計算数理工学論文集 Vol. 12 (2012 年 12 月), 論文 No. 16-121212 JASCOME

陰的Runge-Kutta法を用いた演算子積分時間領域境界要素法及び3次元スカラー波動問題への応用

Implicit Runge-Kutta Based Convolution Quadrature Boundary Element Method and Its Application to 3-D Scalar Wave Propagation Problems

丸山 泰蔵[1], 斎藤 隆泰[2], 廣瀬 壮一[3]

Taizo MARUYAMA, Takahiro SAITOH, and Sohichi HIROSE

1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: maruyama.t.ag@m.titech.ac.jp)
2) 群馬大学大学院工学研究科 (〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail: t-saitoh@gunma-u.ac.jp)
3) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp)

This paper presents an implicit Runge-Kutta based convolution quadrature boundary element method. Application of a convolution quadrature method (CQM) to time-domain boundary element method (BEM), which is called CQ-BEM, can improve numerical stability of time-stepping procedure. However, the CQ-BEM using backward differentiation formula (BDF) sometimes produces small numerical errors for wave propagation problems. Therefore, in this paper, implicit Runge-Kutta based CQ-BEM is presented for 3-D scalar wave propagation problems. The formulation of Runge-Kutta based CQM and its application to time-domain BEM are described, and their accuracies are checked by solving some numerical examples.

Key Words: time-domain BEM, implicit Runge-Kutta method, convolution quadrature method (CQM), 3-D scalar wave propagation problems

1. はじめに

近年, Lubichが提案した畳み込み積分を安定に計算する手法である演算子積分法 (1)(CQM: Convolution Quadrature Method) を時間領域境界要素法 (BEM: Boundary Element Method) の畳み込み積分の計算に用いた演算子積分時間領域境界要素法 (CQ-BEM) が開発され, 様々な波動問題に適用されてきた (2). CQ-BEM は従来の時間領域 BEM と比較して, 時間増分が小さいときでも安定に解を構成することができる. また, Laplace 変換領域の基本解を用いるため, 時間領域では閉じた基本解を求めることができない問題をも解析できる利点を持つ. そのため, 汎用性が高く, 波動問題に対しては特に有効な時間領域解析手法となりつつある. また, BEM の高速化手法として代表的な高速多重極法 (FMM: Fast Multipole Method) の適用例も報告されている (3)(4).

一方, 最近の研究によって, これまでの線形多段法を用いた CQM よりも, 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM (5) の方が畳み込み積分を精度良く計算できることが明らかになってきており, 数値誤差の検証もなされてきている (6). しかしながら, 時間領域 BEM への適用はほとんど行われていない. そこで, 様々な工学的問題への応用を見据えて, 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM を時間領域 BEM に適用することを本研究の目的とする.

以下では, 最初に陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM の定式化を示す. 次に, 線形多段法, 及び陰的 Runge-Kutta 法, それぞれを用いた CQM によって, 実際に波動問題を想定した畳み込み積分を計算することで, 両者の計算精度の比較, 検討を行う. 次に, 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM を時間領域 BEM へ適用する方法について述べる. 最後に, 数値解析例として, 3 次元スカラー波動の散乱問題を解析することで, 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQ-BEM の有効性について検討する.

2. 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM の定式化

以下では, 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM の定式化について説明する. なお, 線形多段法を用いた CQ-BEM の定式化については例えば, 文献 (2)(3) などを参照されたい.

2.1. 陰的 Runge-Kutta 法

Runge-Kutta 法 (7) は常微分方程式の近似解法として, 最も広く利用されている方法の一つであり, 次の常微分方程式

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = f(t, y), \qquad y(0) = y_0 \tag{1}$$

2012 年 9 月 29 日受付, 2012 年 11 月 12 日受理

に対する一般的な形式は, 時間増分を Δt, 時刻 $n\Delta t$ における関数値 y_n を $y_n = y(n\Delta t)$ とすれば, 次のように表すことができる.

$$Y_{ni} = y_n + \Delta t \sum_{j=1}^{m} a_{ij} f(t_n + c_j \Delta t, Y_{nj}) \quad (i = 1, ..., m) \tag{2}$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \sum_{j=1}^{m} b_j f(t_n + c_j \Delta t, Y_{nj}) \tag{3}$$

ここで, Y_{ni} は中間変数である. また, a_{ij}, b_i, c_i は Runge-Kutta 法の係数パラメータであり,

$$\begin{cases} \boldsymbol{A} = (a_{ij}), \quad (1 \leq i, j \leq m) \\ \boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_m)^T \\ \boldsymbol{c} = (c_1, ..., c_m)^T \end{cases} \tag{4}$$

と表され, 通常 $c_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ を満足する. ここで, m は係数パラメータの段数である. 係数パラメータ a_{ij}, b_i, c_i の選び方によって, 陽的, 半陰的, 陰的な計算スキームとなるが, 行列 $\boldsymbol{A}$ の対角, 及び右上三角の全てがゼロではない係数パラメータを選択すると陰的手法となる [7]. 本研究における CQM の定式化には, 陰的 Runge-Kutta 法の中でも次の関係

$$b_i = a_{mi} \qquad (i = 1, ..., m) \tag{5}$$

を満足する手法の一つである Radau IIA 法を用いる.

