

# 影響波動の到達時間を考慮した Lubich の CQM を用いた時間域境界積分方程式法

Time domain BIEM with Lubich CQM  
considering arrival time of influence waves

吉川 仁<sup>1)</sup>, 松浦 亮介<sup>1)</sup>

Hitoshi YOSHIKAWA and Ryosuke MATSUURA

- 1) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: yoshikawa.hitoshi.5u@kyoto-u.ac.jp)  
2) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: matsuura@acs.i.kyoto-u.ac.jp)

We apply Lubich convolution quadrature method to convolution integrals with respect to time in time domain boundary integral equation method. Large memory is required for time domain BIEM with Lubich CQM because the coefficient matrices become dense. In this study, we reduce the memory requirement for time domain BIEM with Lubich CQM using the reduction techniques for conventional TD-BIEM such as cast forward method, etc. Simple numerical problems are solved and the effectivity of the reduction techniques and the accuracy are confirmed.

**Key Words:** TD-BIEM, Lubich convolution quadrature method, cast forward, influence coefficients, memory requirement

## 1. 研究背景・目的

Lubich の提案した Convolution Quadrature Method (CQM)<sup>(1, 2)</sup> を用いた時間域境界積分方程式法 (TD-BIEM) について考える<sup>(3)</sup>。Lubich の CQM を用いた TD-BIEM は、時間域の境界積分方程式に表れる時間に関する畳み込み積分を、Lubich の CQM を用いて近似的に計算する手法である。具体的には、解くべき支配方程式の Laplace 変換域の基本解を用いて、時間域の境界積分方程式を離散化し、逐次的に解を求める。Lubich の CQM を用いた TD-BIEM は、Laplace 変換域での基本解を得ることができれば求解が可能であるという特徴を持つため、時間域での基本解が陽に得られない問題に対しても適用可能である。例えば、波動の減衰が表れるような問題も解くことが可能である。しかし、従来の TD-BIEM に比べ Lubich の CQM を用いた TD-BIEM では、求解に多大な計算時間を要し、また大量のメモリを必要とする。これらの問題を解決するための研究<sup>(4)</sup>は現時点では少なく、またメモリの使用量の削減については余り議論されていないのが現状である。

支配方程式が双曲型の 2 階の偏微分方程式であるような問題を解く場合、時間域の基本解の形からも明らかのように、時間域境界積分方程式のソース点からの波動が観測点に到達

するまでは、相互の影響を考慮する必要がない。つまり、従来の TD-BIEM のように境界積分方程式を時間域・空間域の内挿関数を用いて離散化した場合、ソース要素からの波動が観測点に到達するまでは、対応する影響係数の行列成分はゼロとなる。このため、影響係数行列は疎行列となり、非ゼロ成分のみを記憶する事で必要とされる使用メモリ量を削減できる。

また、離散化により時間に関しては時間ステップ毎に逐次的に解を求めるため、ある時刻の解を求める時点で、既にその時刻以前の解は求められている。時間域の境界積分方程式を離散化して得られる代数方程式の右辺に表れる影響係数行列と既に求められた時刻の解との行列ベクトル積 (つまり、過去の解からの影響) の演算を、代数方程式を作成するタイミングよりも先に計算しておく手法 (cast forward)<sup>(5)</sup>を行うことで、時間差が大きな影響係数行列のストアが不要となる。

本研究では、これらの従来の TD-BIEM のメモリ削減の考え方<sup>(5, 6)</sup>を、Lubich の CQM を用いた TD-BIEM に適用し、メモリ使用量の削減を試みる。また、3 次元領域における波動散乱問題を解き、提案するメモリ削減手法の精度と有効性を検証する。

## 2. Lubich の CQM を用いた TD-BIEM

### 2.1. Lubich の CQM

Lubich の CQM は畳み込み積分の近似解法であり、畳み込み積分

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (1)$$

を、 $f(t)$  の Laplace 変換

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (2)$$

を用いて次のように求める手法である。

$$f(t) * g(t) \simeq \sum_{m=0}^n \omega_{n-m}(\Delta t)g(m\Delta t), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \omega_n(\Delta t) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\mathcal{R}} \hat{f}\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) z^{-(n+1)} dz \\ &\simeq \frac{\mathcal{R}^{-n}}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} \hat{f}\left(\frac{\gamma(\mathcal{R}e^{i\frac{2\pi\ell}{L}})}{\Delta t}\right) e^{-in\frac{2\pi\ell}{L}}, \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $\Delta t$  は時間増分であり、 $t = n\Delta t$  である。なお、式 (3) を求める上で、時間に関する微分方程式を後退差分で近似している<sup>(1)</sup>。また、

$$\gamma(z) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}(1-z)^k, \quad p \leq 6, \quad (5)$$

