

# Oseen 流れにおけるレベルセット法に基づくトポロジー最適化

## TOPOLOGY OPTIMIZATION METHOD BASED ON LEVEL SET METHOD IN OSEEN FLOW

矢地 謙太郎<sup>1)</sup>, 山田 崇恭<sup>2)</sup>, 久保 世志<sup>3)</sup>, 泉井 一浩<sup>4)</sup>, 西脇 眞二<sup>5)</sup>

Kentaro YAJI, Takayuki YAMADA, Seiji KUBO, Kazuhiro IZUI and Shinji NISHIWAKI

- 1) 京都大学大学院工学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: yaji.kentarou.74v@st.kyoto-u.ac.jp)  
2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: yamada@nuem.nagoya-u.ac.jp)  
3) 株式会社 IHI 基盤技術研究所 (〒 235-8501 横浜市磯子区新中原町, E-mail: seiji\_kubo@ihi.co.jp)  
4) 京都大学大学院工学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: izui@prec.kyoto-u.ac.jp)  
5) 京都大学大学院工学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: shinji@prec.kyoto-u.ac.jp)

This paper presents a topology optimization method that incorporates the Oseen equation. The proposed method, based on level set fluid boundary expressions, is applied to an Oseen flow problem. First, we discuss the topology optimization method that incorporates level set-based fluid boundary expressions and the use of a fictitious interface energy. Using this optimization method, we minimize the total potential power for a flow channel under Oseen flow, which is equivalent to minimizing flow friction in the channel. Next, we construct an algorithm for the topology optimization method, using the finite element method (FEM). Finally, we provide some numerical examples to confirm the applicability of the optimization method for fluid mechanical design problems.

**Key Words:** Topology Optimization, Oseen Flow, Level Set Method

### 1. 緒言

流体を対象とした構造最適化問題の研究は, Pironneau に始まる<sup>(1)</sup>. この研究では, Stokes 流れにおいて目的関数を流体に作用する抗力の最小化と設定し, その形状感度を導出することにより最適形状を得る方法を提案している. その他にも, 粘性流体を対象とした構造最適化の方法は幾つか報告されている<sup>(2, 3, 4)</sup>. しかしながら, これらの方法は, 対象とする設計領域における物体と流体の境界を変動させることにより最適構造を得る, いわゆる形状最適化の方法で, 設計領域内に穴の創出を行うことは不可能であるため, 最適構造が初期構造に強く依存してしまう欠点をもつ.

この問題を解決する方法として, トポロジー最適化<sup>(5)</sup>が提案されている. トポロジー最適化の基本的な考え方は, 構造最適化問題の材料分布問題への置き換えにある. これにより, 最適化の過程において穴の創出などの形態の変化を可能としている. 近年, トポロジー最適化の流体問題への適用についても, 幾つか報告されている<sup>(6, 7, 8)</sup>. 例えば, Borrvall らは物体と流体の境界において流速が零になるように, 仮想的な外力を与えることによって, 物体と流体を区別し, Stokes 流れにおける流路構造のトポロジー最適化を行っている<sup>(6)</sup>.

しかしながら, 通常のトポロジー最適化では, 物体の有

無を示す特性関数を導入しているが, この特性関数は, 設計領域内において無限小の範囲で不連続点をもつ関数を許容する可能性をもち, その結果, 最適設計問題は不適切な問題 (ill-posed problem) となる. この問題を解決するため, 均質化法<sup>(5)</sup>や密度法<sup>(9)</sup>では, 設計空間の緩和により, 最適構造を連続な密度分布として表現する. これにより, 不連続性の問題は解決されるが, 最適構造の境界が明確ではないグレースケールを許容してしまう欠点を持つ.

