\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} \tag{34}$$

ただし、ベクトル場 $\boldsymbol{\alpha}$ およびスカラー場 α は次の微分方程式を満たさなければならない。

$$\mu\ \triangle^2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}, \quad \mu\ \triangle^2\alpha = 0 \tag{35}$$

なお、上記の圧力解は、次のようにポアソン方程式を満たすことが分かる。

$$\triangle p = -\mu\ \triangle\mathrm{div}\ (\triangle\boldsymbol{\alpha}) = -\mathrm{div}\ (\mu\ \triangle^2\boldsymbol{\alpha}) = \mathrm{div}\ \boldsymbol{b} \tag{36}$$

3.2. 定常解の表現

前節で導いた定常問題の一般解（この解を“ 重調和関数解 ”と呼ぶ）から得られる解の表現と系譜を以下に示すことにする。

重調和関数解

$$\boldsymbol{v} = \triangle\boldsymbol{\alpha} - \nabla(\mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} - \mu\ \triangle\alpha) \tag{37}$$

$$p = -\mu\ \mathrm{div}\ (\triangle\boldsymbol{\alpha}) \tag{38}$$

$$(\quad \triangle^2\boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{\mu}\ \boldsymbol{b}, \ \ \mu\ \triangle^2\alpha = 0 \quad) \tag{39}$$

この解の表現において、ベクトル微分等式

$$\triangle \boldsymbol{\alpha} = -\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\alpha} + \nabla \mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} \tag{40}$$

を用いることによって、次のような回転型の解の表現を得る。

回転型解

$$\boldsymbol{v} = -\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{\alpha} + \mu\ \nabla(\triangle\alpha) \tag{41}$$

$$p = -\mu\ \mathrm{div}\ (\triangle\boldsymbol{\alpha}) \tag{42}$$

$$\left(\ \triangle^2\boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{\mu}\ \boldsymbol{b}, \quad \mu\ \triangle^2\alpha = 0\ \right)$$

次に、以下に示すスカラー場 ϕ

$$\phi := 2\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x}\cdot\triangle\boldsymbol{\alpha} - 2\mu\ \triangle\alpha \tag{43}$$

を導入すると、次のよう重調和・調和関数解を得る。

重調和・調和関数解

$$\boldsymbol{v} = \triangle\boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{x}\cdot\triangle\boldsymbol{\alpha} + \phi) \tag{44}$$

$$\begin{aligned} p &= -\mu\triangle\{\mu\triangle\alpha + \frac{1}{2}(\phi + \boldsymbol{x}\cdot\triangle\boldsymbol{\alpha})\} \\ &= -\frac{1}{2}\mu\ \triangle(\boldsymbol{x}\cdot\triangle\boldsymbol{\alpha} + \phi) = -\mu\ \mathrm{div}\ (\triangle\boldsymbol{\alpha}) \end{aligned} \tag{45}$$

$$\left(\ \triangle^2\boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{\mu}\ \boldsymbol{b}, \quad \triangle\phi = -\boldsymbol{x}\cdot\triangle^2\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{\mu}\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}\ \right) \tag{46}$$

ここで得られた重調和・調和関数解において、次のようなベクトル場 $\boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{\beta} := \triangle\boldsymbol{\alpha} \tag{47}$$

を導入することによって、次のような調和関数解を得る。

調和関数解

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\beta} + \phi) \tag{48}$$

$$p = -\frac{1}{2}\mu\ \nabla(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\beta} + \phi) = -\mu\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\beta} \tag{49}$$

$$\left(\ \triangle\boldsymbol{\beta} = -\frac{1}{\mu}\boldsymbol{b}, \quad \triangle\phi = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}\ \right) \tag{50}$$

さらに、次のような条件

$$\phi = 0, \qquad \boldsymbol{\psi} := -\frac{1}{2}\ \boldsymbol{\beta} \tag{51}$$

を取り入れるならば、次の“今井解”を得る。

今井解

$$\boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{\psi} + \nabla(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\psi}) \tag{52}$$

$$p = 2\mu\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\psi} \tag{53}$$

$$\left(\ \triangle\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2\mu}\ \boldsymbol{b}\ \right) \tag{54}$$