であり、後退差分の重みを係数とするような多項式である。 $p$  は後退差分の次数を表す。なお、 $\hat{f}(s)$  には次の条件が課せられる。

$\hat{f}(s)$  は領域 (Fig.1)

$$|\arg(s-c)| < \pi - \phi, \quad \phi < \frac{\pi}{2}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

において正則、かつ、

$$|\hat{f}(s)| \leq M|s|^{-\mu}, \quad M, \mu > 0. \quad (7)$$

このとき、離散化された畳み込み積分の重み  $\omega_n(\Delta t)$  は次式で評価できる<sup>(1, 7)</sup>。

$$\left| \frac{\omega_n(\Delta t)}{\Delta t} - f(n\Delta t) \right| \leq Cn^{\mu-1-p}\Delta t^{\mu-1} \quad (8)$$

ここに、 $C$  は正の定数である。

### 2.2. Lubich の CQM を用いた TD-BIEM

3次元領域  $D$  において波動方程式に支配される初期値問題を考える。

$$\ddot{u}(\mathbf{x}, t) - u_{,ii}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{in } D, \quad t > 0, \quad (9)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{u}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{in } D, \quad (10)$$

ここに、 $(\cdot)_{,i}$  は  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  を、 $(\dot{\cdot})$  は  $\frac{\partial}{\partial t}$  を表す。式 (9) に対応する境界積分方程式は次式で得られる。

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial D} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) * \frac{\partial u}{\partial n_y}(\mathbf{y}, t) dS \\ &\quad - \lim_{\xi \rightarrow \mathbf{x}} \int_{\partial D} \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(\xi - \mathbf{y}, t) * u(\mathbf{y}, t) dS, \quad \mathbf{x} \text{ on } \partial D, \quad \xi \in D^e \end{aligned} \quad (11)$$

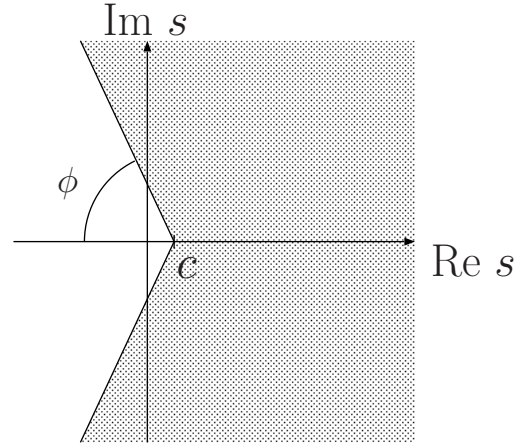


Fig. 1  $\hat{f}(s)$  が正則な領域 (網掛部)

ここに、 $\partial D$  は領域  $D$  の境界、 $D^e$  は  $D$  の補領域、 $\frac{\partial}{\partial n_y}$  は法線微分で  $n_i(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i}$ 、 $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  は境界上の点  $\mathbf{y}$  における領域の外向き単位法線ベクトル、 $\Gamma$  は 3次元波動方程式の時間域の基本解であり、

$$\Gamma(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(t - |\mathbf{x}|), \quad (12)$$

である。ここに、 $\delta(t)$  は Dirac のデルタ関数である。

境界積分方程式 (11) の右辺に表れる時間に関する畳み込み積分に Lubich の CQM を適用する。ここで、波動方程式の Laplace 変換域での基本解  $\hat{\Gamma}(\mathbf{x}, s)$  は

$$\hat{\Gamma}(\mathbf{x}, s) = \frac{e^{-|\mathbf{x}|s}}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad (13)$$

