

# 2次元 Helmholtz 方程式の 1 周期 transmission 問題における境界積分方程式の定式化について

## Boundary integral formulations for one-periodic transmission problems for Helmholtz' equation in 2-D

三澤 亮太<sup>1)</sup>, 西村 直志<sup>2)</sup>

Ryota MISAWA, Naoshi NISHIMURA

1) 京都大学情報学研究科複雑系科学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, misawa@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

2) 京都大学情報学研究科複雑系科学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, nchml@i.kyoto-u.ac.jp)

We have been investigating applications of FMM accelerated BIEMs to periodic wave scattering problems (periodic FMM). In this paper, we investigated the PMCHWT and the Müller formulations for these problems. We have made several numerical experiments to investigate the performances of FMM based on each formulation. We found that, the Müller formulations can be faster than the PMCHWT formulations, but the Müller formulations may result in ill-conditioned linear integral equations under certain conditions.

**Key Words:** BIEM, FMM, periodic boundary value problem, PMCHWT formulations, Müller formulations

### 1. 研究背景・目的

2次元 Helmholtz 方程式の 1 周期 transmission 問題を解くことは, 周期構造を持つ材料による波動散乱問題への応用上重要である. 周期境界値問題においては, アノマリと呼ばれる現象が知られており, 特にガイド波が発生する場合は解の一意性が無くなる<sup>(1)</sup>. アノマリ周辺では, 得られる線型方程式の反復解の収束速度や解の精度が悪化する恐れがある. そこで, アノマリ周辺も含めた至る所で, 高速かつ精度の安定した数値解法が望まれる.

本稿では, 周期問題の高速解法である周期多重極境界要素法<sup>(2)</sup>を用いて 1 周期 transmission 問題を解くことを考える. 境界要素法では, 境界積分方程式を離散化して線型方程式に帰着させて, これを数値的に解く. 特に, 高速多重極法を用いる場合は GMRES 法 (Generalized minimal residual method)<sup>(3)</sup>などの反復解法を用いて解くのが普通である.

Transmission 問題の境界積分方程式の定式化としてよく用いられるのは PMCHWT 定式化 (Poggio - Miller - Chang - Harrington - Wu - Tsai formulation) である. これは, ガイド波が生じない場合に解の一意性が保証されている定式化である. また, 積分方程式に現れる作用素の並び替えにより収束速度を速くできることが知られている<sup>(4)</sup>. これは, 境界積分方程式を並べてできる作用素の行列の二乗が, Calderon

の式により, 恒等作用素の定数倍とコンパクト作用素の和になることを基としている. 一方で, 解の一意性が保証された別の定式化として Müller の定式化を考えることができる. これは 2 種の Fredholm 方程式として境界積分方程式を定式化する手法であり, 作用素の固有値は 1 点に集積し, 反復解法において収束速度が速くなることが期待できる.

本稿では, PMCHWT 定式化 (特に Calderon の式に基づく作用素の並び替えをしたもの) と Müller の定式化に基づく境界要素法を用いて 1 周期 transmission 問題を解く. また, 各定式化の反復解法における収束性や, 数値解の比較に基づき, 各定式化の性質を考察する.

### 2. 1 周期 transmission 問題の境界積分方程式の定式化

Fig.1 のように  $D = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}$  を考える.  $x_1$  方向に周期的な領域を考え,  $D$  をその周期単位とする.  $D$  は互いに交わらない  $D_1, D_2$  からなる. このうち,  $D_2$  は有界領域とし,  $D_1 = D \setminus \overline{D_2}$  とする. 各領域は誘電率  $\epsilon_i$ , 透磁率 1 の物質で満たされている. 2次元 Helmholtz 方程式の 1 周期 transmission 問題は, 各領域  $D_i$  で 2次元 Helmholtz 方程式

$$(\Delta + k_i^2)u = 0 \quad (1)$$

を満たす解  $u$  を  $\Gamma = \partial D_1 \cap \partial D_2$  における境界条件

$$u_1 = u_2 (= u) \quad (2)$$

$$\frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} (= q) \quad (3)$$

周期境界条件

$$u\left(\frac{1}{2}, x_2\right) = e^{i\beta} u\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2}, x_2\right) = e^{i\beta} \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) \quad (5)$$

および,  $D_1$  における散乱波  $u_s = u - u_I$  に対する放射条件のもとで求める問題である. ここに,  $u_i$  は  $D_i$  の側からの  $\Gamma$  への極限值,  $k_i = \omega\sqrt{\epsilon_i}$  は波数,  $\omega$  は角振動数 (以下  $2\pi$  で固定),  $u_I$  は入射波,  $\beta (\in \mathbb{R})$  は位相差である. また,  $\Gamma$  上の単位法線ベクトル  $n$  の向きは  $D_1$  方向を正と定めておく.