2.2. CQM の定式化

陰的 Runge-Kutta 法の一つである Radau IIA 法を用いた CQM についてまとめておく. いま, $*$ を畳み込み積分として, 関数 $k(t)$ と $g(t)$ の畳み込み積分の一般形

$$u(t) = k(t) * g(t) \left(\equiv \int_0^t k(t-\tau) g(\tau) d\tau \right), \qquad (t > 0) \tag{6}$$

を考える. このとき, $K(s)$ を $k(t)$ の Laplace 変換とすると, Laplace 逆変換は, Laplace パラメータ s を用いて次のように表すことができる.

$$k(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma K(s) \mathrm{e}^{st} ds \tag{7}$$

ここで, i は虚数単位であり, 積分経路 Γ は Laplace 逆変換で定義される $\lim_{R\to\infty}[h - \mathrm{i}R, h + \mathrm{i}R]$ である. 式 (7) を式 (6) に代入すると,

$$u(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma K(s) y_s(t) ds \tag{8}$$

となる. このとき, $y_s(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{s(t-\tau)} g(\tau) d\tau$ であり, $y_s(t)$ は次の常微分方程式の初期値問題の解となる.

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = sy(t) + g(t), \qquad y(0) = 0 \tag{9}$$

従来の CQM では, 式 (9) を線形多段法を用いて近似することによって, 定式化を行ってきた [2]. 以下では m 段の陰的 Runge-Kutta 法を用いた場合の定式化について説明する.

まず, 次の生成多項式を考える.

$$y(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \zeta^n, \quad Y(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \zeta^n, \quad G(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \zeta^n \tag{10}$$

ここで, Y_n, G_n は m 個の成分を持つベクトルであり, それぞれ $Y_n = (Y_{nj})_{j=1}^m$, $G_n = (g(t_n + c_j \Delta t))_{j=1}^m$ である. 式 (1) 中の $f(t, y)$ を $f(t, y) = sy(t) + g(t)$ とすると, 式 (2), (3) より, それぞれ次の関係式を得る.

$$Y(\zeta) = \mathbf{1} y(\zeta) + \Delta t s \boldsymbol{A} Y(\zeta) + \Delta t \boldsymbol{A} G(\zeta) \tag{11}$$

$$(\zeta^{-1} - 1) y(\zeta) = \Delta t s \boldsymbol{b}^T Y(\zeta) + \Delta t \boldsymbol{b}^T G(\zeta) \tag{12}$$

ここで, $\mathbf{1} = (1, ..., 1)^T$ である. 式 (12) の $y(\zeta)$ を式 (11) に代入し, 整理すると次の方程式を得る.

$$\left(I - \Delta t s \mathbf{1} \boldsymbol{b}^T \frac{\zeta}{1-\zeta} - \Delta t s \boldsymbol{A} \right) Y(\zeta) = \Delta t \left(\mathbf{1} \boldsymbol{b}^T \frac{\zeta}{1-\zeta} + \boldsymbol{A} \right) G(\zeta) \tag{13}$$

ここで, I は $m \times m$ の単位行列である. 式 (13) を $Y(\zeta)$ について解くと,

$$Y(\zeta) = \left(\frac{\Upsilon(\zeta)}{\Delta t} - sI \right)^{-1} G(\zeta) \tag{14}$$

となる. このとき, $m \times m$ 行列 $\Upsilon(\zeta)$ は

$$\Upsilon(\zeta) = \left(\mathbf{1} \boldsymbol{b}^T \frac{\zeta}{1-\zeta} + \boldsymbol{A} \right)^{-1} \tag{15}$$

である. Radau IIA 法を用いる場合, 陰的 Runge-Kutta 法の係数パラメータが式 (5) を満足するため, $y_{n+1} = Y_{nm}$ となる. ここで,

$$U_n = (u(t_n + c_j \Delta t))_{j=1}^m, \qquad U(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \zeta^n \tag{16}$$

とすると, 式 (8) の $y_s(t), u(t)$ をそれぞれ式 (14) の $Y(\zeta)$ と式 (16) の $U(\zeta)$ で置き換えれば, 式 (8) は次のように書き直せる.

$$U(\zeta) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma K(s) \left(\frac{\Upsilon(\zeta)}{\Delta t} - sI \right)^{-1} G(\zeta) ds \tag{17}$$

このとき, $m \times m$ の重み関数行列 W_n を $W(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n \zeta^n$ とし,

$$\Delta t W(\zeta) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma K(s) \left(\frac{\Upsilon(\zeta)}{\Delta t} - sI \right)^{-1} ds \tag{18}$$

と定義する. すると, 式 (17) より,

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \zeta^n = \Delta t \sum_{n=0}^{\infty} W_n \zeta^n \sum_{n=0}^{\infty} G_n \zeta^n \tag{19}$$

となり, コーシー積の関係から,

$$U_n = \Delta t \sum_{\nu=0}^{n} W_{n-\nu} G_\nu \tag{20}$$

を得る. このとき, $y_{n+1} = Y_{nm}$ であることを考慮すると, 式 (8), (17) より, u_{n+1} は U_n の m 番目の成分と一致することがわかる.