であり、式 (7) の条件を満たさない。そのため、基本解を時間に関して積分した関数  $G(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \Gamma(\mathbf{x}, \tau) d\tau$  を導入し、層ポテンシャルを次の形で計算する。

$$\begin{aligned} &\int_0^t \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \frac{\partial u}{\partial n_y}(\mathbf{y}, \tau) d\tau \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \frac{\partial u}{\partial n_y}(\mathbf{y}, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{\partial \Gamma}{\partial n_y}(\xi - \mathbf{y}, t - \tau) u(\mathbf{y}, \tau) d\tau \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\partial G}{\partial n_y}(\xi - \mathbf{y}, t - \tau) u(\mathbf{y}, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (15)$$

このとき、関数  $G(\mathbf{x}, t)$  の Laplace 変換  $\hat{G}(\mathbf{x}, s)$  は、

$$\hat{G}(\mathbf{x}, s) = \frac{e^{-|\mathbf{x}|s}}{4\pi|\mathbf{x}|s}, \quad (16)$$

となり、式 (7) の条件を満たす。

境界積分方程式 (11) の右辺の畳み込み積分に式 (14)、(15) の変形を行い、Lubich の CQM を適用した境界積分方程式を次に示す。

$$\begin{aligned} 0 &\simeq \int_{\partial D} \sum_{m=0}^n \omega_{n-m}^B(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \Delta t) \frac{\partial \dot{u}}{\partial n_y}(\mathbf{y}, m\Delta t) dS \\ &\quad - \lim_{\xi \rightarrow \mathbf{x}} \int_{\partial D} \sum_{m=0}^n \frac{\partial \omega_{n-m}^B}{\partial n_y}(\xi - \mathbf{y}, \Delta t) \dot{u}(\mathbf{y}, m\Delta t) dS, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\omega_n^B(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \Delta t) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\mathcal{R}} \frac{e^{-r\frac{\gamma(z)}{\Delta t}}}{4\pi r \frac{\gamma(z)}{\Delta t}} z^{-(n+1)} dz \\ &\simeq \frac{\mathcal{R}^{-n} \Delta t}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} \frac{e^{-\frac{r}{\Delta t} \gamma(\mathcal{R}e^{i\frac{2\pi\ell}{L}})}}{4\pi r \gamma(\mathcal{R}e^{i\frac{2\pi\ell}{L}})} e^{-in\frac{2\pi\ell}{L}},\end{aligned}\quad (18)$$

ここに、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  である。なお、式 (14)、(15) 右辺の時間に関する微分により、式 (17) は  $\dot{u}(\mathbf{x}, t)$  に関する境界積分方程式となっている。

境界積分方程式 (17) を数値的に解くために、境界  $\partial D$  を境界要素  $S_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  に分割し空間内挿関数を用いて離散化する。なお、簡略化のため、以下では区分一定の空間内挿関数を用いて離散化した式を示す。離散化された境界積分方程式は次式で得られる。

$$\mathbf{0} \simeq \sum_{m=1}^n \Phi_{n-m} \dot{\mathbf{q}}_m - \sum_{m=1}^n \Psi_{n-m} \dot{\mathbf{u}}_m, \quad (19)$$

$$\{\dot{\mathbf{u}}_m\}_i := \dot{u}(\mathbf{x}^i, m\Delta t), \quad \{\dot{\mathbf{q}}_m\}_i := \frac{\partial \dot{u}}{\partial n}(\mathbf{x}^i, m\Delta t), \quad (20)$$

$$\{\Phi_m\}_{ij} := \int_{S_j} \omega_m^B(\mathbf{x}^i - \mathbf{y}, \Delta t) dS, \quad (21)$$

$$\{\Psi_m\}_{ij} := \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_y} \omega_m^B(\mathbf{x}^i - \mathbf{y}, \Delta t) dS, \quad (22)$$

