

弾性積層ダンボールの圧縮強度に微視構造の及ぼす影響の均質化解析

HOMOGENIZATION ANALYSIS OF MICROSTRUCTURAL EFFECTS ON COMPRESSIVE STRENGTH OF ELASTIC MULTILAYERED CORRUGATED PAPERBOARD

奥村 大¹⁾, 大野 信忠²⁾, 小野田 孝行³⁾, 曾我 将孝⁴⁾

Dai OKUMURA, Nobutada OHNO, Takayuki ONODA, and Masataka SOGA

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: okumura@mech.nagoya-u.ac.jp)
- 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ohno@mech.nagoya-u.ac.jp)
- 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (平成 23 年度博士課程前期課程修了生, 現在 武蔵精密工業株式会社)
- 4) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: sogam@mm1.mech.nagoya-u.ac.jp)

In this study, we investigate microstructural effects on the compressive strength of elastic multilayered corrugated paperboard subjected to uniaxial compression. Corrugated core profiles and layer-to-layer misalignment are considered as possible structural factors. Periodic units including these factors are efficiently analyzed using a homogenization theory of the updated Lagrangian type. Possibility of microscopic failure is also estimated by calculating microscopic principal stresses. The results using sinusoidal and actual corrugated core profiles indicate that corrugated core profiles give a considerable effect on the compressive strength while misalignment is less than effective. It is furthermore shown that microscopic compressive failure can considerably decrease the compressive strength especially in the actual corrugated core case.

Key Words: Corrugated paperboard, Buckling, Compressive strength, Structural effects, Homogenization, Finite element analysis

1. 緒 言

積層ダンボール (Fig.1) は, 波型に成形された中芯を 2 枚のライナーでサンドイッチして作られる単層ダンボールの積層構造であり, 紙で作られることから, 発泡スチロールに代わる衝撃吸収材料として利用されている. 積層数が 40~70 枚を超えるものも製造することができ, Fig.1(a)に示すように矢印方向に単軸圧縮を受けるとき, 中芯の座屈変形によって衝撃エネルギーは吸収される. したがって, 積層ダンボールの座屈挙動を解析し, 圧縮強度を評価することは, 積層ダンボールの効率的な製造や利用にとって重要である. また, 積層ダンボールの座屈挙動には, ライナーと中芯によって構成される微視構造だけでなく構成材料である紙の材料特性が影響を与えると考えられる. しかしながら, これらの構造や材料の因子が積層ダンボールの圧縮強度に及ぼす影響を調べた研究は著者らの知る限り見当たらない.

単層ダンボールの数値解析はいくつか行われており, 多くの研究⁽¹⁾⁻⁽³⁾において, 中芯形状は正弦波形として近似されている. しかしながら, 実際には中芯は製造工程に依存して正弦波形とは異なった実形状⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾をしており, 座屈は一般に初期不整の影響を強く受けるので, このような中芯形状の違いが積層ダンボールの座屈挙動に及ぼす影響は大きいと考え

られる. また, ほかに考えられる構造的な因子として, 積層ずれの存在を上げることができる. 積層ずれとは, 積層ダンボールの各層間における中芯波形の位相のずれを表しており, 一般にそろっておらず, ランダムであり, 座屈挙動に影響を与える可能性を有している.

次に紙の材料特性について述べる. 紙には Fig.1(b)に示すように, MD, CD, ZD といった 3 つの代表的な方向がある.

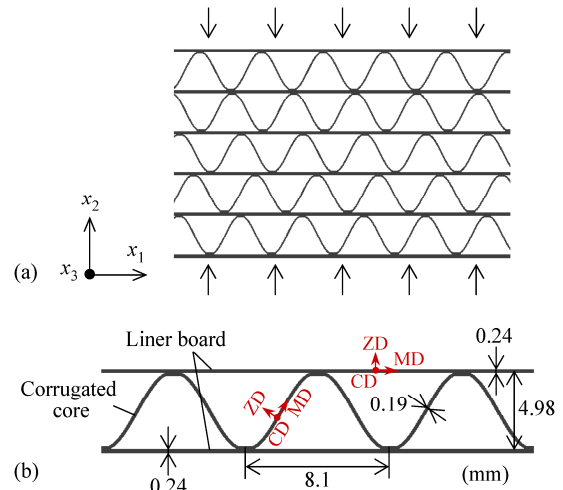


Fig. 1. Illustration of (a) multilayered corrugated paperboard and (b) single-wall corrugated paperboard.

本研究で着目する積層ダンボールの単軸圧縮 (Fig.1(a)) では、中芯及びライナーの主要な変形モードは MD 方向への曲げと考えられる。この方向は CD, ZD 方向と比較して、剛性と強度が強い方向であり、単軸引張試験^{(1),(3),(7)}では、降伏後も剛性をあまり失わずに脆性的に破断に至る。また、単軸圧縮試験⁽⁷⁾では、圧縮強度は引張強度の 40%程度であることが報告されており、紙には層間はく離をともなって微視的な座屈が生じると推測できる実験例^{(8),(9)}がある。つまり、積層ダンボールの座屈挙動を調べる上で、このような紙の微視的な引張破断と圧縮破損をそれぞれ考慮すべきである。