他方, 新たな構造最適化の方法として, レベルセット法に基づく形状最適化が提案されている<sup>(10, 11)</sup>. この方法では, レベルセット関数と呼ばれるスカラー関数を用いて, 設計領域中の物体の有無をその符号で示し, 零等位面を境界として表現するため, グレースケールを含まない明瞭な境界が得られる利点がある. Challis らはレベルセット法を用いて, Stokes 流れにおける散逸エネルギー最小化問題の形状最適化を行っている<sup>(12)</sup>. この研究では流体領域のみを計算して最適解を得ており, 先行研究として報告されている他の手法を用いた結果とよく一致している. しかしながら, この研究では Stokes 方程式を扱っているため, 低 Reynolds 数の領域でのみ現実問題として有用性がある. より広範囲の Reynolds 数の流れ場を扱うためには Navier-Stokes 方程式を扱う必要があるが, 非線形である対流項を支配方程式中に

含むため、一般的に数値的な不安定性を克服する必要がある。Navier-Stokes 方程式におけるレベルセット法を用いた先行研究として、Zhou らが流路形状の最適化を行っている<sup>(13)</sup>。この研究では流体領域でのみ支配方程式を解くことで最適化を行っているが、最適解が初期形状に依存してしまう問題がある。また、これらの手法は形状最適化であるため、最適化の過程において形状形態の変更は許容されない。

本研究では、以上の問題点を解決するため、レベルセット法による形状表現を行いながら、境界移動と形態変化を可能にした Yamada らの手法<sup>(14)</sup>に基づき、Navier-Stokes 方程式の対流項を線形近似した Oseen 方程式におけるトポロジー最適化を提案する。Oseen 方程式には非線形項が含まれないため、安定して数値解を得ることができる。また、高 Reynolds 数の流れを扱う場合において、現実問題における流れ場を大域的に表現することができるため、対流項を含まない Stokes 方程式よりも有用性が高いといえる。以下 2 章では、レベルセット法の概略を述べ、レベルセット法を用いて表現された流体領域の解析方法を構築する。3 章では、レベルセット法に基づき、流路抵抗最小化を目的とした Oseen 流れのトポロジー最適化問題を定式化し、レベルセット関数の更新に必要な設計感度を、随伴変数法を用いて導出する。4 章では、最適化問題の定式化に基づき、有限要素法を用いた最適化アルゴリズムを提案する。最後に数値解析例を示し、本研究の妥当性と有用性の検証を行う。

## 2. レベルセット法に基づく Oseen 方程式

### 2.1. レベルセット法による形状表現

固定された設計領域  $D$ （以下、固定設計領域）において、流体により占められる領域  $\Omega$ （以下、流体領域）と、流体によって占められていない領域（以下、物体領域）、及びそれらの境界  $\partial\Omega$  の形状表現方法について考える。

レベルセット法では、スカラー関数であるレベルセット関数  $\phi(\mathbf{x})$  の零等位面により、境界  $\partial\Omega$  を表現する。

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{if } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (1)$$

すなわち、図 1 に示すように、レベルセット関数が正の値をとる領域は流体領域  $\Omega$ 、負の値をとる領域は物体領域、零等位面はそれらの境界  $\partial\Omega$  を表す。ここで、後述の正則化の手続きのために、レベルセット関数の上限値と下限値に制約を与えているが、零等位面以外のレベルセット関数値には任意性があるため、このような制約を与えても問題が生じない。

### 2.2. Oseen 方程式の拡張

次に、非圧縮性流れ場における Oseen 方程式の位置づけを明確化し、レベルセット法を用いて Oseen 方程式を流体領域  $\Omega$  から、固定設計領域  $D$  へ拡張する。