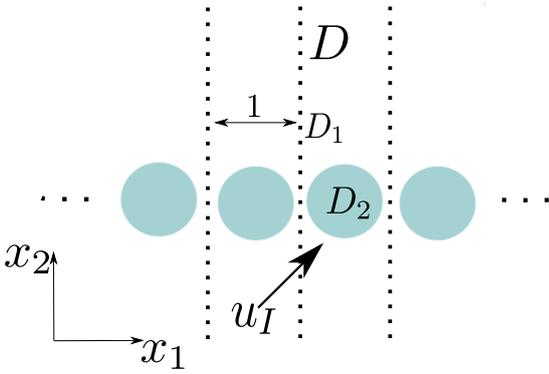


Fig. 1  $x_1$  方向に周期性をもつ領域

以上の周期境界値問題に対応する PMCHWT 定式化の境界積分方程式は以下のようにかける.

$$\begin{pmatrix} -(D_1 + D_2) & \epsilon_1 S_1 + \epsilon_2 S_2 \\ -(\mathcal{N}_1/\epsilon_1 + \mathcal{N}_2/\epsilon_2) & D_1^T + D_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_I \\ \frac{1}{\epsilon_1} \frac{\partial u_I}{\partial n} \end{pmatrix} \quad (6)$$

ここに,

$$S_i q(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G_i(\mathbf{x} - \mathbf{y}) q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (7)$$

$$D_i u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_i(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (8)$$

$$D_i^T q(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G_i(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{x}}} q(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (9)$$

$$\mathcal{N}_i u(\mathbf{x}) = \text{p.f.} \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G_i(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{x}} \partial n_{\mathbf{y}}} u(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad (10)$$

であり  $G_2$  は波数  $k_2$  の 2 次元 Helmholtz 方程式の基本解,  $G_1$  は波数  $k_1$  の, 周期境界条件を満たす Green 関数である. 積分方程式 (6) は PMCHWT 定式化と呼ばれる transmission 問題に対する定式化である. Calderon の式により係数行列を 2 乗したものは恒等作用素の定数倍にコンパクト作用素を加えたものとなり, 反復解法で解く際に速く解に収束するこ

とが知られている<sup>(4)</sup>. 本論文では式 (6) を “Calderon の定式化” と呼ぶことにする.

同じ transmission 問題を 2 種 Fredholm 方程式として定式化する Müller の定式化は以下のようにかける.

$$\left( \mathcal{I} + \begin{pmatrix} \frac{2}{b-a}(aD_1 + bD_2) & -\frac{2}{b-a}(a\epsilon_1 S_1 + b\epsilon_2 S_2) \\ -\frac{2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}(\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) & \frac{2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}(\epsilon_1 D_1^T - \epsilon_2 D_2^T) \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2a}{b-a} u_I \\ \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{\partial u_I}{\partial n} \end{pmatrix} \quad (11)$$

実際, 作用素  $S_i, D_i, D_i^T$  はコンパクト作用素であり, また  $\mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2$  はコンパクト作用素となることを示すことができるので, 式 (11) は 2 種の Fredholm 方程式となる. したがって, 左辺の作用素の行列の固有値の集積点は 1 点のみとなり, 式 (11) を離散化して得る線型方程式は反復解法において速く解に収束することが期待される. なお, 係数  $a, b \in \mathbb{C}$  は  $a \neq b$  かつ非零である限り任意であるが, ここでは

- $(a, b) = (-1/\epsilon_1, 1/\epsilon_2)$
- $(a, b) = (-1, 1)$
- $(a, b) = (-\epsilon_1, \epsilon_2)$

を考え, 順に “Müller の定式化 1” から “Müller の定式化 3” と名づける. Müller の定式化 1 と 2 はそれぞれ  $S, D$  の特異性の打ち消しを考慮した式である.  $\mathcal{N}$  の特異性の打ち消しのみでなく,  $S$  や  $D$  の特異性の打ち消しまで行くと, 離散化後も元の作用素のコンパクト性の効果が顕著になると期待できる. Müller の定式化 3 の根拠については後述する. 以上の積分方程式は, 元の境界値問題が解の一意性を持つとき, 解が一意に求まる.

### 3. 数値計算例と考察

#### 3.1. 離散化

本研究では基底関数に区分一定基底を用い, 選点法により自由度 2000 で各定式化で得られる積分方程式の離散化を行った. 離散化線型方程式のソルバに GMRES を用いた. その際に現れる行列ベクトル積の計算には周期高速多重極法を用いる. 周期高速多重極境界要素法では, 積分のうち, 遠方からの影響の評価を効率よくまとめて計算する. 周期高速多重極法については Otani and Nishimura<sup>(2)</sup> を参照されたい.