上述のような、中芯形状や積層ずれといった微視構造と紙の微視的な破断や破損が積層ダンボールの圧縮強度に及ぼす影響を解析するためには、著者ら^{(10),(11)}によって構築された有限変形の均質化理論に基づく有限要素解析が有用である。この理論では、微視構造の影響は周期単位のモデル化において直接導入することができ、微視的分岐や巨視的不安定の条件^{(10),(11)}を調べることによって、周期単位で構成される周期材料の座屈挙動を解析することができる。また、微視的応力分布を解析することによって、紙の微視的破断や破損も評価することができ、さらには、紙の損傷や層間はく離を考慮した精密な材料モデル^{(9),(12)}の導入も原理的に可能である。

そこで本研究では、以下の条件の下で、弾性積層ダンボールの圧縮強度に微視構造の及ぼす影響を調べる。すなわち、中芯形状には正弦波形状と実形状をそれぞれ考え、単層ダンボールをランダムに 8 層積層したものを周期単位とみなして均質化解析を行う。この解析では、微視的分岐と巨視的不安定の条件^{(10),(11)}を用いて座屈挙動を調べる。さらには、微視的な応力分布から最大及び最小の主応力を計算し、紙の引張や圧縮の強度とのパラメトリックな比較によって、引張側での微視的破壊と圧縮側での微視的破損の開始点をそれぞれ推定する。最後に、得られた結果より、積層ダンボールの圧縮強度に微視構造の及ぼす影響について議論する。

2. 均質化理論

この章では、解析のために用いる更新 Lagrange 形式の均質化理論^{(10),(11)}についてその概略を述べる。

2.1. 基礎式 周期内部構造を有する無限体 B とその最小周期単位 Y を考える。 B に巨視的に一様な変形を加えると、微視的な変形は Y 周期的に生じる。しかしながら、大変形下では微視的分岐が生じうるため、微視的変形の周期単位は一般に大きくなる。このような問題を解析するため、 k 個の Y からなる周期単位 kY を考え、 kY を周期とする空間的変化を kY 周期的変化と呼ぶことにする。また、時間 t での周期単位 kY に対して直交座標 $x_i (i=1,2,3)$ を設け、 $(\)_i$ は座標 x_i に関する微分、 $(\)$ は時間 t に関する物質導関数を表すものとする。

B の内部変形が kY 周期性を満足するとき、変位速度 \dot{u}_i は、巨視的成分 \dot{u}_i^0 と kY 周期的な擾乱成分 \dot{u}_i^* を用いて、

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^0 + \dot{u}_i^* \quad (1)$$

と書ける。このとき、ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ は、

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^0 + \dot{\varepsilon}_{ij}^* \quad (2)$$

と表され、 $\dot{\varepsilon}_{ij}^0 = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^0 + \dot{u}_{j,i}^0)$ 、 $\dot{\varepsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^* + \dot{u}_{j,i}^*)$ である。巨視的な一様な変形が与えられる B 内では $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ と $\dot{u}_{i,j}^0$ は一様であり、 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ の分布は \dot{u}_i^* と同様に kY 周期性を満足する。

B の構成相は歪弾性材料からなり、その構成式は微視的に

$$\dot{\pi}_{ji} = l_{ijkl} \dot{u}_{k,l} \quad (3)$$

と表されるとする。ここで、 $\dot{\pi}_{ji}$ は更新 Lagrange 形式の公称応力速度であり、 l_{ijkl} は $l_{ijkl} = l_{klij}$ を満足する微視的な剛性テンソルである。剛性テンソル l_{ijkl} は、相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\dot{\tau}_{ij}^0$ とひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ の間に剛性テンソル c_{ijkl}^0 を用いて線形関係 $\dot{\tau}_{ij}^0 = c_{ijkl}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}$ が成り立つとすると、

$$l_{ijkl} = c_{ijkl}^0 - \frac{1}{2}(\sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{il} \delta_{jk} - \delta_{ik} \sigma_{jl} + \delta_{il} \sigma_{jk}) \quad (4)$$

と求められる。ここで σ_{ij} は Cauchy 応力、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。さらに、公称応力速度 $\dot{\pi}_{ji}$ は次式を満足する。

$$\dot{\pi}_{ji} = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} \dot{u}_{k,k} - \sigma_{ik} \dot{u}_{j,k} \quad (5)$$

上式の微視的応力速度関係は、 B の現配置におけるセル集合 kY に関する体積平均を $\langle (\) \rangle = |kY|^{-1} \int_{kY} (\) dY$ と表すとき、巨視的にも同じ形式で表される⁽¹⁰⁾。すなわち、

$$\dot{\Pi}_{ji} = \dot{\Sigma}_{ij} + \Sigma_{ij} \dot{u}_{k,k}^0 - \Sigma_{ik} \dot{u}_{j,k}^0 \quad (6)$$

と表され、ここで、 $\dot{\Pi}_{ji} = \langle \dot{\pi}_{ji} \rangle$ 、 $\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle$ である。

応力のつり合い式 $\dot{\pi}_{ji,j} = 0$ を弱形式に変換し、 $\dot{\pi}_{ji}$ と \dot{u}_i^* の kY 周期性を用いると、仮想仕事の式^{(10),(11)}

$$\langle \dot{\pi}_{ji} \delta \dot{u}_{i,j} \rangle = \dot{\Pi}_{ji} \delta \dot{u}_{i,j}^0 \quad (7)$$

