

# ACA境界要素法を用いた時間調和SH波の多重散乱解析

Multiple Scattering Analysis of time-harmonic SH waves using ACA-Boundary Element Method

伊海田 明宏<sup>1)</sup>, 斎藤 隆泰<sup>2)</sup>, 廣瀬 壮一<sup>3)</sup>

Akihiro IKAIDA, Takahiro SAITOH and Sohichi HIROSE

- 1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: ikaida.a.aa@m.titech.ac.jp)  
 2) 群馬大学大学院工学研究科 (〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1, E-mail: t-saitoh@gunma-u.ac.jp)  
 3) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: shirose@cv.titech.ac.jp)

In this research, scattering problems of two-dimensional antiplane waves are solved by a ACA-BEM, in which adaptive cross approximation (ACA) is implemented in boundary element analysis to reduce computational time and required memory size. After the ACA procedure is described, comparisons of computational costs between ACA-BEM and conventional BEM are shown. As numerical examples, multiple scattering problems of time harmonic antiplane waves with cavities arranged in prism form are solved. It is shown that scattering behaviors are quite different as the frequency varies.

**Key Words:** Boundary Element Method, Adaptive Cross Approximation (ACA), Multiple Scattering problems

## 1. はじめに

本論文では, 2次元面外波動問題に対するACA (Adaptive Cross Approximation) 境界要素法を用いて多重散乱シミュレーションを行うとともに, ACA境界要素法の有効性について検討する.

これまで, 大規模問題の効率的な境界要素法の計算手法として主に高速多重極法(FMM: Fast Multipole Method)<sup>(1)</sup>やWavelet<sup>(2)</sup>等が用いられてきた. しかしながら, 例えば高速多重極法を適用した場合は, 連立一次方程式から境界未知量を求める際に, GMRES法<sup>(3)</sup>などの反復法の利用が必須となる. そのため, 反復法では収束性が悪く収束解を求めるのに時間がかかるような複雑形状を扱う問題や, 母材と散乱体の弾性定数が著しく異なる場合の周波数領域における多重散乱問題に対しては, 適切な時間内に反復法を収束させるための何らかの工夫が必要となる<sup>(4)</sup>. また高速多重極法は精度の高い結果を短時間で求めることが出来る非常に強力な数値解析手法であるが, 問題の積分核により得手不得手が存在し, 特に基本解が閉じた形式で求められない異方性弾性体中の波動問題等には適用することが難しい. そのため, 汎用性に若干の問題があり, 一般に広く用いられるまでには至っていないのが現状である.

このような背景の中, 近年行列圧縮法の一つである Adaptive Cross Approximation (ACA) が開発され, そのACAを境界要素法に適用し, 電磁場解析<sup>(5)</sup>やクラック解析<sup>(6)</sup>を

行った研究, また Helmholtz 式に対する境界要素法について高速多重極法との比較を行った研究<sup>(7)</sup>等が報告されている. ACAを用いた境界要素法(以下, ACA境界要素法)は係数行列の代数的な操作により行列を圧縮し, 計算時間や記憶容量を削減するため, 積分方程式の核に依存しない. またACA境界要素法は, 境界未知量を求める計算に反復法だけでなく直接法も用いることができるため, 反復法を用いた場合の収束性に関する問題も解決することが期待できる.

そこで本論文では, 二次元面外波動の散乱問題に対するACA境界要素法を開発し, 多重散乱解析へ応用する. 波動の多重散乱解析は, 近年フォノンニック結晶などを扱う新材料分野などで特に注目を集めている. 以下では, まず従来の境界要素法による定式化について簡単に説明し, 次にACA境界要素法の具体的な解析手順とアルゴリズムを説明する. そして実際に数値解析を行うためのいくつかの検討を行った後, ACA境界要素法を用いた二次元面外波動の多重散乱解析例を示し, 最後に結論および今後の展望について述べる.

## 2. 二次元面外波動問題に対する境界要素法

### 2.1. 支配方程式

Fig.1で表されるような等方均質な線形弾性体における, 周波数領域での二次元面外波動の散乱問題を考える. 以下の定式化では, 物体力を無視し, 散乱体の外部領域を $D$ , その境界を $\partial D$ とする. このとき, 面外波動場 $u(x, \omega)$ は次の方程式を

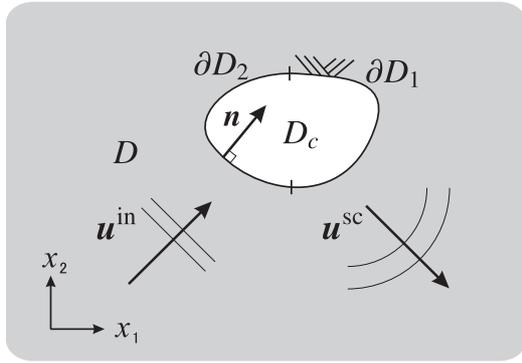


Fig. 1 SH wave scattering by a scatterer  $D_c$ .