ここに、点  $\mathbf{x}^i$  は境界要素  $S_i$  の代表点である。また、式 (21)、(22) を書き下せば、

$$\{\Phi_n\}_{ij} \simeq \frac{\mathcal{R}^{-n} \Delta t}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} \frac{e^{-in\frac{2\pi\ell}{L}}}{\gamma(\mathcal{R}e^{i\frac{2\pi\ell}{L}})} \{U_\ell\}_{ij}, \quad (23)$$

$$\{\Psi_n\}_{ij} \simeq \frac{\mathcal{R}^{-n} \Delta t}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} \frac{e^{-in\frac{2\pi\ell}{L}}}{\gamma(\mathcal{R}e^{i\frac{2\pi\ell}{L}})} \{W_\ell\}_{ij}, \quad (24)$$

$$\{U_\ell\}_{ij} := \int_{S_j} \frac{e^{-\frac{r}{\Delta t} \gamma(\mathcal{R}e^{i\frac{2\pi\ell}{L}})}}{4\pi r} dS, \quad (25)$$

$$\{W_\ell\}_{ij} := \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{e^{-\frac{r}{\Delta t} \gamma(\mathcal{R}e^{i\frac{2\pi\ell}{L}})}}{4\pi r} dS, \quad (26)$$

となる。通常、Lubich の CQM を用いた TD-BIEM では  $\omega_n^B$  を要求する精度  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  で求める場合、 $L = N_T$ ,  $\mathcal{R}^{N_T} = \sqrt{\varepsilon}$  とする<sup>(2)</sup>。ここに、 $N_T$  は時刻  $T$  までの解を求める場合の時間ステップ数であり、 $N_T = \frac{T}{\Delta t}$  である。Lubich の CQM を用いた TD-BIEM では、主に次の2つのいずれかの手法で代数方程式を作成する。

I.  $U_\ell, W_\ell$ ,  $\ell = 0, \dots, L-1$  をメモリに記憶し、各時間ステップにおいて代数方程式 (19) を作成するために、その値を呼び出し、式 (23)、(24) を用いて影響係数行列  $\Phi_n, \Psi_n$  を計算する。

もしくは、

II.  $U_\ell, W_\ell$  を計算し、予め影響係数行列  $\Phi_n, \Psi_n$ ,  $n = 0, \dots, N_T - 1$  を計算しメモリに記憶する。各時間ステップにおいて代数方程式 (19) の作成のために、メモリから  $\Phi_n, \Psi_n$  を呼び出す。

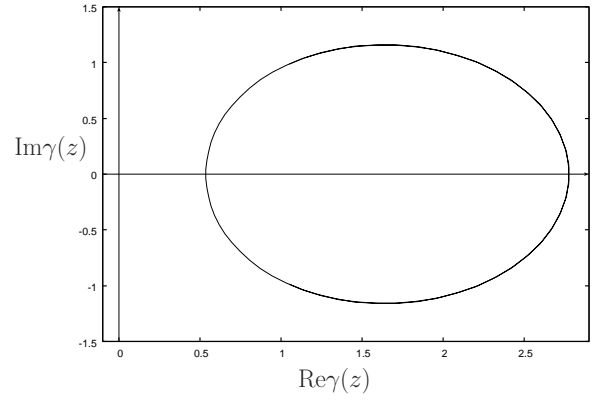


Fig.2 積分パス  $|z| = \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{R} = 10^{-1/4}$  上での  $\gamma(z)$ 。

$L = N_T$  のため、どちらの手法でも  $\mathcal{O}(N^2 N_T)$  のメモリが必要となり、問題のサイズが大きくなると大量のメモリが必要となる。

### 3. メモリ使用量削減についての検討

本節では、Lubich の CQM を用いた TD-BIEM の使用メモリの削減について検討する。Lubich の CQM を用いた時間域境界積分方程式法の従来法として、手法 II で代数方程式を作成する方法を考える。なお以下では、簡略化のために、波動方程式に支配される Neumann 問題を用いて説明を行なう。つまり、 $\mathbf{q}_m$ ,  $m = 1, \dots, N_T$  を既知なベクトルとする。

#### 3.1. 対称性を考慮したメモリ削減

式 (18) に表れる関数  $\gamma(z)$  の積分パス  $|z| = \mathcal{R}$  での値が、実軸について対称 (Fig.2) となることを利用する<sup>(4)</sup>。このとき、式 (18) 右辺の被積分関数も実軸について対称となることから、対称性を利用して  $U_\ell, W_\ell$ ,  $\ell = 0, \dots, \frac{L}{2}$  の値のみをストアすれば良い。