が導かれる。ここで、 $\delta \dot{u}_i$ は \dot{u}_i の任意の変分であり、 $\delta \dot{u}_i^0 = \langle \delta \dot{u}_i \rangle$ である。式(1)と(3)の式(7)への代入によって、次に示す均質化方程式が得られる^{(10),(11)}。

$$\dot{\Pi}_{ji} = \langle l_{ijkl} (\dot{u}_{k,l}^0 + \dot{u}_{k,l}^*) \rangle \quad (8)$$

$$\langle l_{ijpq} \dot{u}_{p,q}^* \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = -\dot{\varepsilon}_{kl}^0 \langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle \quad (9)$$

ここで、 $\delta \dot{u}_i^*$ は kY 周期性を満足する任意の速度場であり、

$$c_{ijkl} = l_{ijkl} - \delta_{ik} \sigma_{jl} \quad (10)$$

である。なお、 $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$ を満足する。式(8)は微視的構成式(3)の体積平均であり、巨視的な構成式とみなすことができる。また、式(9)は巨視的ひずみ速度 $\dot{\varepsilon}_{kl}^0$ によって誘起される擾乱変位速度 \dot{u}_i^* を求めるための境界値問題である。

式(9)を解くことにより、 \dot{u}_i^* が一意的に求められる場合を考える。このとき、 \dot{u}_i^* は $\dot{\varepsilon}_{kl}^0$ と線形関係にあるから、

$$\dot{u}_i^* = \chi_i^{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}^0 \quad (11)$$

と書くことができる。ここで、 χ_i^{kl} は kY 周期性を満足し、境界値問題

$$\langle l_{ijpq} \chi_i^{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}^0 \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = -\langle c_{ijkl} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle \quad (12)$$

の解である。式(11)を用いると、式(8)は

$$\dot{\Pi}_{ji} = L_{ijkl}^H \dot{u}_{k,l}^0, \quad L_{ijkl}^H = \langle l_{ijkl} + l_{ijpq} \chi_i^{kl} \rangle \quad (13)$$

と展開でき、 $L_{ijkl}^H = L_{klij}^H$ となることが示される⁽¹¹⁾。

この章の式展開において、周期単位中に空孔がある問題では注意が必要であり、式(2)は固体領域でのみ成り立つ関係である。しかし、最終的に得られる均質化方程式(8)と(9)では、空孔領域の剛性は零であるため、空孔領域での変位やひずみの定義は不要である。なお、空孔を含む場合の巨視的ひずみと変位の関係については文献⁽¹³⁾に詳しく述べられている。

2.2. 微視的分岐 式(9)の境界値問題の解に分岐が生じるとき、基本解は式(11)から求められる。また基本解と分岐解の差は、次の境界値問題の固有解として求められる。

$$\langle l_{ijpq} \phi_i^{(r)} \delta \dot{u}_{i,j}^* \rangle = 0, \quad r = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

ここで、 m は分岐の多重度を表す。したがって、式(9)の分岐解は、定数 $\kappa^{(r)}$ を用いて、

$$\dot{u}_i^* = \chi_i^{kl} \dot{\varepsilon}_{kl}^0 + \sum_{r=1}^m \kappa^{(r)} \phi_i^{(r)} \quad (15)$$

と表される. さらに $\phi^{(r)}$ は, 直交条件

$$\langle l_{ijkl} \phi_{i,j}^{(r)} \rangle = 0, \quad r=1,2,\dots,m \quad (16)$$

を満足することが示される⁽¹¹⁾. 式(14)は微視的分岐点の探索に用いられ, 式(15)と(16)は分岐経路への誘導に用いられる.

2.3. 巨視的不安定 式(13)によって求められる巨視的な接線係数 L_{ijkl}^H がだ円性を失うとき, 巨視的不安定が生じる. この開始条件は, ある巨視的な面の単位法線を n_j^0 と表すとき, アコースティックテンソル $A_{ik} = L_{ijkl}^H n_j^0 n_l^0$ を導入することによって調べられる⁽¹⁴⁾. 巨視的不安定によって変形速度こう配 $g_k^0 n_l^0$ が生じるとすれば, 方向 g_k^0 は $A_{ik} g_k^0 = 0$ を満足する. したがって, 巨視的不安定条件は次式となる.

$$\det \mathbf{A} = 0 \quad (17)$$

Geymonat ら⁽¹⁵⁾は, Bloch の定理を用いて, 無限に大きな周期単位の微視的分岐の発生条件が巨視的不安定の開始条件と等価の関係にあることを示した. この関係は著者ら^{e.g.,(16),(17)}の正方形ハニカムやケルビンセルの座屈解析でも確認されており, 周期単位を大きくすると, 微視的分岐点は, 早期に現れるようになり, 巨視的不安定の開始点に漸近する. したがって, 式(17)は長波長座屈の発生とそのときの座屈強度を知るために用いられる.

3. 解析モデル

この章では, 解析に用いる 2 種類の中芯形状と積層ずれを考慮した周期単位について述べる. 基本寸法や紙の弾性特性については, 文献⁽⁶⁾の単軸圧縮試験に用いられている試験片 (A5A(A)) の値を用いる. この試験片はピッチが若干短いことを除けば A フルートと呼ばれる規格に対応している.