次に、これまで示してきたスカラー場 ϕ による解の表現とは異なる以下のスカラー場 η

$$\eta := \mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} - \mu\ \triangle\alpha \tag{55}$$

を導入することによって得られる解の表現を与えることにする。

既に示した“重調和関数解”は、このスカラー場 η を用いることによって次のような解の表現となる。

重調和関数解

$$\boldsymbol{v} = \triangle\boldsymbol{\alpha} - \nabla\eta \tag{56}$$

$$p = -\mu\ \mathrm{div}\ (\triangle\boldsymbol{\alpha}) \tag{57}$$

$$\left(\ \triangle^2\boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{\mu}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{b}, \quad \triangle^2\eta = -\frac{1}{\mu}\mathrm{div}\ \boldsymbol{b}\ \right) \tag{58}$$

さらに、既に式（47）で導入したベクトル場 $\boldsymbol{\beta}$ を用いて上記の解の表現を書き換えると以下の表現を得る。

重調和・調和関数解

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\beta} - \nabla\eta \tag{59}$$

$$p = -\mu\ \mathrm{div}\ \beta \tag{60}$$

$$\left(\ \triangle\boldsymbol{\beta} = -\frac{1}{\mu}\boldsymbol{b}\ , \quad \triangle^2\eta = -\frac{1}{\mu}\mathrm{div}\ \boldsymbol{b}\ \right) \tag{61}$$

この解の表現において、ベクトル場 $\boldsymbol{\beta}$ とスカラー場 η とを連成させた以下のような解の表現も与えられる。

連成関数解

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\beta} - \nabla\eta \tag{62}$$

$$p = -\mu\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\beta} \tag{63}$$

$$\left(\ \triangle\boldsymbol{\beta} = -\frac{1}{\mu}\boldsymbol{b}\ , \quad \triangle\eta = \mathrm{div}\ \boldsymbol{\beta}\ \right) \tag{64}$$

上記のスカラー場 η に関するベクトル場 $\boldsymbol{\beta}$ との連成型ポアソン方程式の解を、ラプラシアンの基本解 η^* を用いてたたみ込み積分表現することによって、次のような解の積分表現を得る。

積分表現解 (Naghdi-Hsu 解)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\beta} + \nabla(\eta^*\ *\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\beta}) \tag{65}$$

$$p = -\mu\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\beta} \tag{66}$$

$$\left(\ \triangle\boldsymbol{\beta} = -\frac{1}{\mu}\ \boldsymbol{b}\ , \quad \eta^* = \frac{1}{4\pi}\ \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|}\ \right) \tag{67}$$

4. 非定常問題

4.1. 一般解の構成

3 次元非定常ストークス流れ問題の一般解を構成する。非

定常の基礎微分方程式（6)、(7）に対する成分に関する連立微分方程式は次のように表される。

$$\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{v}} + \tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{0} \tag{68}$$

ただし、非定常問題については、上記の諸量は空間および時間変数に関するものとして以下のように与える。

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \begin{bmatrix} \Box_\nu & 0 & 0 & -D_1 \\ 0 & \Box_\nu & 0 & -D_2 \\ 0 & 0 & \Box_\nu & -D_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 & 0 \end{bmatrix} \tag{69}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v} \\ q \end{pmatrix} \ , \ \tilde{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{70}$$

この微分作用素行列 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ の adjoint を $\tilde{\boldsymbol{M}}$ として、上記の連立微分方程式の解 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ を空間・時間変数に関するベクトル場 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ を用いて次のように表す。

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \tilde{\boldsymbol{M}}\tilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{M}(\ \Box_\nu\ \tilde{\boldsymbol{a}}\ ) = \boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \tag{71}$$

ただし、

$$\tilde{\boldsymbol{M}} = \Box_\nu\, \boldsymbol{M} = \Box_\nu \begin{bmatrix} D_2^2 + D_3^2 & -D_1D_2 & -D_1D_3 & \Box_\nu\ D_1 \\ -D_2D_1 & D_3^2 + D_1^2 & -D_2D_3 & \Box_\nu\ D_2 \\ -D_3D_1 & -D_3D_2 & D_1^2 + D_2^2 & \Box_\nu\ D_3 \\ -\Box_\nu\ D_1 & -\Box_\nu\ D_2 & -\Box_\nu\ D_3 & \Box_\nu^2 \end{bmatrix} \tag{72}$$