#### 3.2. 疎行列化

従来の TD-BIEM のメモリ削減に用いられている手法を Lubich の CQM を用いた TD-BIEM に適用する。

Lubich の CQM を用いた TD-BIEM では、時間域の基本解の Laplace 変換  $\hat{\Gamma}$  を用いるため、代数方程式の影響係数行列  $\Phi_n, \Psi_n$  は密行列となる。しかし、実際には時間域の境界積分方程式 (式 (11)) を離散化し代数方程式を逐次的に解いているため、双曲型の偏微分方程式を扱う場合、“ソース要素からの波動が観測点に到達するまでは、相互の影響を考える必要がなく影響係数はゼロとなる” はずである (Fig.3)。つまり、

$$\begin{aligned}\{\Phi_n\}_{ij} &= 0, \quad \{\Psi_n\}_{ij} = 0 \\ \text{for } \left\{ i, j \mid \inf_{\mathbf{y} \in S_j} |\mathbf{x}^i - \mathbf{y}| > (n+1)\Delta t \right\},\end{aligned}\quad (27)$$

とできる。実際に、 $n = 10$ ,  $\mathcal{R} = 10^{-1/4}$ ,  $p = 2$ ,  $L = 40$ ,  $\Delta t = 0.1$  とした場合の影響係数行列  $\Phi_n$  (式 (23)) の積分核

$$\phi_n(r, \Delta t) = \frac{\mathcal{R}^{-n} \Delta t}{L} \sum_{\ell=0}^{L-1} \frac{e^{-in\frac{2\pi\ell}{L}}}{\gamma(\mathcal{R}e^{i\frac{2\pi\ell}{L}})} \frac{e^{-\frac{r}{\Delta t} \gamma(\mathcal{R}e^{i\frac{2\pi\ell}{L}})}}{4\pi r}, \quad (28)$$

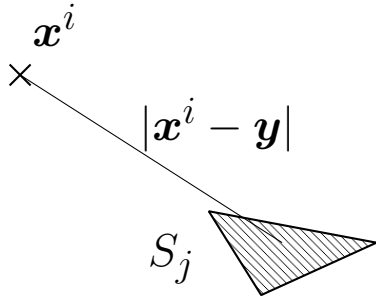


Fig. 3 ソース要素  $S_j$  と観測点  $x^i$  の位置関係

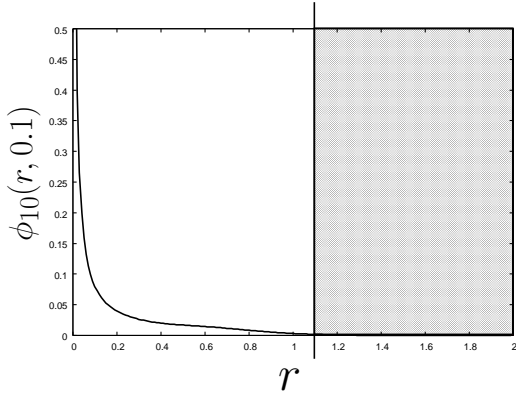


Fig. 4 1重層の積分核  $\phi_n(r)$

を Fig.4 に示す。Fig.4 の網掛けした領域  $r > (n+1)\Delta t = 1.1$  における積分核の値は非常に小さい。式 (27) に従い、その値をゼロとし打ちきることによって影響係数行列を疎行列にする。

### 3.3. cast forward

さらに、影響係数行列と既知の解との行列ベクトル積演算を、代数方程式を作成するタイミングよりも先に計算しておく手法 (cast forward)<sup>(5)</sup> を適用する。

TD-BIEM では、時刻  $t = n\Delta t$  において未知量  $\dot{u}_n$  を求める際に、代数方程式 (19) 右辺の行列ベクトル積演算を行う。そのため、右辺ベクトルの計算のために逐次計算の各時間ステップ毎に  $U_\ell, W_\ell, \ell = 0, \dots, L-1$  をメモリから呼び出し影響係数行列  $\Phi_n, \Psi_n, n = 0, \dots, N_t - 1$  を計算する必要がある。しかし、逐次的に代数方程式を解き解を求めているため、時刻  $t = n\Delta t$  の時点で解  $\dot{u}_m, m = 1, \dots, n-1$  は既に求められている。このことを考慮に入れるならば、時刻  $t = (n+m-1)\Delta t, n+m-1 \leq N_T$  における代数方程式の構成に必要な行列ベクトル積演算  $\Psi_{n-1}\dot{u}_m, m = 1, \dots, n-1$  は、時刻  $t = n\Delta t$  の時点で実行可能である。時刻  $t = n\Delta t$  において、行列ベクトル積演算  $\Psi_{n-1}\dot{u}_m, m = 1, \dots, n-1$  を行い、得られたベクトルを先の時刻  $t = (n+m-1)\Delta t$  に投げる (cast forward) ことにする。つまり、cast forward<sup>(5, 6)</sup> を行えば、影響係数行列  $\Psi_n, n = \left\lfloor \frac{N_T+1}{2} \right\rfloor, \dots, N_T - 1$  は、一度だけ計算するだけで良い。