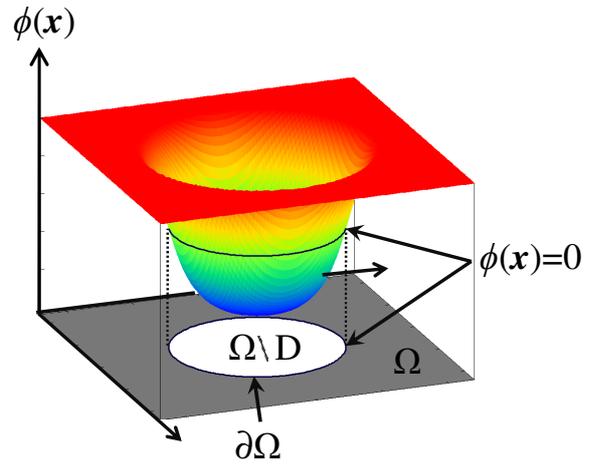


Fig. 1 Fixed design domain  $D$  and level set function  $\phi$

非圧縮性粘性流体の支配方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

ここで、すべての変数は流れ場の代表長さ  $L$  と代表流速  $\mathbf{U}$ 、及び流体の密度  $\rho$  を用いて無次元化されている。 $\mathbf{u}$  は流速、 $t$  は時間、 $\nabla$  は勾配演算子、 $p$  は圧力、 $\mathbf{F}$  は外力、 $Re := UL/\nu$  は Reynolds 数、 $\nu$  は流体の動粘度である。式 (2) は Navier-Stokes 方程式、式 (3) は連続の式である。高 Reynolds 数の流れの解析には、上式を解く必要がある。しかしながら、式 (2) は左辺第二項の対流項が非線形であるため、一般的に数値的な不安定性を克服する必要がある。このような問題を回避する方法として、対流項を線形近似した Oseen 近似がある：

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad (4)$$

なお、流速が時間に依存しない定常問題としているため、式 (2) の左辺第一項は消去している。さらに、Oseen 方程式 (4) の対流項を消去すれば、次に示す Stokes 方程式を得る。

$$0 = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F} \quad (5)$$

Stokes 方程式 (5) は Oseen 方程式 (4) よりも数値的な収束性が良好であり、Stokes 方程式を扱ったトポロジー最適化に関する研究はこれまでにいくつか報告されている。<sup>(1, 6, 12)</sup> しかしながら、現実問題における流れ場を考慮する場合、Stokes 方程式ではいくつかの問題点が生じる。まず、Stokes 方程式では無限遠方での流速は一様流速に等しいという境界条件を満たすことができない (Stokes' paradox)。すなわち、ある物体の周りを流体が通過した場合、無限遠方においても粘性の影響が消えることがない。また、円形の物体の周りを流体が通過する場合、その流線は流入側と流出側で左右対称となる。この性質は Stokes 式 (5) が流速  $\mathbf{u}$  の正負に関係なく同じ構造をすることから明らかであるが、現実問題の流れ場では流速の増加に伴い流線の非対称性が顕著に現れてくるため、Stokes 方程式の適用範囲は非常に狭い低 Reynolds 数

領域 ( $Re < 1$ ) に限られる。これに対し、Oseen 方程式 (4) では、対流項の影響により、Reynolds 数の増加に伴い双子渦の生成や渦の交互排出を確認することができる。現実問題の流れ場との適応性は Stokes 方程式の場合とそれほど変わらず低 Reynolds 数の領域 ( $Re < 2$ ) に限られるが、実際の流れの様子を大域的に表すことができる Oseen 方程式は、現実問題の流れ場を考慮する上で非常に有益であるといえる。そこで、本研究では、Oseen 方程式に基づき、非圧縮性流れ場に対するトポロジー最適化法を構築する。

次に、レベルセット法に基づき、Oseen 方程式を流体領域  $\Omega$  から、固定設計領域  $D$  に拡張する。ここでは、境界面において流速が零となるように、物体領域に仮想的な外力を与えることにより、物体領域を陰的に表現する方法<sup>(6)</sup>を用いる。すなわち、外力項を次式により定義することにより、境界  $\partial\Omega$  における非滑り境界条件を表現する。

$$\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{u} \quad (6)$$

ここで、 $\alpha$  は多孔質体の透過抵抗係数<sup>(15)</sup>であり、次式により定義する。

$$\alpha = (\underline{\alpha} - \bar{\alpha})\chi_{\Omega}(\phi) + \bar{\alpha} \quad (7)$$

$\underline{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha}$  はそれぞれ、流体領域の透過抵抗係数、物体領域の透過抵抗係数である。前者は 0、後者は外力項が、Oseen 方程式の他の項よりも十分に大きな値 (理想的には無限に大きい値) をとるように設定する必要がある。<sup>(6, 16)</sup> なお、物体領域の透過抵抗係数  $\bar{\alpha}$  は数値解析による予備検討の結果、 $10^4$  以上に設定すれば十分な近似結果が得られることを確認し、 $10^4$  に設定した。 $\chi_{\Omega}(\phi)$  は、流体領域とその境界において 1、物体領域において 0 の値をとる特性関数であり、レベルセット関数を用いて次のように定義される。

$$\chi_{\Omega}(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0 & \text{if } \phi(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (8)$$