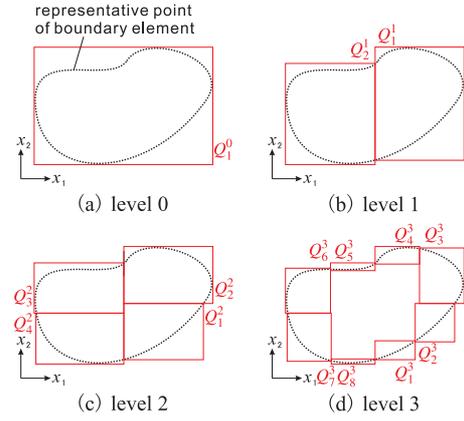


Fig. 2 Cluster division.

満足する.

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, \omega) + k^2 u(\mathbf{x}, \omega) = 0 \quad (1)$$

ここで,  $\mathbf{x}$  は観測点の位置ベクトル,  $\omega$  は角周波数,  $k$  は波数である. また, 境界条件は

$$u = \bar{u} \text{ on } \partial D_1, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{t} \text{ on } \partial D_2, \quad \partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2 \quad (2)$$

で与える. ここで,  $\bar{(\cdot)}$  は与えられた境界値を表し,  $\mu$  はせん断弾性係数,  $\partial/\partial n$  は境界  $\partial D$  上の外向き法線微分である.

## 2.2. 境界積分方程式

式 (1),(2) の解  $u(\mathbf{x}, \omega)$  は次の境界積分方程式を解くことにより得られる<sup>(8)</sup>.

$$C(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, \omega) = u^{\text{in}}(\mathbf{x}, \omega) + \int_{\partial D} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)t(\mathbf{y}, \omega)ds_{\mathbf{y}} - \int_{\partial D} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)u(\mathbf{y}, \omega)ds_{\mathbf{y}} \quad (3)$$

ここで,  $C(\mathbf{x})$  は自由項<sup>(8)</sup>,  $u^{\text{in}}(\mathbf{x}, \omega)$  は入射波,  $\mathbf{y}$  はソース点の位置ベクトルである. 本論文では滑らかな境界を想定するため,  $\mathbf{x} \in \partial D$  について  $C(\mathbf{x}) = 1/2$  である. また  $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = i/(4\mu)H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$  は基本解,  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \mu \cdot \partial U(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega)/\partial n$  は基本解の表面力を表す. ここで,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $H_0^{(1)}$  は 0 次の第 1 種 Hankel 関数である. 選点法を用いて境界  $\partial D$  を  $N$  個の一定要素に分割し, 式 (3) を離散化すると,

$$C(\mathbf{x}_i)u(\mathbf{x}_i) = u^{\text{in}}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^N \bar{U}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j, \omega)t(\mathbf{y}_j, \omega) - \sum_{j=1}^N \bar{T}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j, \omega)u(\mathbf{y}_j, \omega) \quad (4)$$

となる. ただし,  $\bar{U}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j, \omega) = \int_{\partial D_j} U(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}, \omega)ds_{\mathbf{y}}$  であり,  $\bar{T}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j, \omega) = \int_{\partial D_j} T(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}, \omega)ds_{\mathbf{y}}$  である. 式 (4) を行列とベクトルを用いて書き表し, それらの未知成分を左辺に, 既知成分を右辺にそれぞれ移項して整理することで以下のような連立一次方程式に帰着できる.

$$M\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (5)$$

ただし,  $M$  は境界要素係数行列,  $\mathbf{x}$  は境界未知ベクトル,  $\mathbf{f}$  は既知ベクトルである. 以下では係数行列  $M$  を ACA を用

いて圧縮することで, 境界要素法を効率的に実行する方法について述べる.

## 3. Adaptive Cross Approximation (ACA)

ここでは Adaptive Cross Approximation (ACA) 等について簡単にまとめておく. ACA の詳細については, 例えば文献<sup>(9)</sup>を参照されたい.

ACA は Bebendorf<sup>(10)</sup> が提案した行列の近似圧縮手法で, 式 (5) の係数行列  $M$  の保存に必要な記憶容量と行列ベクトル積の計算量を削減することができる. ACA では, まず係数行列を境界要素代表点の配置をもとに部分行列に分割し, 階層的な行列構造を作成する (3.1 節). その行列構造において, 近傍場からの影響を表す部分行列は通常の行列の形で保存される. 一方, 遠方場からの影響を表す部分行列は 3.3 節で述べる方法で 3.2 節で紹介する低ランク行列に近似され, 圧縮された形で保存される.