3.1. 基本寸法と負荷条件 Fig.1(b)に解析モデルの基本寸法を示す. 中芯のピッチは 8.1mm, 高さは 4.98mm であり, 中芯とライナーの紙厚はそれぞれ $t_c=0.19\text{mm}$, $t_l=0.24\text{mm}$ とする. ただし, 文献⁽⁶⁾には, ライナーの紙厚は具体的に示されておらず, 中芯紙とライナー紙の面密度がそれぞれ $w_c=120\text{g/m}^2$, $w_l=150\text{g/m}^2$ であると示されている. そこで, ライナーは中芯と同じ材料であることを仮定し, ライナーの紙厚は面密度の比から関係式 $t_l=t_c(w_l/w_c)$ を用いて求めた.

次に, Fig.1(a)に示すように, 負荷条件には積層ダンボールの積層方向への単軸圧縮を考える. このとき, 巨視的負荷条件は $\varepsilon_{22}^0 < 0$, $\dot{\Sigma}_{11} = \dot{\Sigma}_{33} = 0$, $\varepsilon_{ij}^0 = 0$ ($i \neq j$) と表される.

3.2. 中芯形状のモデル化 単層ダンボールは, 波型に成形された中芯を 2 枚のライナーでサンドイッチして接着することによって製造される. したがって, 数値解析⁽¹⁾⁻⁽³⁾において, 中芯形状は正弦波形として近似されることが多いが, 実際には製造工程に依存して正弦波形からずれた形状⁽⁴⁾⁻⁽⁶⁾をしている. また, このずれた形状は製造工程に依存するため, 層内においておおむね周期的になっている⁽⁶⁾. 本研究では, 中芯形状が正弦波形状の場合と実形状の場合についてユニットセルを作成し, この影響を調べる. Fig.2(a)は正弦波形状モデル, Fig.2(b)は実形状モデルのユニットセルである. ここで, 実形状モデルの中芯形状は, 文献⁽⁶⁾における実物形状写真をトレースすることによって作成されている.

Fig.2 には解析に用いる有限要素分割も示されており, 要素分割には 2 次元の 4 節点非適合要素を利用し, 面外(x_3)方向には一般化平面ひずみ条件 ($u_{i,3}^* = 0$)^{e.g.,(10)}を用いる. また,

要素分割による解の収束度は試験計算によって確認済みである. なお, ユニットセルの水平(x_1)および垂直(x_2)方向への配列によって積層ダンボールは構成される. このため, Fig.2 に示すユニットセルにおいて, ライナー部分は単層ダンボールのライナー紙 2 枚分の厚さである.

3.3. 積層ずれを考慮した周期単位 Fig.3 に積層ずれを考慮するための周期単位を示す. 図中において, 実線で囲まれた部分が解析に用いる周期単位を示している. すなわち, 周期単位は 8 つのユニットセルを積層することによって構成されており, α_i ($i=1,2,3,\dots,8$)の値をランダムに与えることによって, 積層ずれの影響が導入される. ここで, $2\pi\alpha_i$ は隣接上下層の中芯波形の位相差を表し, したがって, α_i の取りうる範囲は $-1/2 \sim 1/2$ である. 本研究では, α_i ($i=1,2,3,\dots,8$)に対して, $0, \pm 1/8, \pm 1/4, \pm 3/8, 1/2$ の 8 つの値をランダムに割り当てることを考え, Table 1 に示すような 3 つの組合せ, つまりランダムパターン R1~R3 について正弦波形状及び実形状の解析モデルを作成してそれぞれ解析を行う.

なお, Fig.3 に示すように 8 つのユニットセルで作られる周期単位は積層ずれを考慮しているため単純な長方形の周期単位にはならない. しかし, 周期単位境界上の対応節点間に周期境界条件を与えることで解析は実行可能である. このような周期境界条件は, 文献^{(11),(17)}でも利用されている. さらに, 文献⁽¹⁸⁾では積層ずれを導入するための境界条件とし

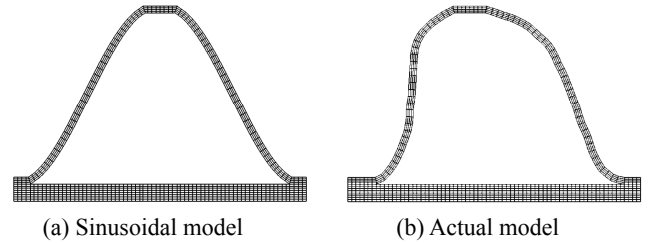


Fig. 2. Unit cell and its finite element mesh.

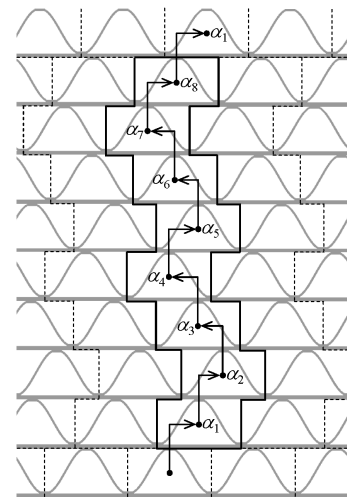


Fig. 3. Periodic unit with layer-to-layer misalignment defined by non-dimensional parameters α_i ($i=1,2,\dots,8$).

Table 1. Random patterns for layer-to-layer misalignment.