具体例として、 $N_T = 6$  の場合の代数方程式を各時間ステップ毎に書き下す。

$$\begin{aligned}
 & \bullet t = \Delta t, \\
 & \Psi_0 \dot{u}_1 = \sum_{m=1}^1 \Phi_{1-m} \dot{q}_m, \\
 & \bullet t = 2\Delta t, \\
 & \Psi_0 \dot{u}_2 = \sum_{m=1}^2 \Phi_{2-m} \dot{q}_m - \Psi_1 \dot{u}_1, \\
 & \bullet t = 3\Delta t, \\
 & \Psi_0 \dot{u}_3 = \sum_{m=1}^3 \Phi_{3-m} \dot{q}_m - \Psi_2 \dot{u}_1 - \Psi_1 \dot{u}_2, \\
 & \bullet t = 4\Delta t, \\
 & \Psi_0 \dot{u}_4 = \sum_{m=1}^4 \Phi_{4-m} \dot{q}_m - \Psi_3 \dot{u}_1 - \Psi_2 \dot{u}_2 - \Psi_1 \dot{u}_3, \\
 & \bullet t = 5\Delta t, \\
 & \Psi_0 \dot{u}_5 = \sum_{m=1}^5 \Phi_{5-m} \dot{q}_m - \Psi_4 \dot{u}_1 - \Psi_3 \dot{u}_2 - \Psi_2 \dot{u}_3 \\
 & \quad - \Psi_1 \dot{u}_4, \\
 & \bullet t = 6\Delta t, \\
 & \Psi_0 \dot{u}_6 = \sum_{m=1}^6 \Phi_{6-m} \dot{q}_m - \Psi_5 \dot{u}_1 - \Psi_4 \dot{u}_2 - \Psi_3 \dot{u}_3 \\
 & \quad - \Psi_2 \dot{u}_4 - \Psi_1 \dot{u}_5.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Cast forward を用いて、時刻  $t = 4\Delta t$  において  $\Psi_3, \Psi_4, \Psi_5$  を一度だけ計算し、時刻  $t = 4\Delta t$  において既に求められているベクトル  $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$  との行列ベクトル積 (式 (29) 下線部)  $\Psi_3 \dot{u}_1, \Psi_3 \dot{u}_2, \Psi_3 \dot{u}_3, \Psi_4 \dot{u}_1, \Psi_4 \dot{u}_2, \Psi_5 \dot{u}_1$  を行い、得られたベクトルをメモリにストアする。

### 3.4. Lubich の CQM を用いた TD-BIEM のメモリ削減手法

以上の考察により、疎行列化、cast forward を適用すれば、

$$\{\Psi_n\}_{ij} = 0, \quad n = 0, \dots, \left\lfloor \frac{N_T+1}{2} \right\rfloor - 1, \tag{30}$$

となる代表点  $x^i$  と境界要素  $S_j$  に対応する  $\{W_\ell\}_{ij}$  はメモリに記憶する必要はない。なお、ここでは Neumann 問題を考えている。 $q_m, m = 1, \dots, N_T$  は境界条件として与えられているため、影響係数行列  $\Phi_n$  を計算する上で必要となる  $U_\ell$  は、メモリに記憶する必要はない。なお、解くべき問題が Dirichlet 問題であっても同様の手法でメモリ削減が可能である。

## 4. 数値解析結果

Fig.5 に示すような、中心が  $(1,0,0)$ 、半径 1 の球体による入射波  $u^{\text{in}}$  の散乱問題を考える。なお、支配方程式、初期条件・境界条件は次の通りとする。

$$\ddot{u}(\mathbf{x}, t) - u_{,ii}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{in } D, \quad t > 0 \tag{31}$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \dot{u}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{in } D, \tag{32}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial u^{\text{in}}}{\partial n}(\mathbf{x}, t) \quad \text{on } \partial D, \quad t > 0 \tag{33}$$

$$u(\mathbf{x}, t) \rightarrow u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad t > 0. \tag{34}$$