### 3.1. 境界要素係数行列の分割

境界要素係数行列の分割の前に, 境界要素全体を, 境界要素の集合である幾つかの小さなクラスタに分割する. 初めに全ての境界要素を一つのクラスタとして, 次の様な再帰手続きを適用する.

1. クラスタ全体を取り囲む最小の長方形を領域上に考える. ただし, 長方形の横と縦方向の辺は  $x_1, x_2$  軸とそれぞれ平行であるとする.
2. クラスタに含まれる境界要素の数が  $n_{\text{min}}$  以下であればこれ以上の分割は行わない. この条件を満たさない場合のみ手順 3 以降へ進む.
3. 長方形の  $x_1, x_2$  軸方向の辺のうち, 長い方の二辺を選ぶ. 選んだ二辺の中点を結んで長方形を二つに分割し, 新しい長方形内の境界要素をまとめて新しいクラスタとする.
4. 分割後の新しいクラスタに対して, 上記の手順を再帰的に適用する.

Fig. 2 は, 境界要素代表点が, レベル 3 まで分割される様子を表している. このレベルは分割回数のごとであり, 前述の手順が適用された回数と一致する. すなわち, レベル 0 のクラスタ

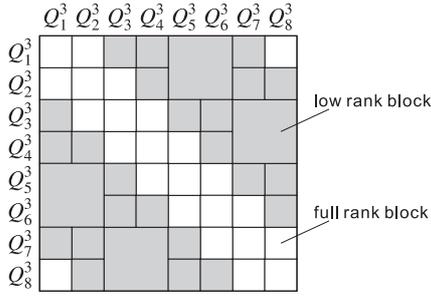


Fig. 3 Submatrices of the coefficient matrix for clusters of Fig.2(d).

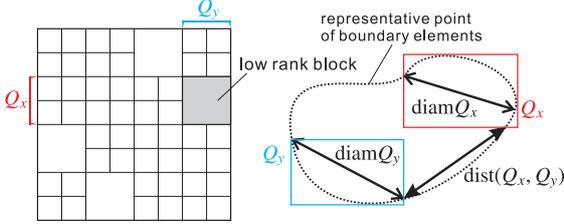


Fig. 4 Admissibility condition between clusters  $Q_x$  and  $Q_y$ .

$Q_1^0$  に対して前述の手順を適用すると、レベル1の  $Q_1^1, Q_2^1$  が作成され、さらにそれぞれのクラスタからレベル2の  $Q_1^2, Q_2^2$  および  $Q_3^2, Q_4^2$  が作成される。ここで、分割後のクラスタを取り囲む長方形は、手順1が適用されるごとに新しく設定されるため、分割前の長方形の辺と必ずしも一致するとは限らないことに注意する。

境界要素法の係数行列は、行方向の添字が観測点となる境界要素に対応し、列方向の添字がソース点となる境界要素に対応しているため、境界要素のクラスタの組み合わせに対応して係数行列が部分行列に分割される。Fig.3はFig.2(d)に対応する分割された係数行列の例を表している。行列の行方向と列方向に併記されている  $Q_1^3$  等は、Fig.2(d)に表されたレベル3のクラスタに対応し、それぞれ行方向と列方向の成分に一致する。灰色の部分行列は次節で述べる低ランク行列に近似する部分行列 (low rank block)、白色は低ランク行列に近似することなく全成分を直接扱う部分行列 (full rank block) である。

部分行列の行方向の添字に対応したクラスタを  $Q_x$ 、列方向の添字に対応したクラスタを  $Q_y$  とすると、近似の許容条件 (admissibility condition) は次式で表される。

$$\min \{ \text{diam}Q_x, \text{diam}Q_y \} \leq \eta \cdot \text{dist}(Q_x, Q_y) \quad (6)$$

ここで、 $\text{diam}Q_x$  はクラスタ  $Q_x$  の径であり、クラスタ内の境界要素代表点間の距離の最大値で表される。また  $\eta (> 0)$  は近似を許容する部分行列の数に影響するパラメータ、 $\text{dist}(Q_x, Q_y)$  はクラスタ  $Q_x, Q_y$  同士の距離であり、各クラスタから任意に選択した境界要素代表点間の距離の最小値で表される。

例として Fig.4 に式 (6) における admissibility condition と、対応する部分行列およびクラスタの関係を示す。Fig.4 左の行列の灰色部分すなわち低ランク行列は、その行方向と列方向の添字に対応した境界要素の組から成るクラスタ  $Q_x, Q_y$  に一致している。

