

音場・弾性場連成問題における周期多重極法の Calderon の式に基づく前処理について

On the Calderon preconditioning for periodic FMMs in acoustic-elastodynamic coupled problems

飯盛 浩司¹⁾, 西村 直志²⁾

Hiroshi ISAKARI and Naoshi NISHIMURA

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8604 名古屋市千種区不老町, E-mail: isakari@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 2) 京都大学大学院情報学研究所 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@i.kyoto-u.ac.jp)

Periodic structures, such as phononic crystals in acoustics, have been brought to attention during the past few decades. Particularly interesting is a phenomenon called the anomaly, in which a slight change of incident angle or frequency of the incident wave may cause a drastic change on the scattered field. Near anomalies, the transmittance shows sudden peak or dip. It is also known that near the anomaly the convergence of numerical solver will decline. Our objective is to construct a solver which is fast even around the anomaly. To this end, we investigate a Calderon's preconditioning for FMM in acoustic-elastodynamic coupled problems in periodic problems related to sound scattering by phononic crystals. It is found that the Calderon preconditioning can accelerate the convergence of algebraic equation solvers more effectively than the conventional ones.

Key Words: Periodic Fast Multipole Method, Calderon's Preconditioning, Phononic Structure, Extraordinary Acoustic Transmission

1. 緒言

フォノン結晶等、周期構造に起因した特異な現象を利用した新しい材料の開発が弾性波デバイスの分野でも盛んになってきている⁽¹⁾。著者らは、フォノン結晶による弾性波動散乱問題の数値解析ツールとして、周期多重極法⁽²⁾の開発を行ってきた⁽³⁾。また、フォノン結晶による音波散乱問題を取り扱うため、前報では、音場・弾性場連成問題に対する周期多重極法を開発を行った⁽⁴⁾。しかしながら、音場・弾性場連成問題に対しては、計算精度は十分であったものの、代数方程式に対する反復法の収束性が悪く、計算効率の向上は課題として残っている。特に、アノマリ付近においても高速な手法を開発することが重要となる。

一方で、境界要素法に現れる代数方程式の求解の加速法として、Calderon の式に基づく前処理を挙げることが出来る⁽⁵⁾。近年、著者らは Calderon の式に基づく前処理の周期問題への適用可能性を検討してきた。その結果、Calderon の式に基づく前処理は、アノマリ付近においても収束性を改善することが分かってきた^(6, 7)。

本論文では、音場・弾性場連成問題における周期多重極法の Calderon の式に基づく前処理の開発を行う。これまでの

Calderon の式に基づく前処理に関する研究は PMCHWT 定式化⁽⁸⁾に基づくものが多いため、ここでも、本問題に対する PMCHWT 定式化及びその Calderon の式に基づく前処理について検討を行う。また、Burton-Miller 法を用いた積分方程式に対する Calderon の式に基づく前処理についても併せて開発を行う。

2. 定式化

2.1. 周期領域における音場・弾性場連成問題

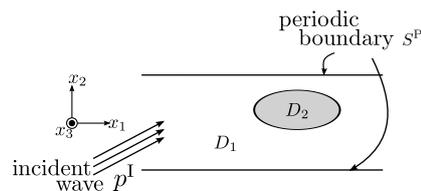


Fig. 1 Periodic boundary value problems

解析領域 D を

$$D = ((-\infty, \infty) \otimes [-\zeta_2/2, \zeta_2/2] \otimes [-\zeta_3/2, \zeta_3/2]) \quad (1)$$

とする。すなわち、3次元領域における2重周期問題を考え、

x_2 軸方向の周期は ζ_2 、 x_3 軸方向の周期は ζ_3 であるとする。ここでは簡単のため、2 領域問題を考え、Fig. 1 に示すように $D = D_1 \cup D_2$ であるとする。さらに、領域 D_1 は非粘性流体、 D_2 は弾性体で満たされているとする。

領域 D に音圧 p^I を入射する問題を考える。領域 D_1 において、音圧 p は次の Helmholtz 方程式を満たす。

$$p_{,jj} + k^{(1)2} p = 0 \quad (2)$$

ここに、 $k^{(1)} = \omega \sqrt{\rho^{(1)}/\lambda^{(1)}}$ は波数、 $\lambda^{(1)}$ は体積弾性係数、 $\rho^{(1)}$ は領域 D_1 を構成する材料の密度である。また、領域 D_2 において、変位 u_i は次の Navier-Cauchy の式を満たす。

$$\mu^{(2)} u_{i,jj} + (\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}) u_{j,ij} + \rho^{(2)} \omega^2 u_i = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\rho^{(2)}$ は領域 D_2 を構成する材料の密度、 $\lambda^{(2)}$ 、 $\mu^{(2)}$ は Lamé 定数であり、これを用いて弾性テンソル $C_{ijpq}^{(2)}$ は次のように定義される。

$$C_{ijpq}^{(2)} = \lambda^{(2)} \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu^{(2)} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp})$$