#### 3.2. 反復回数と精度

Fig.1 において周期単位が  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}$ , 有界領域  $D_2$  が中心  $(0, 0)$  で半径 0.3 の円の場合を考え, 入射波  $u_I$  は  $\exp(i(\beta x_1 - \sqrt{k_1^2 - \beta^2} x_2))$  とした場合の数値計算結果を示す. 周期境界条件の位相差は  $\beta = k_1 \sin 1$  である.  $D_2$  の誘電率は  $\epsilon_2 = 5$  と固定し,  $\epsilon_1$  を様々に変化させたとき GMRES の反復回数および離散化方程式の解の比較を行った. ただし, GMRES の許容誤差は  $1.0 \times 10^{-6}$  とした. GMRES の収束回数を示した Fig.2 を見ると, Müller の定式化の 1, 2 は Calderon の定式化よりも速く収束していることが分かる. Fig.3 は, Calderon

の定式化の解ベクトルを基準として各定式化で得られる相対誤差 ( $l^1$  誤差) を示したものである。ここで、 $\epsilon_1 > \epsilon_2 (= 5)$  の範囲に注目すると、相対誤差は多くの  $\epsilon_1$  では 1% 以下だが、いくつかの点では数%に達していることがわかる。

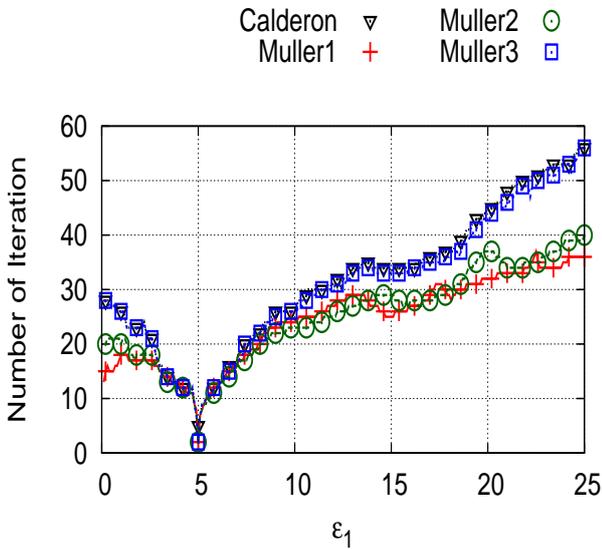


Fig. 2 GMRES の反復回数の比較

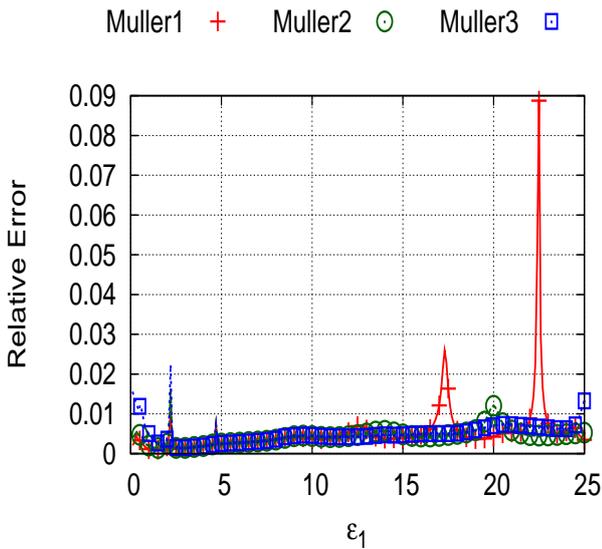


Fig. 3 離散化方程式の解ベクトルの Calderon の定式化による解を基準とした相対誤差

### 3.3. 精度の悪化の考察

以下、Fig.3 で示された精度の悪化の理由を考察する。先の相対誤差の誤差計算においては、周期境界値問題に対する解析解を求めることは困難であるため、Calderon の定式化による解を基準とした相対誤差を比較した。 $\epsilon_1 > \epsilon_2$  の条件の下では周期問題においても解の一意性が保証されるため<sup>(1)</sup>この現象は周期性に起因するものではないと考えられる。そこで、散乱体が単に 1 つの円である (周期境界値問題でない) 境界値問題を解き、解析解と比較した (Fig.4)。Fig.4 により、解析解との相対誤差が大きくなっているのは Müller の定式化であり、Calderon の定式化では解が正しく求まっているこ

とが分かる。また、Müller の定式化 1 の相対誤差が大きくなっている  $\epsilon_1 = 22.5$  における離散化係数行列 ( $2000 \times 2000$ ) の固有値には、絶対値が非常に小さい (しかし非零の) ものが現れている (Fig.5, 丸印)。そのため、悪条件問題となり解の精度が悪化したと考えられる。