2.3. 重み関数行列 W_n の具体的な表現

最終的に帰着した式 (20) に含まれる $m \times m$ の重み関数行列 W_n の具体的な表現を示す. 式 (18) の右辺積分核は s が $m \times m$ 行列 $\Upsilon(\zeta)/\Delta t$ の固有値であるときに特異性を示すこ

とがわかる. このとき, $K(s)$ に特異性が存在せず, $\Upsilon(\zeta)/\Delta t$ の固有値を λ_i $(i=1,...,m)$ とすると, 固有値が重解を持たない場合, 式 (18) は留数定理によって,

$$\Delta t W(\zeta)=\sum_{i=1}^{m}\lim_{s\to\lambda_i}K(s)(\lambda_i-s)\left(\frac{\Upsilon(\zeta)}{\Delta t}-sI\right)^{-1} \tag{21}$$

となる. $\Delta t W_n$ の計算は線形多段法を用いた CQM と同様にコーシー積分の形式で行い, 台形則で離散近似すると次の表現を得る.

$$\begin{aligned}\Delta t W_n &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|\zeta|=\mathcal{R}}\left[\sum_{i=1}^{m}K(\lambda_i)\boldsymbol{E}_i(\zeta)\right]\zeta^{-n-1}d\zeta\\ &\simeq \frac{\mathcal{R}^{-n}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\sum_{i=1}^{m}K(\lambda_i^l)\boldsymbol{E}_i(\zeta_l)\right]\mathrm{e}^{-\frac{2\pi inl}{L}}\end{aligned} \tag{22}$$

このとき, $m\times m$ 行列 $\boldsymbol{E}_i(\zeta)$ は,

$$\boldsymbol{E}_i(\zeta)=\lim_{s\to\lambda_i}(\lambda_i-s)\left(\frac{\Upsilon(\zeta)}{\Delta t}-sI\right)^{-1} \tag{23}$$

と定義しており, λ_i^l は $\Upsilon(\zeta_l)/\Delta t$ の固有値である. また, $\zeta_l=\mathcal{R}\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}l/L}$ である. $\mathcal{R}$, L などのパラメータは線形多段法を用いた CQM と同様である [3]. そのため, $\mathcal{R}^L=\sqrt{\epsilon}$ であり, ϵ は誤差パラメータである. 総時間ステップ数 N を $N=L$ とすれば, 式 (22) は FFT を用いて $O(L\log L)$ のオーダーで計算を行うことができる. しかしながら, 重み関数 W_n が $m\times m$ の行列となることから, 総時間ステップ数が同じ場合, 線形多段法を用いた CQM よりも計算コストが大きくなる可能性があることに注意する.

ただし, 式 (18) において, $\Upsilon(\zeta)/\Delta t$ の固有値が重解を持ち, 2 位以上の極となる場合, $\Delta t W_n$ は式 (21) の表現にはならない. しかしながら, ζ は s に対して独立であること, $\Upsilon(\zeta)/\Delta t$ の固有値が重解になる場合の ζ は陰的 Runge-Kutta 法の係数パラメータから解析的に求められることから, 重解になるような ζ を避けるように一周積分の半径 $\mathcal{R}$ を決めてやれば, 式 (22) を評価することができる.

3. 畳み込み積分の精度比較

前節で説明した陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM とこれまでの線形多段法を用いた CQM, それぞれの畳み込み積分の計算精度を比較する. 以下では, 式 (6) の $k(t)$ を 2 次元, もしくは 3 次元スカラー波動問題に対する基本解 $G^{2D}(r,t)$, $G^{3D}(r,t)$ でそれぞれ置き換えた次の畳み込み積分を評価する.

$$u(t)=\int_0^t G^{\beta}(r,t-\tau)g(\tau)d\tau \tag{24}$$

ただし, r はソース点 $\boldsymbol{y}$ と観測点 $\boldsymbol{x}$ の距離, すなわち $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ であり, $\beta=2D$ または $3D$, $g(\tau)=\tau\mathrm{e}^{\tau}$ とする. 2 次元, 及び 3 次元スカラー波動問題に対する時間領域基本解は次式で与えられる.

$$G^{2D}(r,t)=\frac{H\left(t-\frac{r}{c}\right)}{2\pi c^2\sqrt{t^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2}} \tag{25}$$

$$G^{3D}(r,t)=\frac{1}{4\pi r}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right) \tag{26}$$