境界条件として、力の釣り合い

$$t_i = -pn_i \quad (4)$$

及び法線方向変位速度の連続性

$$-i\omega u_i n_i = v_i n_i \quad (5)$$

を $\partial D_1 \cap \partial D_2$ において課す。ここに、 $t_i = C_{ijpq}^{(2)} u_{p,q} n_j$ は領域 D_2 におけるトラクション、 n_i は $\partial D_1 \cap \partial D_2$ 上の単位法線ベクトル (D_1 から見て外向きを正と定める)、 v_i は領域 D_1 における粒子速度である。

一方で、粒子速度 v_i は、 D_1 における運動方程式

$$\rho^{(1)} \frac{\partial v_i}{\partial t} = -p_{,i} \quad (6)$$

を考慮すると、音圧 p と次式で関連づけられる。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = i\rho^{(1)} \omega v_i n_i \quad (7)$$

さらに、散乱場に対し、無限遠において放射条件を課すものとする。

また、周期境界 $S^P = \{\mathbf{x} \mid |x_2| = \zeta_2/2 \text{ or } |x_3| = \zeta_3/2\}$ 上では以下のような周期境界条件が課されているとする。

$$p \left(x_1, \frac{\zeta_2}{2}, x_3 \right) = e^{i\beta_2} p \left(x_1, -\frac{\zeta_2}{2}, x_3 \right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} \left(x_1, \frac{\zeta_2}{2}, x_3 \right) = e^{i\beta_2} \frac{\partial p}{\partial x_2} \left(x_1, -\frac{\zeta_2}{2}, x_3 \right) \quad (9)$$

$$p \left(x_1, x_2, \frac{\zeta_3}{2} \right) = e^{i\beta_3} p \left(x_1, x_2, -\frac{\zeta_3}{2} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} \left(x_1, x_2, \frac{\zeta_3}{2} \right) = e^{i\beta_3} \frac{\partial p}{\partial x_3} \left(x_1, x_2, -\frac{\zeta_3}{2} \right) \quad (11)$$

ここに、 $\beta_i = k_i \zeta_i$ ($i = 2, 3$) は入射波の位相差、 k_i は入射波の波数ベクトルである。

2.2. 境界積分方程式と Calderon の式

本小節では、前小節に示した周期領域における音場・弾性場連成問題における境界積分方程式及び境界積分方程式に現れる積分作用素の持つ性質について述べる。

領域 D_1 、 D_2 からの極限を考えることにより、次の境界積分方程式が得られる。

$$\frac{1}{2} p = p^I + \mathcal{S} \frac{\partial p}{\partial n_y} - \mathcal{D} p \quad (12)$$

$$-\frac{1}{2} \mathbf{u} = \mathcal{U} \mathbf{t} - \mathcal{T} \mathbf{u} \quad (13)$$

また式 (12)、(13) の微分形として、次の境界積分方程式が得られる。

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial n_x} = \frac{\partial p^I}{\partial n_x} + \mathcal{D}^* \frac{\partial p}{\partial n_y} - \mathcal{N} p \quad (14)$$

$$-\frac{1}{2} \mathbf{t} = \mathcal{T}^* \mathbf{t} - \mathcal{W} \mathbf{u} \quad (15)$$

ここに、 \mathcal{S} 、 \mathcal{D} 、 \mathcal{D}^* 、 \mathcal{N} 、 \mathcal{U} 、 \mathcal{T} 、 \mathcal{T}^* 、 \mathcal{W} は次に示す積分作用素である。

$$\mathcal{S} v = \int_{\partial D} G^P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) dS_y \quad (16)$$

$$\mathcal{D} v = \int_{\partial D} \frac{\partial G^P(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} v(\mathbf{y}) dS_y \quad (17)$$

$$\mathcal{D}^* v = \int_{\partial D} \frac{\partial G^P(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x} v(\mathbf{y}) dS_y \quad (18)$$

$$\mathcal{N} v = \text{p.f.} \int_{\partial D} \frac{\partial^2 G^P(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x \partial n_y} v(\mathbf{y}) dS_y \quad (19)$$

$$(\mathcal{U} v)_i = \int_{\partial D} \Gamma_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v_j(\mathbf{y}) dS_y \quad (20)$$

$$(\mathcal{T} v)_i = \text{v.p.} \int_{\partial D} \Gamma_{Iij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v_j(\mathbf{y}) dS_y \quad (21)$$

$$(\mathcal{T}^* v)_i = \text{v.p.} \int_{\partial D} T_{ij} \Gamma_{jk}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v_k(\mathbf{y}) dS_y \quad (22)$$

$$(\mathcal{W} v)_i = \text{p.f.} \int_{\partial D} T_{ij} \Gamma_{Ijk}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v_k(\mathbf{y}) dS_y \quad (23)$$