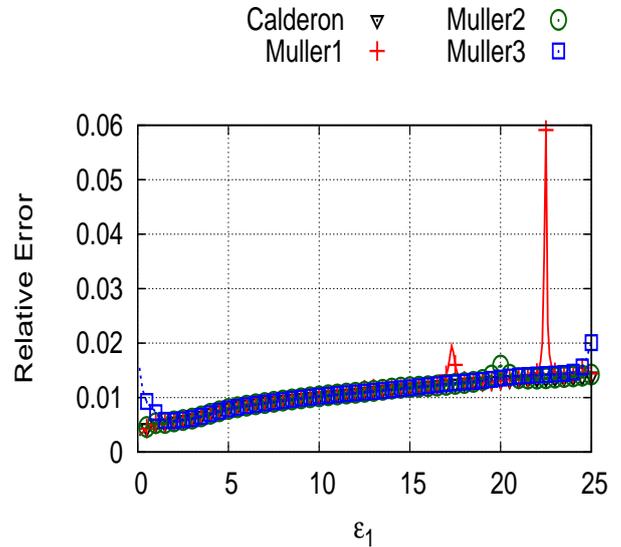


Fig. 4 通常の境界値問題に対する各定式化の解ベクトルの解析解を基準とした相対誤差

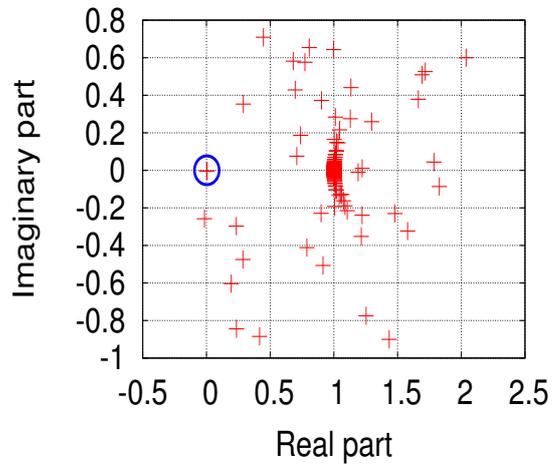


Fig. 5 Müller の定式化 1 の誤差が大きい点 ( $\epsilon = 22.5$ ) における離散化行列の固有値の分布

小さな固有値が現れる原因は次のように考察できる。簡単のため、散乱体が単に 1 つの円である通常の境界値問題を考える。この場合、解の Fourier 級数展開を考えることができる。解  $u, q$  を

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_m u_m e^{im\theta} \quad (12)$$

$$q(\boldsymbol{x}) = \sum_m q_m e^{im\theta} \quad (13)$$

と円周方向に Fourier 級数展開すると、境界が半径  $r$  の円である場合の層ポテンシャルは以下のようにかける。

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} G_1(\mathbf{x} - \mathbf{y})q(\mathbf{y}) d\Gamma &= \sum_m \frac{i\pi r}{2} H_m^{(1)}(k_1 r) J_m(k_1 r) q_m e^{im\theta} \\
\int_{\Gamma} G_2(\mathbf{x} - \mathbf{y})q(\mathbf{y}) d\Gamma &= \sum_m \frac{i\pi r}{2} H_m^{(1)}(k_2 r) J_m(k_2 r) q_m e^{im\theta} \\
\int_{\Gamma} \frac{\partial G_1}{\partial n_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\Gamma &= \sum_m \frac{i\pi r k_1}{2} H_m^{(1)}(k_1 r) J_m(k_1 r) u_m e^{im\theta} \\
\int_{\Gamma} \frac{\partial G_2}{\partial n_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\Gamma &= \sum_m \frac{i\pi r k_2}{2} H_m^{(1)}(k_2 r) J_m(k_2 r) u_m e^{im\theta} \\
\int_{\Gamma} \frac{\partial G_1}{\partial n_x}(\mathbf{x} - \mathbf{y})q(\mathbf{y}) d\Gamma &= \sum_m \frac{i\pi r k_1}{2} H_m^{(1)}(k_1 r) J'_m(k_1 r) q_m e^{im\theta} \\
\int_{\Gamma} \frac{\partial G_2}{\partial n_x}(\mathbf{x} - \mathbf{y})q(\mathbf{y}) d\Gamma &= \sum_m \frac{i\pi r k_2}{2} H_m^{(1)}(k_2 r) J'_m(k_2 r) q_m e^{im\theta} \\
\int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G_1}{\partial n_x \partial n_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\Gamma &= \sum_m \frac{i\pi r k_1^2}{2} H_m^{(1)}(k_1 r) J'_m(k_1 r) u_m e^{im\theta} \\
\int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G_2}{\partial n_x \partial n_y}(\mathbf{x} - \mathbf{y})u(\mathbf{y}) d\Gamma &= \sum_m \frac{i\pi r k_2^2}{2} H_m^{(1)}(k_2 r) J'_m(k_2 r) u_m e^{im\theta}
\end{aligned}$$