### Algorithm 1 Adaptive Cross Approximation

- 1: Let  $i_1 = \text{InitialRow}$
- 2: **for**  $k = 1$  to  $m$  **do**
- 3:  $\bar{\mathbf{b}}_k^* = M^P(i_k, :) - \sum_{r=1}^{k-1} (\mathbf{a}_r)_{i_k} \mathbf{b}_r^*$
- 4:  $j_k = \text{argmax}_j (|(\bar{\mathbf{b}}_k)_j|)$
- 5:  $\mathbf{b}_k = (\bar{\mathbf{b}}_k)_{j_k}^{-1} \bar{\mathbf{b}}_k$
- 6:  $\mathbf{a}_k = M^P(:, j_k) - \sum_{r=1}^{k-1} (\mathbf{b}_r)_{j_k} \mathbf{a}_r$
- 7: **if**  $(\|\mathbf{a}_k\|_F \|\mathbf{b}_k\|_F \leq \varepsilon \|M_k^P\|_F)$  **exit**
- 8:  $i_{k+1} = \text{argmax}_i (|(\mathbf{a}_k)_i|)$
- 9: **end for**

### 3.2. 低ランク行列

ACAを適用する部分行列の近似法についてまとめておく。任意の部分行列  $M^P \in \mathbb{C}^{m \times n}$  は、次式のように行列  $A, B^*$  の積で表される低ランク行列  $M_k^P$  に近似することができる。

$$M^P \simeq M_k^P = AB^* = \sum_{i=1}^k \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i^* \quad (7)$$

この操作を低ランク近似と呼ぶ。ここで、 $k (\leq \min\{m, n\})$  は近似のランクであり、 $(\cdot)^*$  は行列成分の複素共役かつ行列の転置をとる随伴作用素である。また  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{C}^{m \times 1}$  および  $\mathbf{b}_i \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  は、それぞれ行列  $A \in \mathbb{C}^{m \times k}$  および  $B \in \mathbb{C}^{n \times k}$  の  $i$  列ベクトルである。近似後の行列  $M_k^P$  は、近似の精度  $\varepsilon$  に關して次式を満足するものとする。

$$\|M^P - M_k^P\|_F \leq \varepsilon \|M^P\|_F \quad (8)$$

ここで、 $\|\cdot\|_F$  は行列のフロベニウスノルムであり、例えば  $\|M^P\|_F$  は、 $M^P$  の成分  $M_{ij}^P$  または  $M^P$  の特異値  $\sigma_i$  を用いて

$$\|M^P\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |M_{ij}^P|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min\{m, n\}} \sigma_i^2} \quad (9)$$

と与えられる。行列  $M^P$  の全成分を保存するために必要な記憶容量は  $O(mn)$  で表され、同様に  $M_k^P$  の場合は  $O(k(m+n))$  であるため、ランク  $k$  が  $k < mn/(m+n)$  を満たす場合に行列が圧縮される。これにより、係数行列に直接法または間接法を適用する際の、行列ベクトル積の計算量も同様に  $O(k(m+n))$  となる。

### 3.3. 低ランク行列の作成手順

行列  $M^P$  の低ランク行列  $M_k^P = \sum_{r=1}^k \mathbf{a}_r \mathbf{b}_r^*$  および式 (8) を満たすランク  $k$  は、 $M^P$  を特異値分解し、小さい特異値および対応するその特異値ベクトルを切り捨てることで求まる。しかしながら、特異値分解の計算コストは  $m \geq n$  のとき  $14mn^2 + 8n^3$  <sup>(9)</sup> と非常に大きいため、実用的ではない。ここでは、特異値分解を用いる場合と比較してランク  $k$  が若干大きくなるが、低いコストで計算可能である ACA を用いて、低ランク行列を漸近的に求める具体的な手順について述べる。

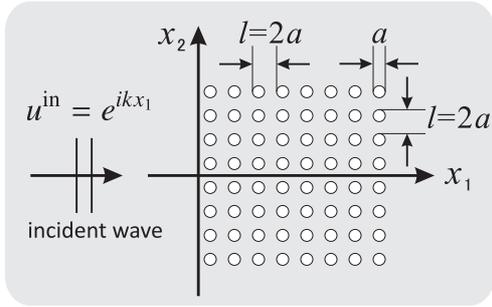


Fig. 5 Multiple scattering model with  $8 \times 8$  cavities.

本論文で用いたアルゴリズム<sup>(5)</sup>を Algorithm 1 に示す。ここでは  $M_k^p$  を表すために必要となる成分のみを計算しているため、係数行列を求めるための計算量は削減される。ここで、 $M^p \in \mathbb{C}^{m \times n}$  は ACA を適用する部分行列で、次のように近似行列  $M_k^p$  と残差  $R_k$  に分けられるものとする。

$$M^p = M_k^p + R_k \quad (10)$$

Algorithm 1 に示す  $k$  はステップ数で、do ループ脱出時の  $k$  が近似行列のランクとなる。 $\bar{b}_k$  は、 $k$  ステップ目で得られた列ベクトル  $b_k$  の正規化前のベクトルであり、 $i_k, j_k$  は残差  $R_k$  から選択された行・列それぞれの成分である。また  $(a_r)_{i_k}$  などは列ベクトル  $a_r$  の  $i_k$  成分を表すことに注意する。