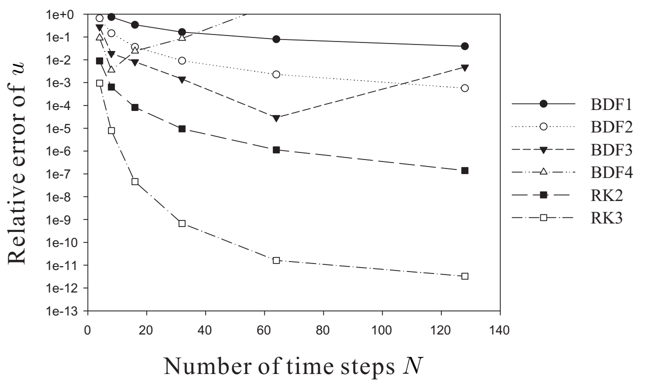

Fig. 1　Relative error of the convolution integral obtained by CQM with BDF or RK ($\beta=2D$, $\epsilon=10^{-26}$).

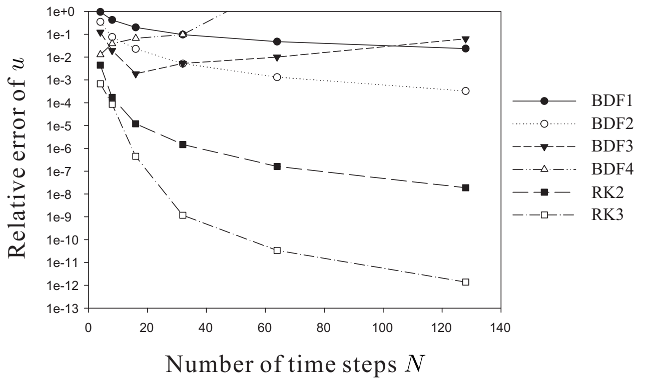

Fig. 2　Relative error of the convolution integral obtained by CQM with BDF or RK ($\beta=3D$, $\epsilon=10^{-12}$).

ここで, $H(x)$ は Heaviside 関数, $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数であり, c は領域中を伝搬する波動の速度である. 実際の CQM の計算では, 式 (22) の $K(s)$ は Laplace 変換領域基本解となる. 式 (25), (26) に対応する 2 次元, 及び 3 次元スカラー波動問題に対する Laplace 変換領域基本解はそれぞれ次のように与えられる.

$$\hat{G}^{2D}(r,s)=\frac{1}{2\pi}K_0\left(\frac{sr}{c}\right) \tag{27}$$

$$\hat{G}^{3D}(r,s)=\frac{1}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\frac{sr}{c}} \tag{28}$$

ここで, $K_0(x)$ は 0 次の第 2 種変形ベッセル関数である.

以下の計算では, 線形多段法を用いた CQM には, 生成多項式の商の計算に k 次の後退差分 (BDFk, $1\le k\le 4$) を用い, 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM では, m 段の Radau IIA 法のパラメータ (RKm, $m=2,3$) を用いることとする. このとき, Radau IIA 法の積分次数 p は $p=2m-1$ となり, 2 段 3 次, 3 段 5 次共に A 安定である. 計算に用いた各種パラメータは, $r=1$, $c=1$, $t=2$, $\Delta t=t/(N-1)$ とし, 総時間ステップ数 N を変数とした. また, 全ての影響関数の計算において $L=N$ とし, 式 (22) の外側の総和は FFT によって計算した.

まず, $\beta=2D$ とした 2 次元スカラー波動問題の基本解を用いた場合の式 (24) を CQM で計算し, その結果と参照解とを比較した場合の相対誤差を Fig. 1 に示す. 参照解である式 (24) の畳み込み積分の評価には数式処理ソフト Mathematica を用いた. また, ここでは $\epsilon=10^{-26}$ として計算を行ってい

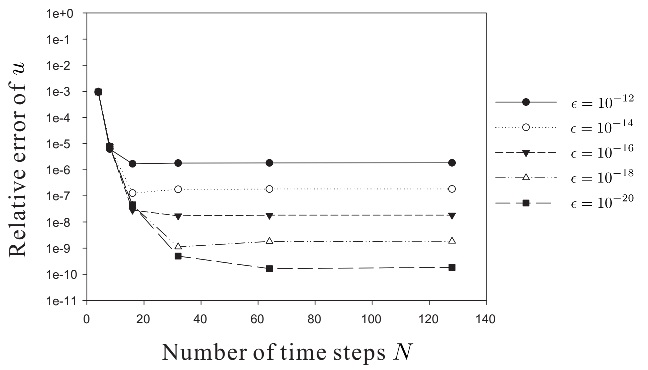

Fig. 3　Relative error of the convolution integral by varying ϵ ($\beta = 2D$, RK3).