ここに、 $G_i$  は領域  $i$  の Green 関数であり、 $H_m^{(1)}$ 、 $J_m$  はそれぞれ  $m$  次の第 1 種 Hankel 関数と Bessel 関数を表す。 $G_i$  に関する積分は、領域  $i$  の補領域から境界上への極限移行の意味でとられていることに注意されたい。以下のように係数を定める。

$$\begin{aligned}
s_1^{(m)} &= \frac{\pi i r}{2} H_m^{(1)}(k_1 r) J_m(k_1 r) \\
s_2^{(m)} &= \frac{\pi i r}{2} H_m^{(1)}(k_2 r) J_m(k_2 r) \\
d_1^{(m)} &= \frac{\pi i r k_1}{2} H_m^{(1)}(k_1 r) J_m(k_1 r) \\
d_2^{(m)} &= \frac{\pi i r k_2}{2} H_m^{(1)}(k_2 r) J'_m(k_2 r) \\
d_1^{t(m)} &= \frac{\pi i r k_1}{2} H_m^{(1)}(k_1 r) J'_m(k_1 r) \\
d_2^{t(m)} &= \frac{\pi i r k_2}{2} H_m^{(1)}(k_2 r) J_m(k_2 r) \\
n_1^{(m)} &= \frac{\pi i r k_1^2}{2} H_m^{(1)}(k_1 r) J'_m(k_1 r) \\
n_2^{(m)} &= \frac{\pi i r k_2^2}{2} H_m^{(1)}(k_2 r) J'_m(k_2 r)
\end{aligned}$$

この記号を用いて先述のポテンシャルの式を書き直し、式 (11) に代入する。すると、積分方程式は  $m$  次の Fourier 係数に対して、 $2 \times 2$  線型方程式を解くことに帰着され、その係数行列は以下のように表される。

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{b-a}(ad_1^{(m)} + bd_2^{(m)}) & -\frac{2}{b-a}(ae_1 s_1^{(m)} + be_2 s_2^{(m)}) \\ \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}(-n_1^{(m)} + n_2^{(m)}) & \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}(\epsilon_1 d_1^{t(m)} - \epsilon_2 d_2^{t(m)}) \end{pmatrix} \quad (14)$$

Calderon の定式化の場合の行列も同様に以下のようにかける。

$$\begin{pmatrix} -(d_1^{(m)} + d_2^{(m)}) & \epsilon_1 s_1^{(m)} + \epsilon_2 s_2^{(m)} \\ -(n_1^{(m)}/\epsilon_1 + n_2^{(m)}/\epsilon_2) & d_1^{t(m)} + d_2^{t(m)} \end{pmatrix} \quad (15)$$

ところで、ある次数の Fourier 係数に関して悪条件な線型方程式が得られるならば、元の問題も悪条件になると考えられ

る。実際、 $\epsilon_1$  に対する

$$\max_{0 \leq m \leq 10} |\text{行列 (14) の最大固有値} / \text{行列 (14) の最小固有値}| \quad (16)$$

の分布 (Fig.6) と、解の相対誤差 (Fig.3, Fig.4) は同様の傾向を示していることが分かる。

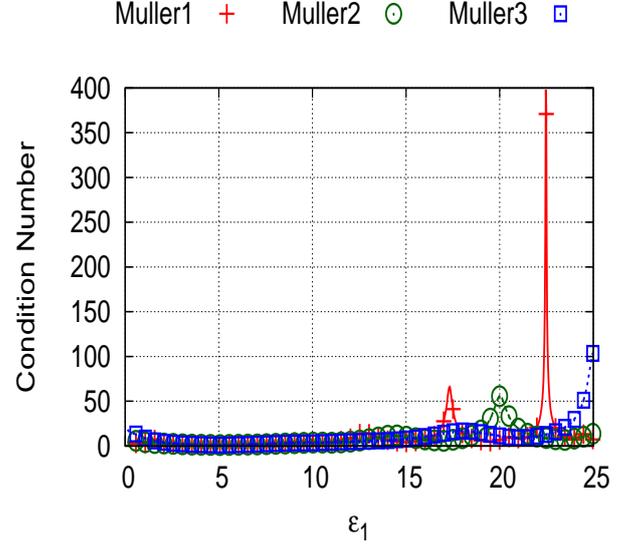


Fig.6 Fourier 係数に対する  $2 \times 2$  係数行列の固有値の比

なお、式 (15) の trace, すなわち固有値の和は 0 となることが Lommel の公式を用いて容易に確かめられる。すなわち、Calderon の定式化の式 (15) の 2 つの固有値は  $\pm \alpha$  という形で得られるため、もし行列式の大きさが小さくても 2 つの固有値の大きさは  $\sqrt{|\text{行列式}|}$  である。一方、Müller の定式化 (14) の trace(固有値の和) は

$$2 + \left( \frac{2a}{b-a} + \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) k_1 H_m^{(1)}(k_1 r) J_m(k_1 r) + \left( \frac{2b}{b-a} - \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) k_2 H_m^{(1)}(k_2 r) J'_m(k_2 r)$$