ここで、Algorithm 1 を実行する際の注意点について補足しておく。ここでは、残差の初期値を  $R_0 = M^p$  とし、1 ステップ毎に残差  $R_k$  から行および列を選択して  $a_k, b_k$  へ保存するといった操作を実行することになる。ただし、 $k$  ステップ目の残差  $R_k$  を明示的に保存することはせず、式 (10) を変形した  $R_k = M^p - \sum_{r=1}^k a_r b_r^*$  より残差  $R_k$  を求める。また、3 行目と 6 行目で  $k-1$  ステップ目の残差  $R_{k-1}$  のそれぞれ  $i_k$  行成分と  $j_k$  列成分のみが使われるため、行列  $M^p$  の成分は出力される低ランク行列の成分に必要なものだけ計算すればよい。このように、Algorithm 1 では行列  $M^p$  の成分全体を求めることはしないため、 $M_k^p$  のフロベニウスノルム  $\|M_k^p\|_F$  は次の漸化式によりループのステップ毎に求める。

$$\|M_k^p\|_F^2 = \|M_{k-1}^p\|_F^2 + 2 \sum_{r=1}^{k-1} (a_r^* a_r) (b_r^* b_r) + \|a_k\|_F^2 \|b_k\|_F^2 \quad (11)$$

#### 4. 数値解析例

多重散乱解析は、複合材料に対する超音波非破壊評価の定量化を目的として、様々な数値解析手法を用いて行われてきた<sup>(11)</sup>。近年では、フォトニック結晶や、フォノン結晶といった新材料の応用分野においても、盛んに解析が行われているが、特に母材と散乱体の弾性定数が大きく異なると反復法の収束特性が著しく悪化する。そのため、反復法を用いる必要がない ACA 境界要素法は、そのような収束特性が悪い問題を特別な工夫をすることなく直接法を用いて効率よく解析することが可能である。これらを踏まえて、本節では、ACA 境界要素法を用いた多重散乱解析を行う。

Table 1 Influence of the parameter  $\varepsilon$  on memory requirements, computational time, and relative error in the norm of unknown vector.

$\varepsilon$	memory[%]	time[s]	$\frac{\ x_{ACA} - x\ _2}{\ x\ _2}$
$10^{-6}$	4.65	226.5	$7.22 \times 10^{-7}$
$10^{-5}$	3.73	197.5	$4.96 \times 10^{-6}$
$10^{-4}$	3.77	172.1	$1.20 \times 10^{-4}$
$10^{-3}$	2.71	149.9	$5.33 \times 10^{-4}$
BEM	100	629.4	-

Table 2 Influence of the admissibility parameter  $\eta$  on memory requirements, computational time, and relative error in the norm of unknown vector.

$\eta$	memory[%]	time[s]	$\frac{\ x_{ACA} - x\ _2}{\ x\ _2}$
1	3.41	206.7	$5.85 \times 10^{-6}$
$\sqrt{2}$	3.73	197.5	$4.96 \times 10^{-6}$
2	3.34	172.9	$6.96 \times 10^{-6}$
3	3.52	168.0	$9.59 \times 10^{-6}$
BEM	100	629.4	-

#### 4.1. ACA パラメータの決定

まず、多重散乱解析を行う前に、ACA 境界要素法の計算効率等について確認しておく。3 節での係数行列の分割と、低ランク行列の作成ではそれぞれ  $\varepsilon, \eta$  といったパラメータが用いられている。ここでは、 $\varepsilon$  および  $\eta$  の値を変えながら、Fig.5 のような散乱体を  $8 \times 8$  個配置したモデルの数値解析を行う事で、パラメータ  $\varepsilon$  および  $\eta$  をどのように与えるかについて検討する。散乱体の直径を  $a$ 、水平および垂直方向に対する散乱体の配置間隔を  $l = 2a$ 、波数は  $ka = 2.0$  とし、全境界要素数は  $N = 7680$  とした。また、ここでは散乱体を空洞とし、その境界条件を表面力ゼロ ( $t = 0$ ) で与えた。

Table 1 および Table 2 に、それぞれ  $\varepsilon$  または  $\eta$  を変化させながら、ACA 境界要素法を用いて境界未知量を求めた場合に要した記憶容量と計算時間、および境界未知量のベクトルノルムの相対誤差  $\|x_{ACA} - x\|_2 / \|x\|_2$  を示す。ここで、 $x_{ACA}$ 、 $x$  はそれぞれ ACA 境界要素法、または従来の境界要素法（ただし方程式の解法に LU 分解を使用）を用いて求めた境界未知量ベクトルであり、ベクトルノルムは  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$  と表される。一方、記憶容量に関しては、従来の境界要素法を用いた場合の記憶容量に対する割合を記載している。また比較のため、再下段に従来の境界要素法を用いた場合の記憶容量および計算時間も記載している。ただし、Table 1 では  $\eta = \sqrt{2}$ 、Table 2 では  $\varepsilon = 10^{-5}$  としている。