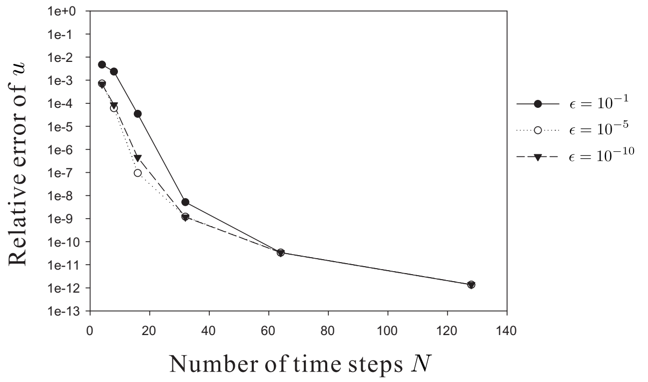

Fig. 4　Relative error of the convolution integral by varying ϵ ($\beta = 3D$, RK3).

る. Fig. 1 より, BDF2 の方が BDF1 より精度良く計算できていることが見て取れる. また, BDF3, 4 を用いた場合は総時間ステップ数を大きくしていくと, 精度が低下していくことがわかる. BDFk ($k \geq 3$) は A 安定ではないため, 計算が不安定になっていると考えられる. また, RK2, 3 は比較的, 高い精度で安定に計算できていることが確認できる.

次に, $\beta = 3D$ とした 3 次元スカラー波動問題の基本解を式 (24) に用いた場合の CQM による計算結果と参照解とを比較した場合の相対誤差を Fig. 2 に示す. ただし, $\epsilon = 10^{-12}$ とし, 式 (24) の参照解は $t > r/c$ を考慮することで次のように解析的に求めた.

$$u(t) = \frac{1}{4\pi r}\left(t - \frac{r}{c}\right)\mathrm{e}^{\left(t-\frac{r}{c}\right)} \tag{29}$$

Fig. 2 より, 相対誤差と総時間ステップ数の関係は 2 次元の場合と概ね同様の傾向を示しており, BDF2 の方が BDF1 より精度良く計算できていることがわかる. また, BDF3, 4 では総時間ステップ数を大きくすると, Fig. 1 と同様に精度が低下していく様子がわかる. 一方, RK2, 3 は比較的, 高い精度で安定に計算できていることが見て取れる.

なお, ここでは Fig. 1, 2 に対する計算に, それぞれ異なる誤差パラメータ ϵ を用いている. この理由は, 誤差パラメータ ϵ はコーシー積分の許容誤差を決定するためのパラメータであるが, この値を変化させた場合の許容誤差の挙動が 2 次元問題と 3 次元問題では同様にならないためである. Fig. 3, 4 に RK3 において ϵ を変化させた場合の 2 次元, 及び 3 次元問

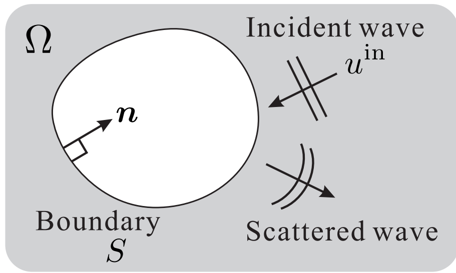

Fig. 5　Analysis model for a 3-D scalar wave problem.

題に対する相対誤差を示す. ここで, RK3 に限定したのは最も相対誤差が小さくなり, 許容誤差程度まで到達することが期待できるためである. Fig. 3 より, $\beta = 2D$ の場合, ϵ の値によって, ある一定の相対誤差に到達すると, 総時間ステップ数を大きくしてもそれ以上に相対誤差が小さくならないことがわかる. これは相対誤差が許容誤差に到達するためであると予想される. そのため, $\beta = 2D$ の場合の畳み込み積分に対する許容誤差は Fig. 3 から推定すると, $O(\sqrt{\epsilon})$ 程度であると考えられる. 一方, $\beta = 3D$ の場合の畳み込み積分に対する許容誤差は Fig. 4 より, ϵ を変化させた場合, 相対誤差の挙動に違いはあるものの, 最小の相対誤差に関しては ϵ に依存しない様子がわかる. これらの計算には空間に関する離散化は含まれていないため, $\beta = 2D, 3D$ それぞれの場合に対する許容誤差の挙動の違いは, Heaviside 関数とデルタ関数の違いによるものであると考えられる. そのため, ϵ によって決定される許容誤差は, 積分核の関数によって挙動が変化する場合があり, 積分核の関数, 及び必要な精度によって適切な ϵ の値を設定する必要があることがわかる.

4. 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQ-BEM

前節では, 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM が, 畳み込み積分をこれまでの CQM より高精度かつ安定に計算できることを示した. 本節では, この陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM をいかにして時間領域 BEM へ適用するかについて説明する. なお, 以下では, 3 次元スカラー波動問題を対象とした場合の定式化について説明を行う.

4.1. 時間領域境界積分方程式

Fig. 5 のような無限領域 Ω 中に閉じた境界面 S を有する散乱体が存在する外部散乱問題を考える. 3 次元スカラー波動問題に対する波動方程式は圧力 $u(\boldsymbol{x}, t)$ に関して次のように与えられる.

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{x}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega \tag{30}$$

式 (30) に対する積分方程式を導き, 界面 S に対して極限操作を行い, 時間領域境界積分方程式を導出すると次のようになる.