また、Oseen 方程式の場合は、対流項に代表流速  $\mathbf{U}$  を含むため、代表流速  $\mathbf{U}$  についても、何らかの拡張が必要となる。本研究では、対流項が物体領域において零となるように、拡張代表流速  $\mathbf{U}_D(\chi_{\Omega})$  を導入し、代表流速  $\mathbf{U}$  をこれに置き換える：

$$\mathbf{U}_D(\chi_{\Omega}) := \mathbf{U}\chi_{\Omega} \quad (9)$$

したがって、固定設計領域  $D$  へ拡張された Oseen 方程式は次式となる。

$$(\mathbf{U}_D \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\nabla^2\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u} \quad \text{in } D \quad (10)$$

本研究では、上式を用いて流れ場の解析を行うことにより、最適化の過程におけるメッシュの再生成を不要とする。

### 3. トポロジー最適化

#### 3.1. 流路抵抗最小化問題

流路抵抗は、流体の散逸エネルギーと抵抗力により生じるエネルギーの和で表現されるため、流路抵抗最小化問題は次

のように定式化される<sup>(7)</sup>。

$$\inf_{\phi} J = \frac{1}{2Re} \int_D (\nabla\mathbf{u}^T) \cdot (\nabla\mathbf{u}^T) - \int_D \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} \quad (11)$$

$$\text{subject to } G = \int_D \chi_{\Omega} - G_{\max} \leq 0 \quad (12)$$

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \chi_{\Omega}) = 0 \quad (13)$$

$$B(\mathbf{u}, q) = 0 \quad (14)$$

ここで、 $G_{\max}$  は許容される流体領域の大きさの上限値であり、式 (13) と式 (14) は拡張された Oseen 方程式の弱形式を表し、 $A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \chi_{\Omega})$  と  $B(\mathbf{u}, q)$  は次式により定義される。

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \chi_{\Omega}) = \int_D (\mathbf{U}_D(\chi_{\Omega}) \cdot \nabla)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int_D p\nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{Re} \int_D (\nabla\mathbf{u}^T) \cdot (\nabla\mathbf{v}^T) + \int_D \alpha(\chi_{\Omega})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (15)$$

$$B(\mathbf{u}, q) = \int_D q\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (16)$$

次に、最適化問題の正則化を行う。本研究では、目的汎関数を目的汎関数と正則化項の和へと置き換えることにより、最適化問題を正則化する方法<sup>(14)</sup>を用いる。すなわち、正則化項を  $R_{\tau}$  とすれば、正則化された目的汎関数  $J_R$  は次式により定義される：

$$J_R := J(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \chi_{\Omega}) + R_{\tau}(\phi) \quad (17)$$

ここで、正則化項  $R_{\tau}(\phi)$  は、正則化係数  $\tau > 0$  を用いて、次式により定義される：

$$R_{\tau}(\phi) = \frac{1}{2}\tau \int_D |\nabla\phi|^2 \quad (18)$$

したがって、正則化されたトポロジー最適化問題は次のようになる。

$$\inf_{\phi} J_R = J(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \chi_{\Omega}) + R_{\tau}(\phi) \quad (19)$$

$$\text{subject to } G \leq 0 \quad (20)$$

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \chi_{\Omega}) = 0 \quad (21)$$

$$B(\mathbf{u}, q) = 0 \quad (22)$$

#### 3.2. 最適化法

上述のトポロジー最適化問題に関する Karush-Kuhn-Tucker(KKT) 条件は次式で与えられる。

$$\delta\bar{J}_R = 0 \quad \lambda G = 0 \quad \lambda \geq 0 \quad G \leq 0 \quad (23)$$

ここで  $\lambda$  はラグランジェ未定乗数、 $\bar{J}_R$  は式 (19)、式 (20) を無制約問題に置き換えた場合のラグランジェアンであり、次式により定義される。

$$\begin{aligned} \bar{J}_R &= J(\mathbf{u}, \chi_{\Omega}) + A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, \chi_{\Omega}) + B(\mathbf{u}, q) \\ &\quad + \lambda G(\chi_{\Omega}) + R_{\tau}(\phi) \\ &= \bar{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{p}, q, \chi_{\Omega}) + R_{\tau}(\phi) \end{aligned} \quad (24)$$