Table 1 より、 $\varepsilon$  を大きくすると記憶容量と計算時間は減少するが、ベクトルノルムは  $\varepsilon$  とほぼ同じオーダーで大きくなっていることが分かる。一方、Table 2 を見ると、 $\eta = 2$  のとき、記憶容量が最小となっており、 $\eta = \sqrt{2}$  のときベクトルノルムが最小となっている。これらの結果より、本論文では  $\varepsilon = 10^{-5}$ 、 $\eta = \sqrt{2}$  と定め、以下の解析を実行することとする。

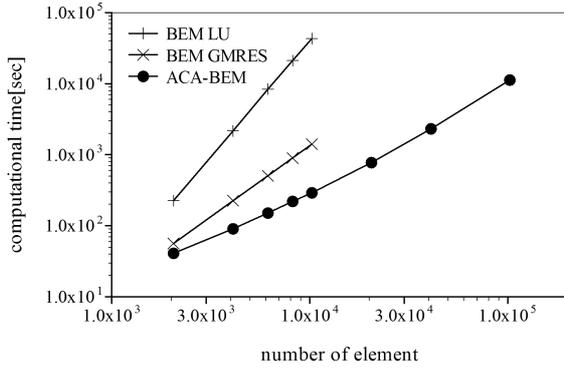


Fig. 6 Comparison of computational times between conventional BEM and ACA-BEM.

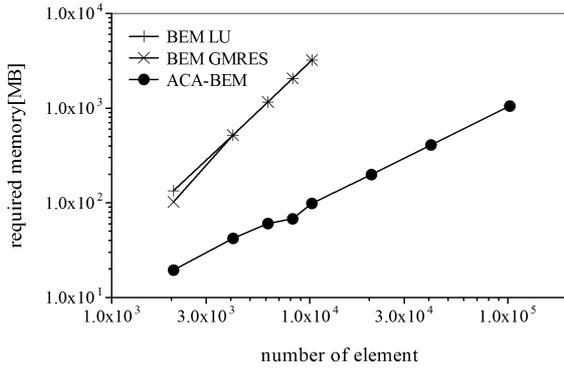


Fig. 7 Comparison of memory requirements between conventional BEM and ACA-BEM.

#### 4.2. 計算時間および記憶容量の比較

4.1 節で定めたパラメータ  $\varepsilon = 10^{-5}$ ,  $\eta = \sqrt{2}$  を用いて, 全要素数  $N$  を変化させた場合の ACA 境界要素法と従来の境界要素法の計算時間および記憶容量を比較した. 解析モデルは 4.1 節と同様に Fig.5 に示すモデルを使用し, 波数は  $ka = 2.0$  とした. またここでの解析に用いる計算機の記憶容量の上限を 4[GB] とした.

Fig.6 および Fig.7 は, それぞれ境界未知量の計算に必要な計算時間および記憶容量を, 境界要素数を  $N = 2048$  から 10240 と変化させた場合について ACA 境界要素法, および従来の境界要素法についてプロットしたものである. ここで, ACA 境界要素法では方程式の解法に LU 分解を, 従来の境界要素法では LU 分解または GMRES を用いて境界未知量を求めている. なお, GMRES に前処理は施していない. ACA 境界要素法を用いた場合は, 必要計算時間と記憶容量は  $O(N)$  近くまで削減されており, 要素数が多い場合は, ACA 境界要素法の方が従来の境界要素法に比べ効率的であると言える.

#### 4.3. 直角二等辺三角形に配置した散乱体に対する多重散乱解析

本節では, ACA 境界要素法を用いて, 多重散乱解析を行った結果を示す. 論文<sup>(12)</sup>を参考に, Fig.8 のように散乱体を等間隔に直角二等辺三角形になるように配置した解析モデルに対して, Fig.8 の左から  $x_1$  軸の正の向きに  $u^{\text{in}}(x, \omega) = u_0 e^{i(2\pi f/c_t)x_1}$  なる (振幅  $u_0$ , 周波数  $f$  とする) 入射面外波を

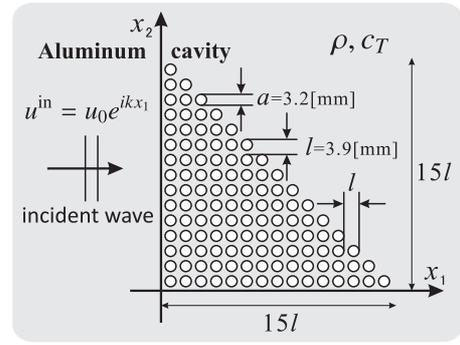


Fig. 8 Multiple scattering model with 120 cavities arranged in triangular lattice form.