となる。Müller の定式化 3 の場合、この trace の値はちょうど 2 になる。そこで、Müller の定式化 3 に対する行列 (14) の 2 つの固有値の和はちょうど 2 となり、2 つの固有値は  $\alpha, 2 - \alpha$  とかける。行列 (14) の行列式は固有値の積であるので、その大きさは  $|\alpha(2 - \alpha)|$  である。したがって、行列式の大きさが非常に小さくなるなら、2 つの固有値の大きさは  $O(|\text{行列式}|)$  と  $O(1)$  となる。Müller の定式化 1 や 2 も、その trace は今回調べた範囲では  $O(1)$  程度の大きさであるため上の議論と同様に考えられる。このように、Müller の定式化の方が係数行列に小さな固有値が現れやすく、悪条件となりやすいと考えられる。なお、Müller の定式化 3 の場合、式 (14) の行列式が、Calderon の定式化の場合の式 (15) の行列式のちょうど定数倍になることが示され、このため、Müller の定式化 3 は Calderon の定式化と近い反復回数を要したと考えられる。

実際，係数  $\pi ir/2$  を無視すると，行列 (14) は

$$\begin{pmatrix} \frac{2a}{b-a} J_1 & \frac{2b}{b-a} H_2 \\ -\frac{2k_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} J'_1 & \frac{2k_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} H'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 H'_1 & -\epsilon_1 H_1 \\ k_2 J'_2 & -\epsilon_2 J_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

と行列の積に分解できる．ここに， $H_m^{(1)}(k_i r) = H_i$  および  $J_m(k_i r) = J_i$  と省略している．従って，行列 (14) の行列式は

$$\frac{2}{b-a} \frac{2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} (ak_2 J_1 H'_2 + bk_1 J'_1 H_2) (k_2 \epsilon_1 H_1 J'_2 - k_1 \epsilon_2 H'_1 J_2) \quad (18)$$

となる．同様に行列 (15) は

$$\begin{pmatrix} -J_1 & -H_2 \\ -\frac{k_1}{\epsilon_1} J'_1 & -\frac{k_2}{\epsilon_2} H'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 H'_1 & -\epsilon_1 H_1 \\ k_2 J'_2 & -\epsilon_2 J_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

と分解でき，その行列式は

$$-\frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} (-\epsilon_1 k_2 J_1 H'_2 + \epsilon_2 k_1 J'_1 H_2) (k_2 \epsilon_1 H_1 J'_2 - k_1 \epsilon_2 H'_1 J_2) \quad (20)$$

となる．そこで，Müller の定式化 3 の  $(a, b) = (-\epsilon_1, \epsilon_2)$  を式 (18) に代入すれば式 (20) の定数倍になることが確かめられる．上述の Müller の定式化 3 と Calderon の定式化との対比を，実際の数値計算例で確かめる．Müller の定式化 3 が悪条件化する条件付近での Calderon の定式化と Müller の定式化 3 の精度を調べる．Fig.7 に，Müller の定式化 3 が悪条件化すると予想される条件 ( $\epsilon_1 = 32.6, \epsilon_2 = 5$ ) 付近での，解析解を基準とした相対誤差を示した．Fig.7 より，Müller の定式化 3 は明らかに破綻していることが分かる．一方で Calderon の定式化はやや精度が悪化しているが (行列式 (20) が，Müller の定式化 3 の行列式と定数倍を無視すると等しくなり，Müller の定式化 3 と同じ点で行列式の大きさが小さくなるため) Müller の定式化 3 より相対誤差は明らかに小さく，正しく解を求められている．