KKT 条件を満たす  $\phi$  が最適解の候補であるが、直接得るのは困難である。そこで本研究では、適当な初期値を与え、仮想時間  $t_v$  を導入することにより、最適化問題をレベルセット関数  $\phi$  に関する以下の時間発展問題に置き換える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_v} = -K(\phi) \bar{J}'_R \quad (25)$$

ここで、 $K(\phi) > 0$  は比例定数であり、時間発展の駆動力が式 (24) のラグランジュアン  $\bar{J}'_R$  の、レベルセット関数  $\phi$  に関する勾配に比例すると仮定している。なお、先行研究<sup>(14)</sup>と同様に、 $\bar{J}'_R$  としてトポロジカルデリバティブを考える。境界条件として、予め流体領域として指定する境界にはディリクレ境界を与え、その他の境界には固定設計領域の外部からの干渉がないことを表現するためにノイマン境界条件を与える。以上より、次式に示す反応拡散方程式を得る。

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t_v} = -K(\phi) (\bar{J}' - \tau \nabla^2 \phi) \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial D \setminus \partial D_N \\ \phi = 1 & \text{on } \partial D_N \end{cases} \quad (26)$$

ここで、 $\partial D_N$  は非設計領域境界であり、固定設計領域境界  $\partial D$  における流入口、及び流出口の境界である。また、式 (26) の下二式はそれぞれノイマン境界とディリクレ境界条件を表す。式 (26) より、最適構造を表すレベルセット関数  $\phi$  を求める。

### 3.3. 感度解析

次に、レベルセット関数の時間発展方程式の更新に必要なラグランジュアン  $J$  の設計感度を随伴変数法を用いて導出する。

$$\begin{aligned} \bar{J}' &= J(\mathbf{u}', \chi_\Omega) + J(\mathbf{u}, \chi'_\Omega) \\ &+ A(\mathbf{u}', \mathbf{v}, p, \chi_\Omega) + A(\mathbf{u}, \mathbf{v}', p, \chi_\Omega) \\ &+ A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, p', \chi_\Omega) + A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, p, \chi'_\Omega) \\ &+ B(\mathbf{u}', q) + B(\mathbf{u}, q') + \lambda G(\chi'_\Omega) \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、随伴変数  $\mathbf{v}$ ,  $q$  に対する勾配に関する項については、Oseen 方程式により、次の関係が任意の随伴変数に対して成り立つ。

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}', p, \chi_\Omega) = 0 \quad (28)$$

$$B(\mathbf{u}, q') = 0 \quad (29)$$

次に、状態変数  $\mathbf{u}$ ,  $p$  に対する勾配に関する項が相殺されるように、随伴変数  $\mathbf{v}$ ,  $q$  を次式により定義する：

$$J(\mathbf{u}', \chi_\Omega) + A(\mathbf{u}', \mathbf{v}, p, \chi_\Omega) + B(\mathbf{u}', q) = 0 \quad (30)$$

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, p', \chi_\Omega) = 0 \quad (31)$$

式 (30) の各項において、 $\mathbf{u}$  に対する勾配を求めることで以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + 2\alpha(\chi_\Omega) \mathbf{u} + (\mathbf{U}_D(\chi_\Omega) \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \alpha(\chi_\Omega) \mathbf{v} - \nabla q = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

すなわち、次式により随伴変数  $\mathbf{v}$ ,  $q$  を求めることにする。

$$\frac{1}{Re} (\nabla^2 \mathbf{u} - \nabla^2 \mathbf{v}) + \alpha(\chi_\Omega) (2\mathbf{u} + \mathbf{v}) \quad (33)$$

$$+ (\mathbf{U}_D(\chi_\Omega) \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla q = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (34)$$

従って、ラグランジュアンの感度は式 (7)、及び式 (9) の  $\chi_\Omega$  に対する勾配から次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{J}' &= J(\mathbf{u}, \chi'_\Omega) + A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, p, \chi'_\Omega) + \lambda G(\chi'_\Omega) \\ &= (\underline{\alpha} - \bar{\alpha}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + (\underline{\alpha} - \bar{\alpha}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \lambda \end{aligned} \quad (35)$$