与えた場合の面外波動場を ACA 境界要素法により解析する. 散乱体は 15 行 15 列, 合計 120 個配置した. 一つの散乱体を 120 個の境界要素に分割したため, 全要素数は 14400 である. また, 散乱体の境界条件は  $\partial u/\partial n = 0$  で与えた. ただし,  $a$  は散乱体の直径,  $l$  は散乱体の間隔であり, 母材をアルミニウムとした. アルミニウムの密度は  $\rho = 2808[\text{kg}/\text{m}^3]$ , せん断波速度は  $c_T = 3091[\text{m}/\text{s}]$  で与えた. このような散乱体分布は, 近年人工材料であるフォノンニック結晶を応用する分野等で注目されている, プリズムモデルとして知られている.

Fig.9, Fig.10 はそれぞれ周波数  $f = 400[\text{kHz}]$ ,  $600[\text{kHz}]$  の場合の散乱体周辺における全変位場 (左) および散乱変位場 (右) を表しており, 上段は変位の実部, 中段は虚部, 下段は絶対値を示している. ただし, 入射波の振幅は  $u_0 = 1.0 \times 10^{-6}[\text{m}]$  とし, 周波数は論文<sup>(12)</sup>を参考に, 散乱場の挙動が大きく異なる予測されるこれら 2 つの周波数を選択した.

それぞれの周波数における全変位場および散乱変位場に対する解析結果を比較すると, 周波数によって散乱波の進む方向, 散乱変位場の大きさともに大きく異なっていることが分かる. Fig.9 に示す  $f = 400[\text{kHz}]$  の場合は, 波動が散乱体群に当たって反射するものと, 透過するものにほぼ二分され, 散乱体群の上下方向にはほとんど散乱されていないことが分かる. この傾向は実部, 虚部共に顕著である. 全変位場を見ると, Fig.9(a) では反射波が入射波と位相が重なり振幅が大きくなっているが, Fig.9(c) では入射波と反射波が打ち消し合う結果となっている. 一方, Fig.10 の  $f = 600[\text{kHz}]$  の場合の散乱場を見ると, 実部・虚部共に散乱体群の左方向の反射波と右方向の透過波が大きな値を示している. また,  $f = 400[\text{kHz}]$  の場合と異なり上下方向へ伝搬する散乱波も確認できる.

なお, 本解析では東京工業大学学術国際情報センターの TSUBAME2 を使用し,  $f = 600[\text{kHz}]$  の場合の境界値問題を解くのに要した時間はおよそ 16 分, 要したメモリ量はおよそ 238[MB] であった (ただし, OpenMP などの並列化は施していない).

#### 5. まとめ

本論文では二次元面外波動問題に対する ACA 境界要素法を開発した. ACA 境界要素法に対する実際の計算手順を示し, 計算効率等について確認した. また, 数値解析例として,

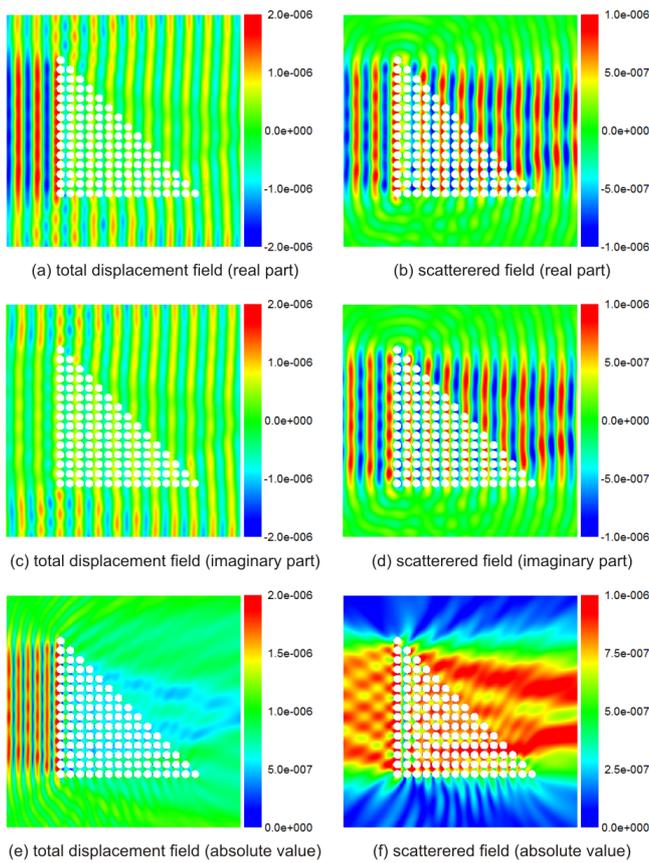


Fig. 9 Displacement fields at  $f = 400$ [kHz].