この行列を用いることによって、上記の解 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ は次のように表される。

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \tilde{\boldsymbol{M}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{M}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \alpha \end{pmatrix} \tag{73}$$

$$= \begin{pmatrix} (D_2^2 + D_3^2)\ \alpha_1 - D_1D_2\ \alpha_2 - D_1D_3\ \alpha_3 + \Box_\nu\ D_1\ \alpha \\ -D_2D_1\ \alpha_1 + (D_1^2 + D_3^2)\ \alpha_2 - D_2D_3\ \alpha_3 + \Box_\nu\ D_2\ \alpha \\ -D_3D_1\ \alpha_1 - D_3D_2\ \alpha_2 + (D_1^2 + D_2^2)\ \alpha_3 + \Box_\nu\ D_3\ \alpha \\ -\Box_\nu\ (D_1\ \alpha_1 + D_2\ \alpha_2 + D_3\ \alpha_3) + \Box_\nu^2\ \alpha \end{pmatrix} \tag{74}$$

$$= \begin{pmatrix} \triangle\ \alpha_1 - D_1(D_1\ \alpha_1 + D_2\ \alpha_2 + D_3\ \alpha_3) + \Box_\nu\ D_1\ \alpha \\ \triangle\ \alpha_2 - D_2(D_1\ \alpha_1 + D_2\ \alpha_2 + D_3\ \alpha_3) + \Box_\nu\ D_2\ \alpha \\ \triangle\ \alpha_3 - D_3(D_1\ \alpha_1 + D_2\ \alpha_2 + D_3\ \alpha_3) + \Box_\nu\ D_3\ \alpha \\ -\Box_\nu\ (D_1\ \alpha_1 + D_2\ \alpha_1 + D_3\ \alpha_3) + \Box_\nu^2\ \alpha \end{pmatrix} \tag{75}$$

$$= \begin{pmatrix} \triangle\ \boldsymbol{\alpha} - \nabla \mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} + \nabla(\Box_\nu\ \alpha) \\ -\Box_\nu\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} + \Box_\nu^2\ \alpha \end{pmatrix} \tag{76}$$

以上によって、非定常ストークス問題の一般解は次のように表される。

$$\boldsymbol{v} = \triangle\ \boldsymbol{\alpha} - \nabla\ (\mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} - \Box_\nu\ \alpha) \tag{77}$$

$$q = -\Box_\nu\ (\mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} - \Box_\nu\ \alpha) \tag{78}$$

ただし、ベクトル場 $\boldsymbol{\alpha}$ とスカラー場 α は次の微分方程式を満たすように与えられるものとする。

$$\triangle\ \Box_\nu\ \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}\ \ ,\quad \triangle\ \Box_\nu\ \alpha = 0 \tag{79}$$

なお、上記の圧力 q は次のようにポアソン方程式を満たすことが分かる。

$$\triangle\ q = -\triangle\ \Box_\nu\ (\mathrm{div}\ \alpha - \Box_\nu\ \alpha) \tag{80}$$

$$= -\mathrm{div}\ (\triangle\ \Box_\nu\ \boldsymbol{\alpha}) + \Box_\nu\ (\triangle\ \Box_\nu\ \alpha) = \mathrm{div}\ \boldsymbol{c} \tag{81}$$

4.2. 非定常解の表現

前節で構成した非定常問題の一般解（この解を“調和・熱微分作用素解”と呼ぶ）から得られる解の表現を以下に示す。

調和・熱微分作用素解

$$\boldsymbol{v} = \triangle\ \boldsymbol{\alpha} - \nabla\ (\mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} - \Box_\nu\ \alpha) \tag{82}$$

$$q = -\Box_\nu\ (\mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} - \Box_\nu\ \alpha) \tag{83}$$

$$(\quad \triangle\ \Box_\nu\ \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}\ ,\quad \triangle\ \Box_\nu\ \alpha = 0 \quad) \tag{84}$$