以上の結果から、レベルセット関数の更新に関する時間発展方程式は次式となる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_v} = -K(\phi) \left( (\underline{\alpha} - \bar{\alpha}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \lambda - \tau \nabla^2 \phi \right) \quad (36)$$

## 4. 最適化アルゴリズム

図 2 に本研究の最適化過程のフローチャートを示す。まず、適当な初期構造を与えるために、レベルセット関数の初期値を設定する。次に、状態方程式及び随伴方程式を FEM を用いて解く。続いて、目的汎関数及び感度を計算する。ここで、目的汎関数が収束した場合は計算を終了し、そうでない場合は、レベルセット関数の更新を式 (26) により行い、感度の再計算を行う。以後目的汎関数が収束するまでこれらの操作を繰り返し行う。

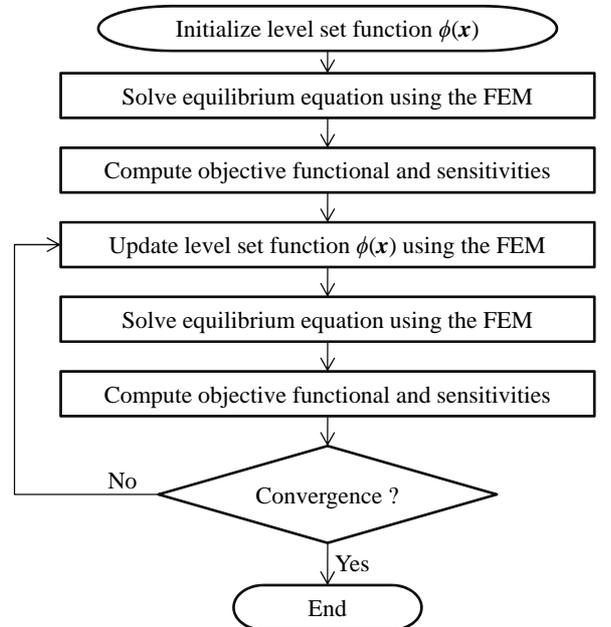


Fig. 2 Flowchart of optimization procedure

## 5. 数値解析例

数値解析例により、本研究で提案する手法の妥当性と有効性の検証を行う。設計問題は、図 3 に示す二管問題とする。

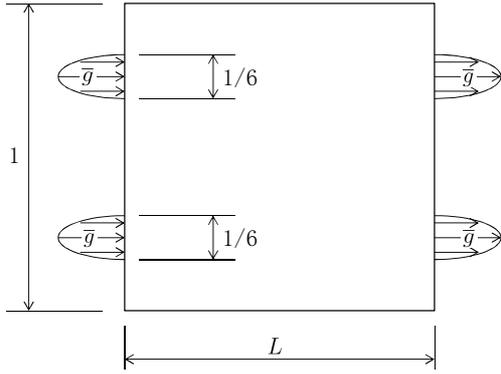


Fig. 3 Design domain for the double pipe problem

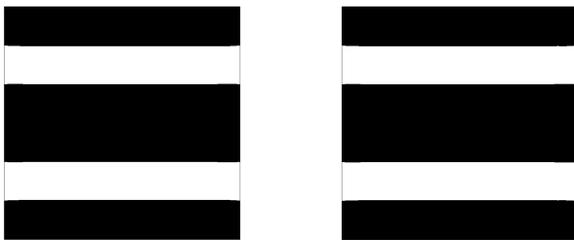
流入口、及び流出口における規定流速  $g_n$  は、次式により定義する.

$$g_n = \bar{g} \left( 1 - \left( \frac{2s}{w} \right)^2 \right) \quad -\frac{w}{2} \leq s \leq \frac{w}{2} \quad (37)$$