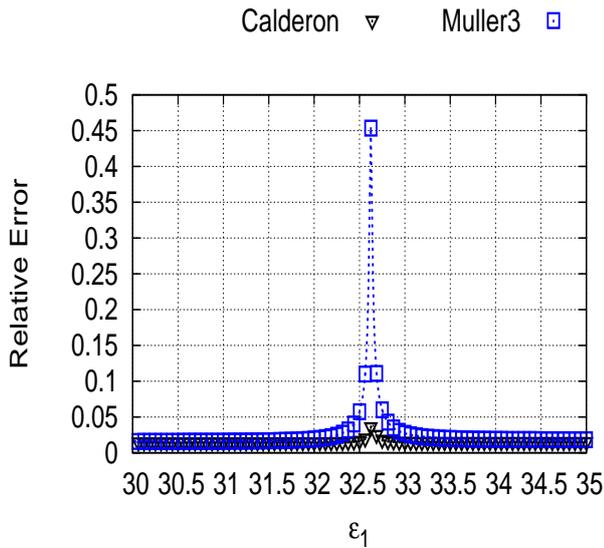


Fig. 7 Müller の定式化 3 が悪条件となる条件付近での解析解を基準とした相対誤差

### 3.4. ガイド波発生のアノマリ付近における挙動

次に，典型的なアノマリとして，ガイド波の発生する  $\epsilon_1$  付近における挙動を調べる．そのために，領域形状が厚さ 1 の平行層 (Fig.8) の場合を考える．この問題では，ガイド波の発生点と解析解  $u$  が容易に求まる． $\epsilon_2 = 5$  とし，位相差を  $\beta = k_1 \sin 1$ ， $\kappa_1 = \beta + 2\pi$  および  $\kappa_2 = \sqrt{\kappa_1^2 - k_1^2}$  として  $u_I = \exp(i(\kappa_1 x_1 - i\kappa_2(x_2 - 1.5)))$  の evanescent 波を入射すると， $\epsilon_1 = 0.68$  の付近でガイド波が生じる．解析解と各定式化との相対誤差を示した Fig.9 を見ると，ガイド波発生点以外で誤差は小さく，解は正しく求まっている．ガイド波発生点近くにおける反復回数を示した Fig.10 を見ると，Calderon の定式化も Müller の定式化も反復回数は少ないままである．この様に，Calderon の定式化と Müller の定式化はアノマリ付近においても反復回数を安定して少なくできている．