	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
R1	1/2	1/8	-1/4	-1/8	3/8	0	-3/8	1/4
R2	1/2	-1/4	3/8	-1/8	0	1/4	-3/8	1/8
R3	1/2	0	3/8	1/4	1/8	-1/4	-1/8	-3/8

て、理論的な妥当性が示されている。また本研究では、積層ずれを導入するために8層をひとつの周期単位とみなしているが、16層の場合についても試験計算を実施しており、4章で示す結果に周期単位の層数が影響を及ぼさないことは確認済みである。

3.4. 紙の材料特性 緒言で述べたように、単軸圧縮を受ける積層ダンボール (Fig.1(a)) において、中芯及びライナーの紙に作用する主要な変形モードは MD 方向への曲げである。この妥当性は、文献⁽¹⁹⁾において、はりの理論を用いて単軸圧縮を受ける単層ダンボールの荷重変位関係が解析され、MD 方向のヤング率を用いることによって、弾性領域の応答が実験結果と非常によく一致することからも確かめられる。したがって、本研究では、紙を等方弾性体であるとして、MD 方向の材料定数を用いる。文献⁽⁶⁾よりヤング率を 1.90GPa、ポアソン比を 0.34 とし、式(4)中の剛性テンソル c_{ijkl}^e を決定した。

さらに解析では、引張側での微視的破断と圧縮側での微視的破損の開始点を評価することを考え、微視的な Cauchy 応力を用いて、最大主応力 σ_1 と最小主応力 σ_3 を各積分点で計算し、これらの値が最初に引張強度 σ_{tf} と圧縮強度 σ_{cf} にそれぞれ達する点を調べることにする。すなわち、微視的な引張破断と圧縮破損の開始条件をそれぞれ次式のように表す。

$$\sigma_1 = \sigma_{tf}, \quad \sigma_3 = -\sigma_{cf} \quad (18)$$

上式の σ_{tf} 、 σ_{cf} として、直接利用できる実験値は残念ながら見つけられない。しかしながら、いくつかの実験^{(1),(3),(7),(9)}によって、MD 方向の引張強度及び圧縮強度については、おおよそ 10~40MPa の値を取ることがわかっている。このため、この範囲の値を用いることにする。

3.5. 解析手順 作成した正弦波形状モデル及び実形状モデルの周期単位 (それぞれ R1~R3 の 3 パターン) を前章で述べた均質化理論を用いて有限要素解析する。解析は式(12)の境界値問題を解くことによって増分的に進められ、各増分ステップにおいて、式(14)と(17)を調べることによって、微視的分岐や巨視的不安定の発生をそれぞれ探索する。なお、次章の解析結果では、換算式 $S_{nom} = \Sigma_{22} \exp(\epsilon_{11}^0 + \epsilon_{33}^0)$ と $E_{nom} = \exp(\epsilon_{22}^0) - 1$ を用いて、負荷軸方向の巨視的垂直応力 Σ_{22} と垂直ひずみ ϵ_{22}^0 を公称値に換算して示す。

4. 解析結果

4.1. 弾性座屈応力 Fig.4 は解析によって得られた巨視的応力ひずみ関係である。この図に示すように、いずれの場合についても、応力ひずみ曲線には初期剛性をほぼ保って変形が進む領域、一般に線形弾性領域と呼ばれる領域があり、引き続いて応力が一定となるプラトー領域が現れる。また、その遷移領域では巨視的不安定の開始条件 (印○) が満足されており、微視的分岐条件を満足する点は確認されなかった。なお、中芯とライナーの接触開始点 (印×) で解析を打ち切った。これらの結果からは次のことがわかる。まず、正弦波形状モデル及び実形状モデルのどちらの場合でも、接触の開始点は若干ばらつくものの、積層ずれのパターンは応力ひずみ曲線にほとんど影響を与えない。これに対して、実形状モデルの巨視的不安定の開始応力やプラトー応力は正弦波形状モデルと比較して 25%ほど小さく、中芯形状の影響は有意である。また、初期剛性についても同じことが言え、実形状モ

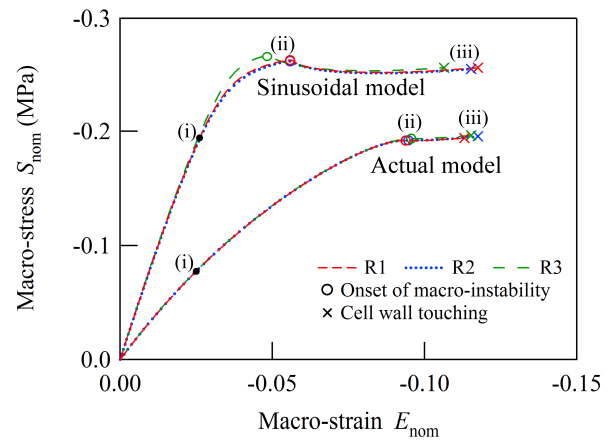


Fig. 4. Uniaxial compressive relations of macro-stress and macro-strain.