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}, t) = u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, t) &+ \int_S G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) * q(\boldsymbol{y}, t) dS_y \\ &- \int_S S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) * u(\boldsymbol{y}, t) dS_y \end{aligned} \tag{31}$$

ここで, $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$, $S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ は 3 次元スカラー波動問題に対する時間領域基本解, 及び対応する二重層核であり, $C(\boldsymbol{x})$ は

境界形状に依存する自由項 [8] を表している. また, $q(\boldsymbol{x},t)$ は $u(\boldsymbol{x},t)$ の法線方向勾配であり, $q(\boldsymbol{x},t) = \partial u(\boldsymbol{x},t)/\partial n(\boldsymbol{x})$ で表される. 右辺第 3 項の $⨍$ はコーシーの主値の意味で積分を評価することを表している. 以下では, 式 (31) を陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM で離散化することを行う.

4.2. 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM による離散化

式 (31) を時間に関して陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM, 空間に関して選点法で離散化すれば, 次の式を得る.

$$
\begin{aligned}
C(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}, n\Delta t + c_i\Delta t) &= u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x}, n\Delta t + c_i\Delta t) \\
&+ \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Bigg[A_\alpha^{ij;n-k}(\boldsymbol{x})q_\alpha(k\Delta t + c_j\Delta t) \\
&\qquad - B_\alpha^{ij;n-k}(\boldsymbol{x})u_\alpha(k\Delta t + c_j\Delta t)\Bigg], \\
&\qquad (i = 1, ..., m), \quad (n = 0, ..., N-1) \qquad (32)
\end{aligned}
$$

ここで, M は要素数, α は要素番号である. Radau IIA 法の係数パラメータ c_i が $c_m = 1$ となるため, 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM によって離散化された境界積分方程式 (32) は時刻 $c_1\Delta t$ から $N\Delta t$ に対する式となっている. また, 補間型の Runge-Kutta 法を用いているため, 標本点である各 c_i での圧力, 及びその勾配も, その時間ステップにおける近似値とすることは可能である [7]. 一方, $A_\alpha^{ij;\kappa}(\boldsymbol{x})$, 及び $B_\alpha^{ij;\kappa}(\boldsymbol{x})$ は CQM を適用することにより得られる 3 次元スカラー波動問題の基本解, 及び二重層核に対する影響関数, $\mathbf{A}_\alpha^\kappa(\boldsymbol{x})$, 及び $\mathbf{B}_\alpha^\kappa(\boldsymbol{x})$ はそれらに対する $m \times m$ の影響関数行列であり, 次のように表される.

$$
A_\alpha^{ij;\kappa}(\boldsymbol{x}) = \left(\mathbf{A}_\alpha^\kappa(\boldsymbol{x})\right)_{ij}, \qquad B_\alpha^{ij;\kappa}(\boldsymbol{x}) = \left(\mathbf{B}_\alpha^\kappa(\boldsymbol{x})\right)_{ij} \qquad (33)
$$

$$
\mathbf{A}_\alpha^\kappa(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathcal{R}^{-\kappa}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\sum_{i=1}^{m}\int_{S_\alpha}\hat{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda_i^l)dS_y\boldsymbol{E}_i(\zeta_l)\right]\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}\kappa l}{L}} \qquad (34)
$$

$$
\mathbf{B}_\alpha^\kappa(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathcal{R}^{-\kappa}}{L}\sum_{l=0}^{L-1}\left[\sum_{i=1}^{m}⨍_{S_\alpha}\hat{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda_i^l)dS_y\boldsymbol{E}_i(\zeta_l)\right]\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}\kappa l}{L}} \qquad (35)
$$

ここで, $\hat{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s)$, 及び $\hat{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s)$ は式 (28) で与えられた 3 次元スカラー波動問題に対する Laplace 変換領域基本解, 及び対応する二重層核であり, $\hat{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s)$ は次のように表される.

$$
\hat{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s) = \frac{\partial\hat{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},s)}{\partial n(\boldsymbol{y})} \qquad (36)
$$

式 (32) は Runge-Kutta 法の段数 m, 要素数 M, 及び時間ステップ数 N, すなわち合計 mMN 個の未知数, 及び方程式が存在することがわかる. よって適当な直接法や反復法を用いることにより, mMN 個の境界未知量を求めることができる.

5. 数値解析例

前節で示した陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQ-BEM の数値解析例を示す. 解析モデルは Fig. 6 に示すような半径 a の球形の散乱体による平面波の散乱問題とし, 点 A における散乱波形を提案手法によって計算する. 散乱体の境界条件は圧力勾配ゼロ ($q(\boldsymbol{x},t) = 0,\ \boldsymbol{x} \in S$) とした. また, 入射波は次式で表される x_1 方向に伝搬する平面波を用いた.