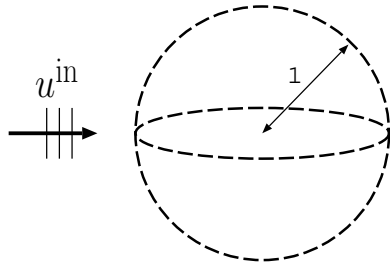


Fig. 5 入射波散乱問題 (仮想境界)

#### 4.1. 数値例 1

入射波  $u^{\text{in}}$  を

$$u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = \left\{ 1 - \cos \frac{\pi(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d})}{2} \right\} H(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d}), \quad (35)$$

$\Delta t = 0.06$ ,  $\mathbf{d} = (1, 0, 0)$  とし、散乱体の境界を 500 個の三角形要素に離散化し、Lubich CQM を用いた TD-BIEM により入射波散乱問題を解いた。ここに、 $H(t)$  は Heaviside 関数である。なお、 $\mathcal{R} = 10^{-1/4}$ ,  $p = 2$  とした。これまでの Lubich CQM を用いた TD-BIEM では  $\{\mathbf{W}_\ell\}_{ij}$  を全て記憶していたが、提案手法により、22.2% にまで必要記憶容量を減らす事ができた。通常の Lubich CQM を用いた TD-BIEM と、メモリ削減のために式 (27) と cast forward を適用した Lubich CQM を用いた TD-BIEM の結果を比較する。Fig.6 に  $t = 2.04$  における数値結果  $\dot{u}(\mathbf{x}, 2.04)$  の解析解と併せて示す。式 (27) を適用し影響係数をゼロとした事による数値解の変化は殆ど見られない。境界要素数が少ない数値解析のため、 $\dot{u}$  ピーク付近で解析解との間に誤差が見られる。また、 $1.6 \leq x_1 \leq 2.0$  辺りの観測点では、解析解と数値解の間に少し顕著な誤差が見られる。この原因として、境界条件として与えられる  $\dot{q}$  が

$$\dot{q}(\mathbf{x}, t) = - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 (\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) \cos \frac{\pi(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d})}{2} H(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d}), \quad (36)$$

となり、 $t = \mathbf{x} \cdot \mathbf{d}$  で連続でないことが考えられる。そこで、入射波  $u^{\text{in}}$  は、 $t$  に関して 2 階微分まで連続な関数を考える。初期条件 (式 (10)) を満たし、かつ 2 階微分まで連続な 4 階のカーディナル B スプライン関数を入射波  $u^{\text{in}}$  とした例を次に示す。

#### 4.2. 数値例 2

入射波  $u^{\text{in}}$  を  $t$  に関して 2 階微分まで連続な 4 階のカーディナル B スプライン関数

$$\begin{aligned} u^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{6} \left\{ (t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d})^3 H(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d}) \right. \\ & - 4(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} - 1)^3 H(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} - 1) \\ & + 6(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} - 2)^3 H(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} - 2) \\ & - 4(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} - 3)^3 H(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} - 3) \\ & \left. + (t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} - 4)^3 H(t - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d} - 4) \right\}, \quad (37) \end{aligned}$$

に変更し、入射波散乱問題を解いた。各パラメータは、数値例 1 と同様とした。  $t = 2.04$  における数値結果  $\dot{u}(\mathbf{x}, 2.04)$  を

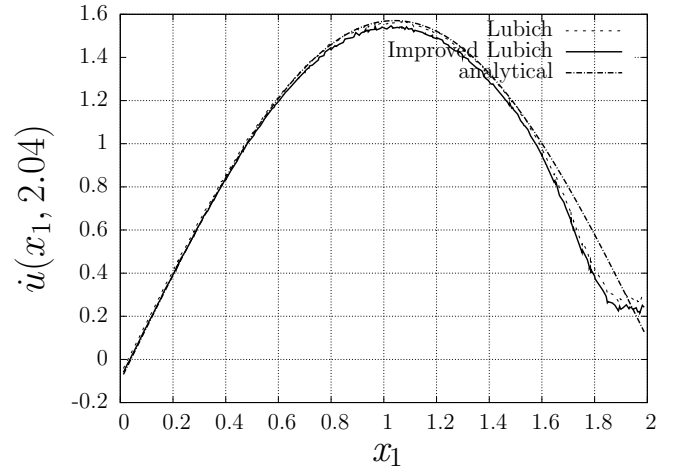


Fig. 6  $\dot{u}(\mathbf{x}, 2.04)$  の比較 (数値例 1)