デルの初期剛性は正弦波形状モデルの 43%ほどである。

次に、ランダムパターン R1 の微視的な変形状態および応力分布を Fig.5 に示す。状態(i)は、Fig.4 に示すように、線形弾性領域を代表する点であり、正弦波形状モデルの場合には $S_{nom} = -0.194\text{MPa}$ 、実形状モデルの場合には $S_{nom} = -0.077\text{MPa}$ の点である。また、状態(ii)と状態(iii)は巨視的不安定の開始点及び接触の開始点にそれぞれ対応している。微視的の応力分布は、最大主応力 σ_1 と最小主応力 σ_3 のうち絶対値が大きい方の値を用いて描かれており、引張と圧縮のどちらが優勢であるかが見やすくなっている。

この図からわかることは、状態(i)を含む線形弾性領域では、8つのユニットセルはおおよそ等しく変形しており、似たような応力分布状態にある。これに対して、巨視的不安定の開始点である状態(ii)では、いくつかのユニットセルの中芯 (Fig.5 では矢印で示される部分) に変形が集中し始め、最終的に状態(iii)では、その変形が進展して中芯とライナーの接触に至る。ランダムパターン R2 と R3 についても、同様の結果が得られる。すなわち、巨視的不安定の開始点は局所的な座屈変形の開始に対応する点であり、この開始応力はプラトー応力とほとんど等しいことから、本研究では、巨視的不安定の開始応力を弾性座屈応力とみなすことにする。

なお、微視的分岐をとまわずに局所的な座屈変形に進展した理由としては、どちらのモデルの場合にも、ランダムに導入された積層ずれが初期不整の役割を果たし、微視的座屈の進展が自然に誘導されたことによる。また、巨視的不安定の開始条件が満足された直後には、周期単位を大きく取ると、長波長座屈に対応する微視的分岐点が見ることが知られている^{(11),(16),(17)}。このことから、巨視的不安定の開始応力を弾性座屈応力とみなすことは妥当である。

4.2. 微視的破壊と破損の開始点 Fig.5 より、中芯及びライナーには曲げ変形に特有の応力分布が確認できる。この結果は、MD 方向への曲げが主要な変形モードであることを示している。Table 2 には、状態(i), (ii), (iii)における最大主応力の最大値と最小主応力の最小値が、ランダムパターン R1~R3 に対する平均値と標準偏差 (括弧内の値) として整理されている。最大値および最小値の発生箇所は、正弦波形状及び実形状モデルのいずれの場合でも、中芯のライナーとの接続部近傍であった。状態(i), (ii), (iii)でのこれらの値と、紙の引張・

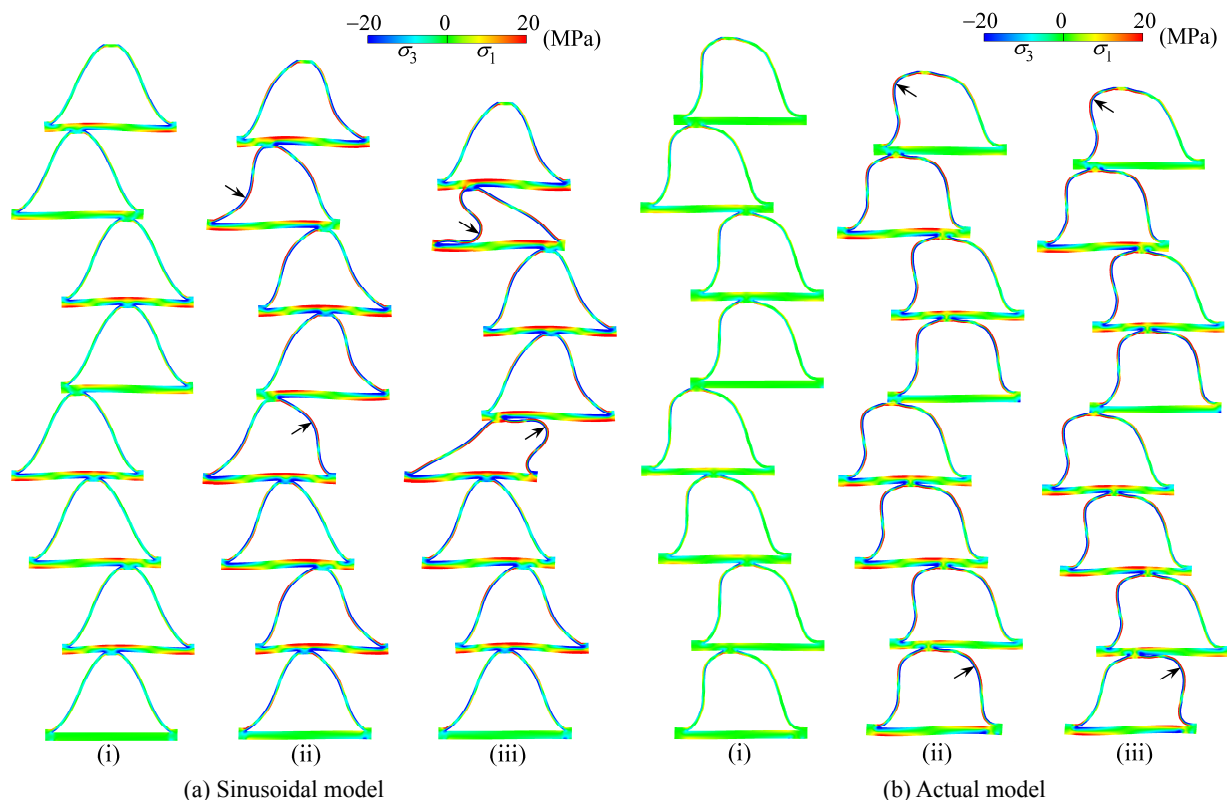


Fig. 5. Deformed configuration and stress distribution for random pattern R1 at states (i), (ii), and (iii).