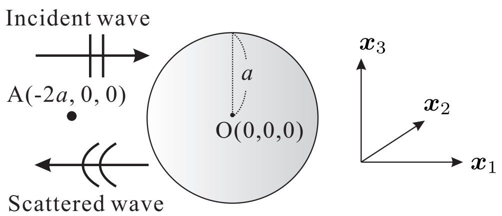

Fig.6 Analysis model for numerical examples.

$$
u^{\mathrm{in}}(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} u_0\,(1-\cos\theta) & (0 \le \theta \le 2\pi) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \qquad (37)
$$

$$
\theta = \frac{2\pi c}{\lambda^{\mathrm{in}}}\left(t - \frac{x_1 + a}{c}\right) \qquad (38)
$$

ここで, u_0 は入射波の振幅, λ^{in} は入射波の波長である. このような球形の散乱体による入射平面波の散乱問題は Pao と Mow により周波数領域での解析解が与えられている [9]. そこで, 本数値解析例では, Pao と Mow による周波数領域での解析解を逆フーリエ変換することにより, 時間領域での数値解を導出し, CQ-BEM による数値計算結果と比較し, 精度の検証を行う. また, 本数値解析例における計算パラメータは, 散乱体の半径による無次元化を行ったものを用いた. 波長を $\lambda^{\mathrm{in}}/a = 1$ とし, 時間増分 $c\Delta t/a$ を変化させて計算を行った. また, $\epsilon = 10^{-12}$ とし, 境界 S を三角形要素を用いた選点法で離散化した. 要素サイズは 1 辺の長さが波長 λ^{in}/a の 1/10 以下になるよう設定した. 全要素数 $M = 3176$ である.

まず, 線形多段法として BDF1, BDF2 を用いた場合の CQ-BEM による解析結果をそれぞれ Fig. 7, 8 に示す. Fig. 7 より, BDF1 を用いた場合は時刻 $ct/a = 1$ 付近で発生する散乱波の振幅について大きな数値誤差を確認できる. また, 時刻 $ct/a = 5$ 付近では, 数値解が振動している様子がわかる. 一方, Fig. 8 より, BDF2 を用いた場合においても, 時刻 $ct/a = 5$ 以降に数値解が振動している様子がわかる. いずれの場合においても, 時間増分を小さくするにつれて, 精度は向上するものの, BDF2 で最も時間増分が小さい場合においても依然として若干の数値誤差が見受けられる. また, 時刻 $ct/a = 5$ あたりから大きな数値誤差が発生しているのは, 畳み込み積分の精度が低い場合, 遅延ポテンシャルの計算時に誤差が累積し, 散乱体を回り込む振幅の小さい波動を精度良く計算できていないためであると考えられる.

次に陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQ-BEM による解析結果を, それぞれ Fig. 9, 10 に示す. RK2, RK3 の陰的 Runge-Kutta 法の係数パラメータにはそれぞれ, 2 段 3 次 ($m = 2$), 及び 3 段 5 次 ($m = 3$) の Radau IIA 法のパラメータを用いている. なお, 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQ-BEM は線形多段法を用いた CQ-BEM よりも時間に関する精度が高いことが期待できるため, 比較的時間増分が大きい場合の結果も示している. Fig. 9 より, RK2 を用いた場合の CQ-BEM では $c\Delta t/a = 0.08\sqrt{3}$ において $ct/a = 5$ 以降に若干の数値誤差を見て取れるものの, Fig. 7, 8 における BDF を用いた場合に比べて, 精度良く計算できている様子がわかる. また, Fig. 10 より, RK3 を用

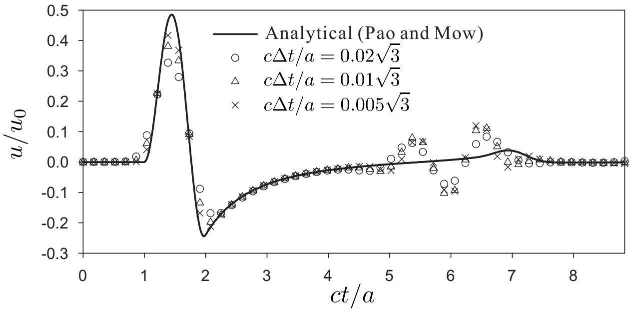

Fig. 7　Time variations of u/u_0 at point A by varying time increment $c\Delta t/a$ (BDF1).

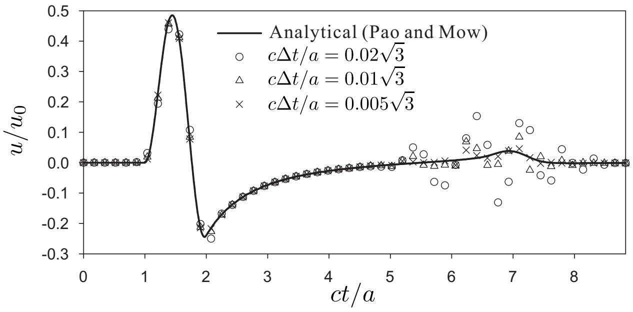

Fig. 8　Time variations of u/u_0 at point A by varying time increment $c\Delta t/a$ (BDF2).