ここで、 $\bar{g}$  は規定流速  $g_n$  の中心最大流速であり、拡張代表速度  $U_D = \bar{g}$  とする. また  $w$  は流入口及び流出口における各々の幅、 $s$  は  $g_n$  の位置変数である. 設定パラメータは、 $\mu = 1$ ,  $\nu = 1$ ,  $\tau = 10^{-3}$ ,  $K(\phi) = 1$ ,  $G_{\max} = 1/3$ , 仮想時間  $t_v$  の更新ステップ幅を  $\Delta t_v = 0.5$  とし、 $t_v$  での目的汎関数を  $J_{t_v}$  とすると、 $|(J_{t_v+\Delta t_v} - J_{t_v})/J_{t_v}| < 10^{-4}$  を満たすまで式 (26) に基づき繰り返しレベルセット関数の更新を行う. なお、FEM で平衡方程式を解く際の有限要素は、流速  $\mathbf{u}$ 、随伴変数  $\mathbf{v}$  に対してはアイソパラメトリック四角形二次要素、圧力  $p$ 、随伴変数  $q$ 、及びレベルセット関数  $\phi$  に対してはアイソパラメトリック四辺形双一次要素を用いる. 設計領域境界に対しては非滑り境界条件を与える. また、レベルセット関数の初期値を  $\phi = 1$  とすることにより、初期構造はすべて流体で満たされている状態を設定する.

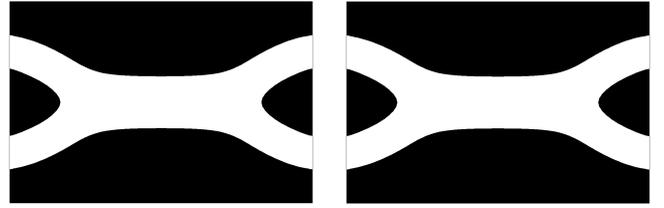
### 5.1. 固定設計領域の長さ $L = 1$ の場合

最初に、代表長さである固定設計領域の長さ  $L$  を  $L = 1$  に設定した場合について考える. ここでは、固定設計領域  $D$  は、 $48 \times 48$  の構造格子を用いて要素分割を行う. また、



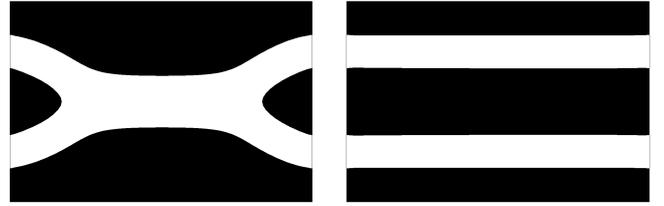
(a) Stokes flow (b) Oseen flow

Fig. 4 Optimal configurations,  $L = 1$



(a)  $\bar{g} = 1$  (b)  $\bar{g} = 200$

Fig. 5 Optimal configurations in Stokes flow,  $L = 1.5$



(a)  $\bar{g} = 1$  (b)  $\bar{g} = 200$

Fig. 6 Optimal configurations in Oseen flow,  $L = 1.5$

式 (37) における中心最大流速を  $\bar{g} = 1$  と設定することにより、低 Reynolds 数 ( $Re = 1$ ) の場合について考える. 図 4 に、Stokes 方程式及び Oseen 方程式により得られた最適構造を示す. 図に示すように、いずれの場合においても、流入口と流出口をそれぞれ直線で繋いだ最適構造となった. 得られた最適構造は、先行研究により報告されている Stokes 流れを扱った場合の結果と良く一致しており、本研究の正当性を確認することができる<sup>(6, 12)</sup>. また、Reynolds 数が低い場合において、Oseen 方程式と Stokes 方程式により得られる最適構造がほぼ同一であることもわかった.

### 5.2. 固定設計領域の長さ $L = 1.5$ の場合

次に、代表長さである固定設計領域の長さ  $L$  を  $L = 1.5$  に設定した場合について考える. ここでは、固定設計領域を  $48 \times 72$  の構造格子を用いて要素分割を行う. また、Case (a):  $\bar{g} = 1$  と Case (b):  $\bar{g} = 200$  の 2 つの条件を設定し、Reynolds 数を変化させて最適構造の変化を調べる. ここで、Stokes 方程式、及び Oseen 方程式では、Case (b) の Reynolds 数に対する現実的な流れとの整合性は保証されないが、本研究の主眼は、Reynolds 数の変化に伴う最適構造の変化を考慮可能な方法論の構築であるため、上記 Case (b) を設定し、Case (a) との最適構造の比較を行う. 図 5 に Stokes 方程式により得られた最適構造、図 6 に Oseen 方程式により得られた最適構造を示す. Stokes 流れの場合について得られた最適構造は、前節と同様に、先行研究により報告されている Stokes 流れを扱った場合の結果と良く一致しており、本研究の妥当性を確認することができる<sup>(6, 12)</sup>. また、両者を比較すると、Stokes 方程式では、流入出口の流速を変化させた場合、すなわち