圧縮強度としての10~40MPaという値^{(1),(3),(7),(9)}を比較するとき、紙の微視的な引張破断や圧縮破損は、状態(ii)の巨視的不安定の開始点に達する前の線形弾性領域において、開始条件(18)をすでに満足していることがわかる。

Fig.6は、紙の引張強度 σ_{tr} と圧縮強度 σ_{cr} をそれぞれパラメータとして考え、最大及び最小主応力がこれらの値にそれぞれ達するときの巨視的応力をプロットしたものである。なお、プロットされている値は、3つのランダムパターンの平均値である。Fig.6(a)と(b)はそれぞれ正弦波形状及び実形状モデルの結果であり、図中の破線は巨視的不安定の開始応力、すなわち弾性座屈応力を示す。この図から明らかなように、積層ダンボールには弾性座屈応力に達するよりも先に紙の引張による微視的破断や圧縮による微視的破損が始まり、さらに強度が同じ場合には、圧縮による破損が優先的である。また実験⁽⁷⁾では、圧縮側の強度は引張側の値の40%程度となっている。したがって、単軸圧縮を受ける積層ダンボールでは、微視的な破断や破損をとまわずに座屈変形の局所化が進展するのではなく、その前に圧縮側の微視的破損が優先して始まると推定できる。また、正弦波形状と実形状モデルの比較によって、紙の微視的な圧縮破損の影響は実形状モデルの場合に顕著であることがわかる。

4.3. 考察 実験⁽⁶⁾によると、今回の解析モデルに対応する積層ダンボール（文献⁽⁶⁾では試験片 A5A(A)に対応）の圧縮強度は約0.05MPaである。実形状モデルの中芯形状はこの試験片からトレースされたものであり、Fig.6(b)の解析値とこの実験値を比較するとき、弾性座屈応力は明らかに実験値を過大評価している。これに対して、微視的破損や破断の開始応力は、紙の強度に依存して変化するものの、実験値と比較可

Table 2. The average and standard deviation of max (σ_1) and min (σ_3) for random patterns R1, R2, and R3 at states (i), (ii), and (iii) (unit in MPa).

		State (i)	State (ii)	State (iii)
Sinusoidal model	max (σ_1)	30.9 (0.6)	119.6 (4.6)	265.8 (1.8)
	min (σ_3)	-41.0 (0.2)	-130.3 (4.6)	-286.6 (2.9)
Actual model	max (σ_1)	32.4 (1.0)	107.8 (0.7)	119.1 (0.7)
	min (σ_3)	-36.9 (1.4)	-119.2 (1.5)	-131.3 (1.5)

能な応力範囲にあることがわかる。この結果は、積層ダンボールの圧縮強度に対して、中芯の形状不整と紙の微視的破損や破断が組み合わさって、強く影響を与えることを示している。ただし、今回の解析は弾性解析であり、微視的破断や破断の開始点を別々に推定したにすぎない。紙の微視的破損や破断が積層ダンボールの圧縮強度に及ぼす影響を厳密に調べるためには、これらの現象を表現できる材料モデルを用いて解析する必要がある。

5. 結 言

本研究では、弾性積層ダンボールの圧縮強度に微視構造の及ぼす影響を調べるため、均質化理論を用いて有限要素解析を行った。微視構造として、中芯形状のほかに積層ずれを考え、これらの影響を調べた。解析では、微視的分岐と巨視的不安定の条件を用いて弾性座屈応力を評価するとともに、紙の引張による微視的破断と圧縮による微視的破損の開始点も推定した。得られた知見は次のようにまとめられる。

まず、中芯形状の影響は大きく、実形状モデルの弾性座屈応力は、正弦波形状モデルの値より25%ほど小さくなった。

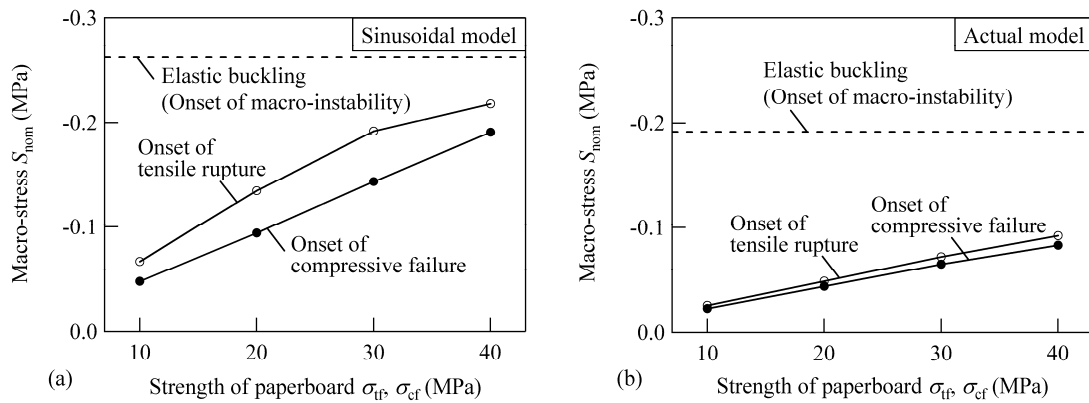


Fig. 6. Comparison of elastic buckling stress with onset stresses of tensile rupture and compressive failure; (a) sinusoidal model and (b) actual model.