いた CQ-BEM は RK2 を用いた場合に比べてさらに高精度であることがわかる. なお, 時間増分が $c\Delta t/a = 0.005\sqrt{3}$, すなわち総時間ステップ数 $N = 1024$ の場合は何らかの工夫をしないと記憶容量が膨大となるため, 計算を行っていない (必要記憶容量が 700GB 程度必要). また, $c\Delta t/a = 0.08\sqrt{3}$ のとき $c\Delta t > l_e$ (l_e は要素の最大長) となるが, RK3 では精度良く計算できていることがわかる. これは陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQ-BEM では標本点を用いることが影響していると考えられる. なお, A 安定ではない BDF3 を用いた場合, 数値解が発散してしまったことを付け加えておく.

以上の結果から, 陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQ-BEM の方がこれまでの線形多段法を用いた CQ-BEM よりも時間に関する精度が良いことがわかる. しかしながら, m 段の係数パラメータを用いた場合, 重み関数が $m \times m$ の行列となり, 同じ総時間ステップ数で比較した場合, 係数行列の計算や遅延ポテンシャルの行列ベクトル積演算に要する計算量, 必要記憶容量は m^2 倍程度増大した.

6. おわりに

陰的 Runge-Kutta 法を用いた CQM の定式化, 及び時間領域 BEM への適用方法を示した. また, 3 次元スカラー波動問題に対する数値解析例を示し, これまでの線形多段法を用いた CQ-BEM よりも時間に関する精度が高いことを示した. 本提案手法は時間に関する精度は高いが, 計算コストは増大する. そのため, 必要な精度や利用可能な計算コストから段数を決定する必要がある.

今後は, 計算コスト増大を防ぐために, 陰的 Runge-Kutta 法を用いた場合の CQM の高速化について検討するとともに, 高速多重極法の適用を行う予定である. また, 3 次元弾性波動

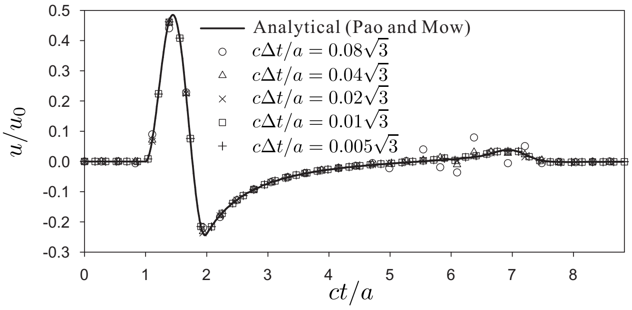

Fig. 9　Time variations of u/u_0 at point A by varying time increment $c\Delta t/a$ (RK2).

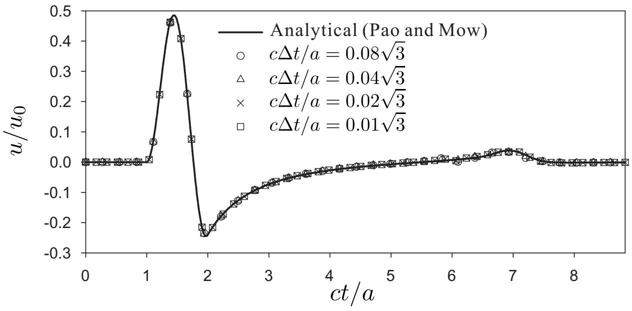

Fig. 10　Time variations of u/u_0 at point A by varying time increment $c\Delta t/a$ (RK3).

問題への拡張も行う予定である.

参考文献

(1) C. Lubich：Convolution quadrature and discretized operational calculus I,II, *Numer. Math.*, **52**(1988), pp. 129-145, 413-425.

(2) 福井卓雄・斎藤隆泰：Lubich の演算子積分法における高速多重極法, 日本シミュレーション学会論文誌, 小特集：境界要素法の新展開, **28**(2009), pp.17-22.

(3) 斎藤隆泰・石田貴之・福井卓雄・廣瀬壮一：演算子積分法および高速多重極法を用いた新しい二次元時間領域動弾性境界要素法について, 応用力学論文集, 土木学会, **11**(2008), pp. 193-200.

(4) T. Saitoh and S. Hirose：Parallelized fast multipole BEM based on the convolution quadrature method for 3-D wave propagation problems in time-domain, IOP Conf. Series: *Materials Science and Engineering*, **10**(2010), 012242.

(5) C. Lubich and A. Ostermann：Runge-Kutta methods for parabolic equations and convolution quadrature, *Math. Comp.*, **60**(1993), pp. 105-131

(6) G. Monegato, L. Scuderi and M. P. Stanić：Lubich convolution quadratures and their application to problems described by space-time BIEs, *Numer. Algor.*, **56**(2011), pp. 405-436.

(7) 小藤俊幸：陰的 Runge-Kutta 法に関する研究, (1992), 名古屋大学学位論文.

(8) 小林昭一編著：波動解析と境界要素法, (2000), 京都大学学術出版会.

(9) Y.-H. Pao and C.-C. Mow：Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations, (1973), Crane and Russak, New York.