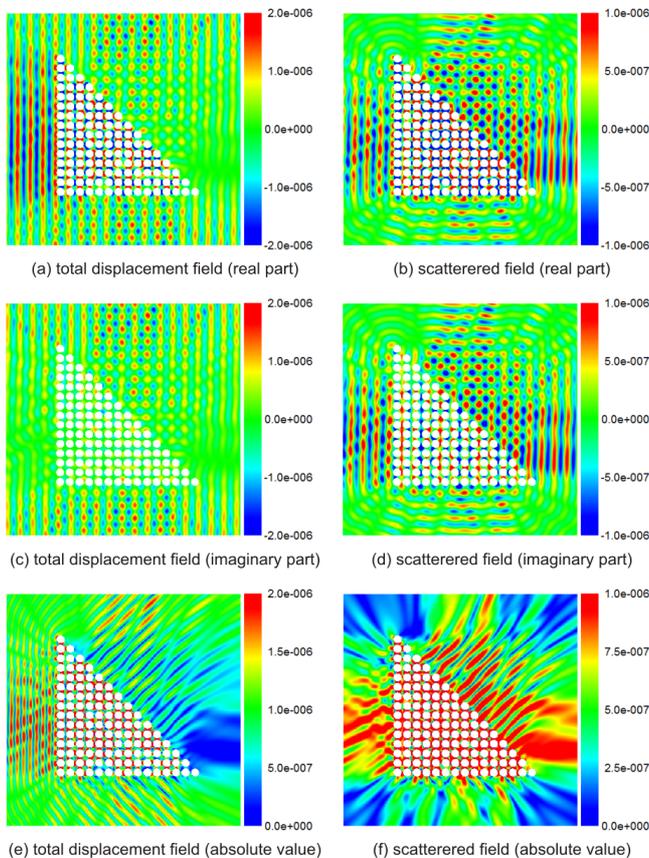


Fig. 10 Displacement fields at  $f = 600$ [kHz].

フォニック結晶の分野で注目されているプリズムモデルに対する面外波動の散乱解析を行い、ACA境界要素法の有効性について確認した。今後は、面内波動問題への応用や、フォニックバンド構造の多重散乱解析、異方性弾性体中の大規模波動問題への応用を行う予定である。

#### 参考文献

- (1) Nishimura, N.: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, *Applied Mechanics Review*, **55**(4)(2002), pp. 299-324.
- (2) 紅露一寛, 菅波祐太, 古川陽, 阿部和久: 2次元スカラー波動方程式のための非直交スプライン wavelet を用いた時間域境界要素法, *応用力学論文集*, 土木学会, **13**(2010), pp. 241-252.
- (3) Saad, Y. and Schultz, M.H.: GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**(1986), pp. 856-869.
- (4) Steinbach, O. and Wendland, W. L.: The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method, *Advances in Computational Mathematics*, **9**(1998), pp. 191-216.
- (5) Kurz, S., Rain, O. and Rjasanow, S.: The adaptive cross approximation technique for the 3-D boundary element method, *IEEE Transactions on Magnetics*, **38**(2)(2002), pp. 421-424.
- (6) Aliabadi, M. H. and Wen, P. H.: *Boundary Element Methods in Engineering and Sciences*, Imperial College Press, (2010).
- (7) Brunner, D., Junge, M., Rapp, P., Bebendorf, M. and Gaul, L.: Comparison of the Fast Multipole Method with Hierarchical Matrices for the Helmholtz-BEM, *CMES*, **58**(2)(2010), pp. 131-158.
- (8) 小林昭一編著: *波動解析と境界要素法*, (2000), 京都大学学術出版会.
- (9) Bebendorf, M.: *Hierarchical Matrices: A Means to Efficiently Solve Elliptic Boundary Value Problems*, (2008), Springer-Verlag.
- (10) Bebendorf, M.: Approximation of boundary element matrices, *Numerische Mathematik*, **86**(2000), pp. 565-589.
- (11) 斎藤隆泰, 永井浩二, 廣瀬壮一: 高速多重極境界要素法を用いた複合材料の弾性波動解析, *計算数理工学論文集*, **5**(2005), pp. 37-42.
- (12) Hladky-Hennion, A.C., Vasseur, J., Dubus, B., Djafari-Rouhani, B., Morvan, B., Tinel, A. and Ekeom, D.: Negative refraction of transverse waves in an elastic phononic crystal, *Ultrasonics Symposium (IUS), IEEE*, (2008), pp. 253-256.