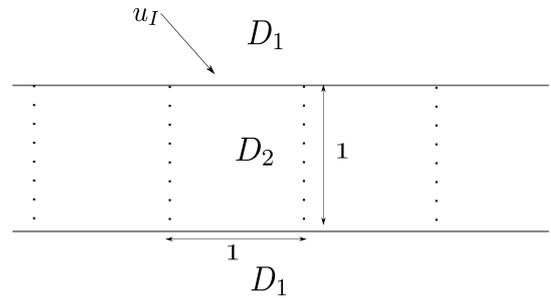


Fig. 8 厚さ 1 の平行層

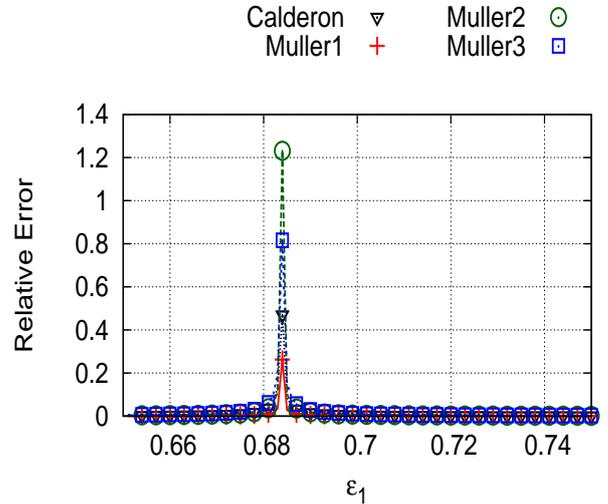


Fig. 9  $\epsilon_2 = 5$  に固定したときのガイド波発生点付近における各定式化の解ベクトルの解析解との相対誤差

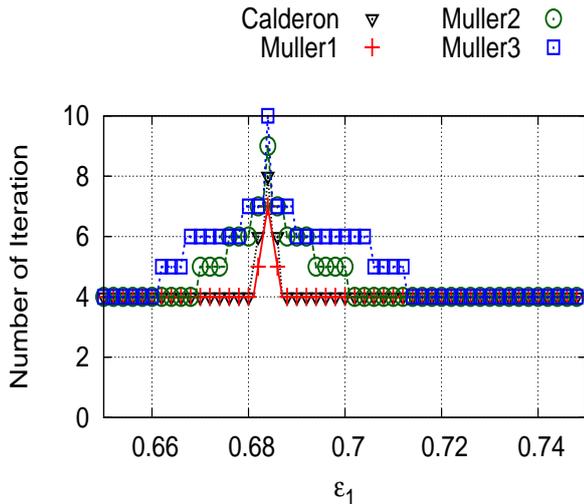


Fig. 10  $\epsilon_2 = 5$  に固定したときのガイド波発生点付近における各手法の反復回数

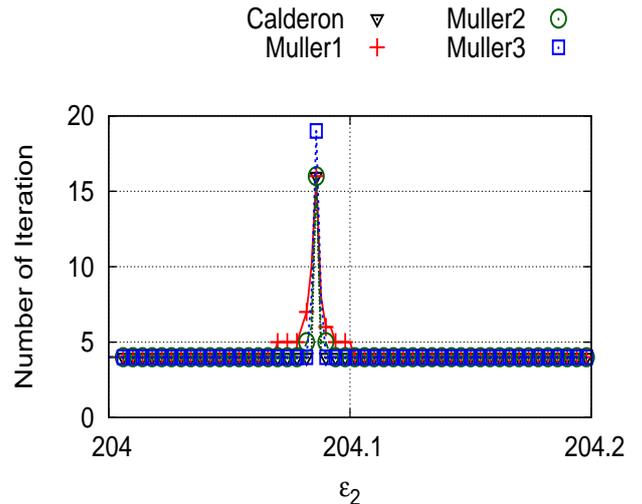


Fig. 12  $\epsilon_1 = 25$  に固定したときのガイド波発生点付近における各手法の反復回数

次に、波数が大きい条件下でのガイド波発生点付近の挙動を調べる。 $\epsilon_1 = 25$  と固定し、位相差を  $\beta = k_1 \sin 1$ ,  $\kappa_1 = \beta + 20\pi$  および  $\kappa_2 = \sqrt{\kappa_1^2 - k_1^2}$  として  $u_I = \exp(i(\kappa_1 x_1 - i\kappa_2(x_2 - 1.5)))$  の evanescent 波を入射すると、 $\epsilon_2 = 204$  の付近でガイド波が生じる。 $\epsilon_2 = 204$  付近の各手法の解析解との相対誤差を Fig.11 に、反復回数を Fig.12 に示した。これらの図より、波数が大きい場合についても、どの手法でも極端に反復回数が増大することはない事がわかる。従って、より波数が高い問題においても Calderon の定式化と Müller の定式化はアノマリ付近においても反復回数を安定して少なくできているようである。

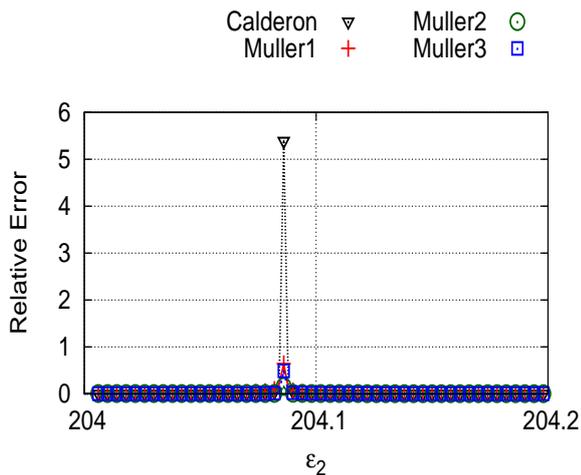


Fig. 11  $\epsilon_1 = 25$  に固定したときのガイド波発生点付近における各定式化の解ベクトルの解析解との相対誤差

#### 4. 結言

2次元 Helmholtz 方程式の 1 周期 transmission 問題において代表的な積分方程式の定式化である PMCHWT 定式化と Müller の定式化を比較し、数値計算によってその計算効率と精度を検討した。その結果、反復解法における収束速度は Müller の定式化のほうが Calderon の定式化より速くなる場合があることが分かった。一方で、Müller の定式化では係数行列の固有値に非常に小さな値が現れ、悪条件となる恐れがあることが分かった。Müller の定式化が悪条件化する条件は、境界積分方程式を Fourier 級数展開して得られる行列が悪条件となる条件とよく一致することが確かめられた。また、アノマリ付近においては Calderon の定式化も Müller の定式化も安定して良好な収束速度を示すことが分かった。

今後の課題としては、Müller の定式化が破綻する条件をより明らかにすることと、一般領域に対する Müller の定式化の適用や弾性波動問題への拡張が挙げられる。

#### 参考文献

- (1) A.-S. Bonnet-Bendhia, F. Starling: Guided waves by electromagnetic gratings and non-uniqueness examples for the diffraction problems, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 17, pp. 305–338, 1994.
- (2) Y. Otani, N. Nishimura: An FMM for periodic boundary value problems for cracks for Helmholtz' equation in 2D, *International Journal for Numerical Method in engineering*, Vol. 73: pp. 381–406, 2008.
- (3) Y. Saad: *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- (4) 新納和樹, 西村直志: 2次元 Helmholtz 方程式の 1 周期境界値問題に対する Calderon の式に基づく前処理について, *計算数理工学論文集*, Vol. 9, pp. 1–6, 2009.