Reynolds 数を変化させても、最適構造にほとんど変化がないことに対して、Oseen 方程式を用いた場合には、Reynolds 数の変化によって、最適構造が変化していることを確認できる。すなわち、Oseen 方程式を用いることにより、Reynolds 数の変化を考慮した最適構造が得られることがわかった。なお、図 6 の各流路構造における目的汎関数  $J$  の値は、 $\bar{g} = 1$  では (a)69.4 < (b)75.3,  $\bar{g} = 200$  では (a) $5.1 \times 10^6$  > (b) $1.8 \times 10^6$  となり、図 6 の各構造は、各条件に対応した最適構造である。

## 6. 結言

本研究ではレベルセット法による形状表現に基づき、Oseen 流れのトポロジー最適化法を提案した。本研究により得られた結果を以下に示す。

- (1) レベルセット法による形状表現に基づき、Oseen 方程式を流体領域から固定設計領域へ拡張して解析する方法を提案した。
- (2) 流路抵抗最小化を目的とした Oseen 流れ場のトポロジー最適化問題の定式化を行った。この最適化問題の定式化に基づき、レベルセット関数の更新に必要な設計感度を随伴変数法を用いて導出を行った。
- (3) 定式化に基づき、有限要素法を用いたトポロジー最適化アルゴリズムを構築した。
- (4) 数値解析例により、本研究で提案する手法の妥当性と有効性の検証を行った。その結果、低 Reynolds 数 ( $Re = 1$ ) では、Stokes 流れに対する先行研究の結果と一致し、本手法が妥当であることがわかった。また、Reynolds 数の変化によって異なる最適構造が得られ、対流項の影響を考慮できることがわかった。

## 7. 謝辞

本研究は科学研究費補助金の基盤研究 (B)22360041 の助成を受けたものである。この支援に深く謝意を表す。

## 参考文献

- (1) O. Pironneau. On optimum profiles in Stokes flow. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 59, pp. 117–128, 1973.
- (2) O. Pironneau. On optimum design in fluid mechanics. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 64, pp. 97–110, 1974.
- (3) IEEE, Control Systems Society. *Issues in Shape Optimization for the Navier-Stokes Equations*, Vol. 1-4, 1992.
- (4) E. Katamine and H. Azegami. Solution to Viscous Flow Field Domain Optimization Problems (Approach by the Traction Method). *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 60, No. 579, pp. 3859–3866, 1994.
- (5) M. P. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, No. 2, pp. 197–224, 1988.
- (6) T. Borrvall and J. Petersson. Topology optimization of fluids in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 41, pp. 77–107, 2003.
- (7) L. H. Olesen, F. Okkels, and H. Bruus. A high-level programming-language implementation of topology optimization applied to steady-state Navier-Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 65, No. 7, pp. 975–1001, 2005.
- (8) J.K. Guest and J.H. Prévost. Topology optimization of creeping fluid flows using a Darcy-Stokes finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 66, No. 3, pp. 461–484, 2006.
- (9) R. J. Yang and C. H. Chuang. Optimal Topology Design Using Linear Programming. *Computers and Structures*, Vol. 52, No. 2, pp. 265–275, 1994.
- (10) M. Y. Wang, X. Wang, and D. Guo. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 1-2, pp. 227–246, 2003.
- (11) G. Allaire, F. Jouve, and A. M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, pp. 363–393, 2004.
- (12) V. J. Challis and J. K. Guest. Level set topology optimization of fluids in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 79, pp. 1284–1308, 2009.
- (13) S. Zhou and Q. Li. A variational level set method for the topology optimization of steady-state Navier-Stokes flow. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 24, pp. 10178–10195, 2008.
- (14) T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki, and A. Takezawa. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 45-48, pp. 2876–2891, 2010.
- (15) E. Sanchez-Palencia. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*. Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 1980.
- (16) T. Kondoh, T. Matsumori, and A. Kawamoto. Numerical Investigation on Optimum Body Shape in Low Reynolds Number Flow. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*, Vol. 76, No. 768, pp. 1152–1161, 2010.