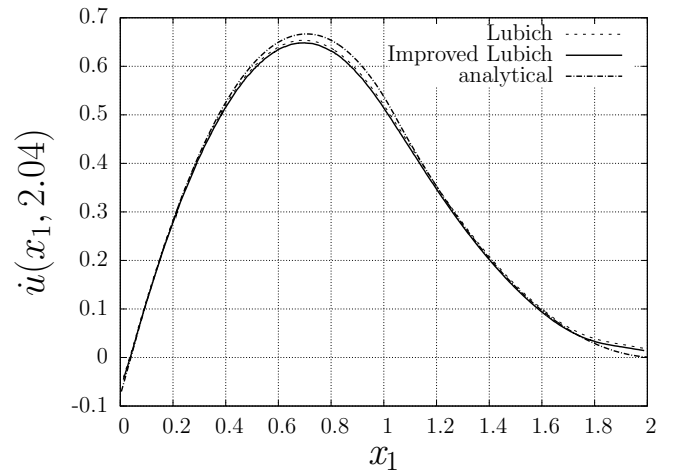


Fig. 7  $\dot{u}(\mathbf{x}, 2.04)$  の比較 (数値例 2)

解析解と併せて Fig.7 に示す。数値例 1 の結果同様に、式 (27) を適用し影響係数をゼロとしたことによる数値解の変化は殆ど見られないことが、Fig.7 より見てとれる。また、滑らかな入射波を入れることで、数値解の精度が改善されることも確認できる。

#### 5. 結論

従来の TD-BIEM で提案されている影響波動の到達時刻を考慮した影響係数行列の疎行列化と cast forward を用いたメモリ削減手法を、Lubich の CQM を用いた TD-BIEM に適用した。簡単な波動散乱問題を解き、Lubich の CQM を用いた TD-BIEM に必要となるメモリ量の削減を実現した。また、係数の打ち切りによる精度の低下も見られないことを確認した。

なお、Lubich の CQM を用いた TD-BIEM に要する計算時間の短縮は今後の課題である。本論文 3.2 節で提案した影響係数行列の疎行列化により、代数方程式 (19) の導出に必要な行列ベクトル積演算は、多少は計算量を減らすことができた。しかし、より高速な解析を実現するために多重極法などの高速解法を組み込んだコードの開発が必要である。

## 参考文献

- (1) Lubich C., Convolution quadrature and discretized operational calculus. I, *Numerische Mathematik*, Vol.52, No.2, pp.129–145, 1988.
- (2) Lubich C., Convolution quadrature and discretized operational calculus. II, *Numerische Mathematik*, Vol.52, No.4, pp.413–425, 1988.
- (3) Monegato G., Scuderi L. and Stanic M. P., Lubich convolution quadratures and their application to problems described by space-time BIEs, *Numerical Algorithms*, Vol.56, No.3, pp.405–436, 2010.
- (4) 斎藤隆泰, 瀬川尚揮, 石田貴之, 廣瀬壮一, 並列化された演算子積分時間領域高速多重極境界要素法による大規模多重散乱解析, *計算数理工学論文集*, Vol.11, pp.95–100, 2011.
- (5) Walker S., Scattering analysis via time-domain integral equations: Methods to reduce the scaling of cost with frequency, *IEEE Ant. Prop. Mag.*, Vol.39, pp.13–20, 1997.
- (6) Yoshikawa H. and Nishimura N., An improved implementation of time domain elastodynamic BIEM in 3D for large scale problems and its application to ultrasonic NDE, *Electronic Journal of Boundary Elements*, Vol.1, Issue 2, pp.201–217, 2003.
- (7) Lubich C., Convolution quadrature revisited, *BIT Numerical Mathematics*, Vol.44, pp.503–514, 2004.