この解の表現において、次のようなベクトル場 $\boldsymbol{\beta}$ とスカラー場 η

$$\boldsymbol{\beta} := \triangle\ \boldsymbol{\alpha}\ ,\quad \eta := \mathrm{div}\ \boldsymbol{\alpha} - \Box_\nu\ \alpha \tag{85}$$

を導入することによって、次のような連成型解の表現を得る。

連成型解

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\beta} - \nabla\ \eta \tag{86}$$

$$q = -\Box_\nu\ \eta \tag{87}$$

$$(\quad \Box_\nu\ \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}\ \ ,\quad \triangle\ \eta = \mathrm{div}\ \boldsymbol{\beta} \quad) \tag{88}$$

さらに、この解の表現において、η に関する連成のポアソン方程式を調和微分作用素の基本解 η^* を用いて、たたみ込み積分を行うことにすれば、次のような積分表示解が得られる。

積分表示解

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\beta} - \nabla\ (\eta^*\ *\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\beta}) \tag{89}$$

$$q = -\Box_\nu\ (\eta^*\ *\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{\beta}) \tag{90}$$

$$(\quad \Box_\nu\ \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}\ \ ,\ \eta^* = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \quad) \tag{91}$$

5. おわりに

非圧縮性粘性流体の遅い流れの数理モデルである“ストークス方程式”と非圧縮条件式との連立偏微分方程式に対する一般解の構成と、その解から得られるいくつかの表現を、定常のみならず非定常問題を対象として与えた。その手法としては、従来から多用されている「ベクトル場のヘルムホルツ分解」ではなく、連立微分方程式の微分作用素行列の”adjoint”を用いたホルマンダー法による解のポテンシャル表現である。定常解については、既存の一般解の誘導過程およびその特徴が明確化され、系譜も示すことができた。これまで議論が進んでいなかった非定常問題については、一般解の表現を示すことができた。このように本論文で提示された一般解の表現をもとに今後の研究の進展が図られることを期待したい。

なお、ここで得られた一般解の各表現を明示するには、未知ベクトルおよびスカラーポテンシャルに対して、非同次形の重調和方程式、調和方程式および熱伝導方程式を満たす解の具体的な表現を必要とする。それらの表現は、具体的な流れ場による境界値問題または初期値ー境界値問題の設定による特解の導出から与えられる。本論では、一般解の構成に対する一つのアプローチの提示にとどまり、この点に関する議論がなされていない。従って、解析解の有効性は、特解の具体的な提示の後検証されることになる。球周りの遅い粘性流れ問題等の典型的な流れ場への適用に関する研究の展開については、今後の課題としたい。

なお、本論で示した解の構成とそこから得られる一般解の各表現は、3 次元等方等質非圧縮性線形弾性体の静および動的問題の一般解に適用できることを付記しておく。ただし、その場合には、速度ベクトルを変位ベクトルに、ラメ定数を粘性係数に、熱微分作用素を波動微分作用素に読み替えなければならない。

謝辞

本論文の内容の一部は、日本建築学会「流体と構造物の連成問題小委員会」(2010.11. 8) および京都大学大学院情報学研究科「数値解析セミナー」(2010.12. 21) で発表した。その際に多くの討論していただいた方々および文献の存在を教えていただいた石本健太 (京都大学数理解析研究所) さんに深謝を表す。

参考文献

(1) Hormander,L.: On the theory of general partial diffrential operators. Acta Mathematica, 94(1955), pp.161-248.

(2) 今井功　「流体力学」(前編) (裳華房、1973)

(3) Naghdi,P.M., and C.S.Hsu : On a representation of displacements in linear elasticity in terms of three stress functions. J. Math. Mech. 10(1961), 233-245.

(4) Padmavathi,B.S, G.P.Rajasekhar, and T.Amaranath : A note on complete general solutions of Stokes equations. Q.Jl Mech.appl.Math. 51(1998), 383-388.

(5) Venkatalaxmi,A.,B.S.Padmavathi, and T.Amaranath : A general solution of unsteady Stokes equations. Fluid Dynamics Reserch 35(2004), 229-236.