これに対して、積層ずれの影響はほとんど現れなかった。つづいて、文献値を参考に紙の引張と圧縮の強度を想定したとき、紙の微視的破断や破損は、巨視的不安定に達する前に始まることがわかった。また、微視的な引張破断よりも圧縮破断が優先的であった。さらに、紙の微視的破断や破損の影響は実形状モデルの場合に顕著であり、弾性座屈応力は実験値を大きく過大評価するのに対して、微視的破断や破損の開始応力は実験値と比較可能な応力範囲に分布した。したがって、積層ダンボールの圧縮強度には、中芯形状だけでなく紙の微視的破断や破損、とりわけ圧縮による破損が強く影響を及ぼすといえる。ただし、紙厚の薄いもしくは剛性の低いライナーで作られる積層ダンボールの場合には、積層ずれの影響が顕著に表れることも考えられる。したがって、これらの検討は改めて必要である。また、紙の微視的破断や破損を考慮することも、より精密な解析を行う上で必要である。

参考文献

- (1) A. Harrysson, M. Ristinmaa: Large strain elasto-plastic model of paper and corrugated board, *Int. J. Solids Struct.*, **45**(2008), pp.3334-3352.
- (2) B.K. Thakkar, L.G.J. Gooren, R.H.J. Peerlings, M.G.D. Geers: Experimental and numerical investigation of creasing in corrugated paperboard, *Philos. Mag.*, **88**(2008), pp.3299-3310.
- (3) R. Haj-Ali, J. Choi, B.S. Wei, R. Popil, M. Schaepe: Refined nonlinear finite element models for corrugated fiberboards, *Comp. Struct.*, **87**(2009), pp.321-333.
- (4) M.E. Biancolini, C. Brutti: Numerical and experimental investigation of the strength of corrugated board packages, *Pack. Tech. Sci.*, **16**(2003), pp.47-60.
- (5) M.E. Biancolini: Evaluation of equivalent stiffness properties of corrugated board, *Comp. Struct.*, **69**(2005), pp.322-328.
- (6) Z.W. Wang, Y.P. E: Energy absorption properties of multi-layered corrugated paperboard in various ambient humidities, *Mater. Des.*, **32**(2011), pp.3476-3485.
- (7) Q.S. Xia, M.C. Boyce, D.M. Parks: A constitutive model for the anisotropic elastic-plastic deformation of paper and paperboard, *Int. J. Solids Struct.*, **39**(2002), pp.4053-4071.
- (8) S. Nagasawa, Y. Fukuzawa, T. Yamaguchi, S. Tsukatani, I. Katayama: Effect of crease depth and crease deviation on

folding deformation characteristics of coated paperboard, *J. Mater. Proc. Tech.*, **140**(2003), pp.157-162.

- (9) L.A.A. Beex, R.H.J. Peerlings: An experimental and computational study of laminated paperboard creasing and folding, *Int. J. Solids Struct.*, **46**(2009), pp.4192-4207.
- (10) N. Ohno, D. Okumura, H. Noguchi: Microscopic symmetric bifurcation condition of cellular solids based on a homogenization theory of finite deformation, *J. Mech. Phys. Solids*, **50**(2002), pp.1125-1153.
- (11) D. Okumura, N. Ohno, H. Noguchi: Elastoplastic microscopic bifurcation and post-bifurcation behavior of periodic cellular solids, *J. Mech. Phys. Solids*, **52**(2004), pp.641-666.
- (12) P. Isaksson, R. Hagglund: A mechanical model of damage and delamination in corrugated board during folding, *Eng. Frac. Mech.*, **75**(2005), pp.2299-2315.
- (13) N. Ohno, K. Ikenoya, D. Okumura, T. Matsuda: Homogenized elastic-viscoplastic behavior of anisotropic open-porous bodies with pore pressure, *Int. J. Solids and Struct.*, **49**(2012), pp.2799-2806.
- (14) J.R. Rice: The localization of plastic deformation, *Proc. 14th IUTAM congress*, (1976), pp.207-220.
- (15) G. Geymonat, S. Muller, N. Triantafyllidis: Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **122**(1993), pp.231-290.
- (16) N. Ohno, D. Okumura, T. Niikawa: Long-wave buckling of elastic square honeycombs subject to in-plane biaxial compression, *Int. J. Mech. Sci.*, **46**(2004), pp.1697-1713.
- (17) D. Okumura, A. Okada, N. Ohno: Buckling behavior of Kelvin open-cell foams under [001], [011] and [111] compressive loads, *Int. J. Solids Struct.*, **45**(2008), pp.3807-3820.
- (18) T. Matsuda, S. Kanamaru, N. Yamamoto, Y. Fukuda: A homogenization theory for elastic-viscoplastic materials with misaligned internal structures, *Int. J. Plast.*, **27**(2011), pp.2056-2067.
- (19) A. Krusper, P. Isaksson, P. Gradin: Modeling of out-of-plane compression loading of corrugated paper board structures, *J. Eng. Mech.*, **133**(2007), pp.1171-1177.