ここに、“v.p.”、“p.f.” は各々、Cauchy の主値積分、発散積分の有限部分を表す。また、 G^P は周期境界条件 (式 (8)–(11)) を満たす Green 関数であり、次の格子和表現を有する。

$$G^P(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\omega \in \mathcal{L}(R)} \frac{e^{ik^{(1)}|\mathbf{x} - \mathbf{y} - \omega|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y} - \omega|} e^{i\beta \cdot \omega} \quad (24)$$

ここに \mathcal{L} は次式で表される格子点である。

$$\mathcal{L}(R) = \{(0, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_2 = p\zeta, \omega_3 = q\zeta, |p|, |q| \leq R, p, q \in \mathbb{Z}\} \quad (25)$$

また、 Γ_{ij} 、 Γ_{Iij} は各々、3 次元動弾性学の基本解及び二重層核である。

式 (16)–(19)、(20)–(23) の積分作用素は次の性質を持つ。

- \mathcal{S} 、 \mathcal{D} 、 \mathcal{D}^* 、 \mathcal{U} はコンパクト作用素である。すなわち、その固有値の集積点は 0 のみである。
- \mathcal{T} 、 \mathcal{T}^* の固有値の集積点は 0、 $\pm c$ の 3 点のみである。ここに c は次式で定義される、 D_2 の材料定数にのみ依存する定数である。

$$c = \frac{\mu^{(2)}}{2(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)})} = \frac{1}{2} \left(\frac{c_T}{c_L} \right)^2 \quad (26)$$

c_L 、 c_T は各々、 D_2 の縦波速度、横波速度である。

- \mathcal{N} 、 \mathcal{W} は超特異作用素である。
- 次の Calderon の式が成り立つ。

$$\frac{\mathcal{I}}{4} = -\mathcal{S}\mathcal{N} + \mathcal{D}\mathcal{D} \quad (27)$$

$$0 = \mathcal{S}\mathcal{D}^* - \mathcal{D}\mathcal{S} \quad (28)$$

$$\frac{\mathcal{I}}{4} = \mathcal{D}^*\mathcal{D}^* - \mathcal{N}\mathcal{S} \quad (29)$$

$$0 = -\mathcal{D}^*\mathcal{N} + \mathcal{N}\mathcal{D} \quad (30)$$

$$\frac{\mathcal{I}}{4} = -\mathcal{U}\mathcal{W} + \mathcal{T}\mathcal{T} \quad (31)$$

$$0 = \mathcal{U}\mathcal{T}^* - \mathcal{T}\mathcal{U} \quad (32)$$

$$\frac{\mathcal{I}}{4} = \mathcal{T}^*\mathcal{T}^* - \mathcal{W}\mathcal{U} \quad (33)$$

$$0 = -\mathcal{T}^*\mathcal{W} + \mathcal{W}\mathcal{T} \quad (34)$$

ここに、 \mathcal{I} は恒等作用素である。

2.3. PMCHWT 定式化とその Calderon の式に基づく前処理

本問題に対する PMCHWT 定式化⁽⁸⁾に基づく境界積分方程式は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} -\mathcal{W} - \rho^{(1)}\omega^2 \mathbf{n}_x \mathcal{S} \mathbf{n}_y^T & \mathcal{T}^* \mathbf{n}_y + \mathbf{n}_x \mathcal{D} \\ \rho^{(1)}\omega^2 \mathbf{n}_x^T \mathcal{T} + \rho^{(1)}\omega^2 \mathcal{D}^* \mathbf{n}_y & -\mathcal{N} - \rho^{(1)}\omega^2 \mathbf{n}_x^T \mathcal{U} \mathbf{n}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(y) \\ p(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^I(x) \mathbf{n}_x \\ -\frac{\partial p^I(x)}{\partial n} \end{pmatrix} \quad (35)$$

ここに、 \mathbf{n}_x (\mathbf{n}_y) は点 x (y) における単位法線ベクトルである。以降、式 (35) の左辺の積分作用素を \mathcal{A}_P と書くことにする。

\mathcal{A}_P は次のように書き換えることができる。

$$\mathcal{A}_P = \mathcal{A}'_P + \mathcal{T}_P + \mathcal{K}_P, \quad (36)$$

ここに、 \mathcal{A}'_P 、 \mathcal{T}_P 、 \mathcal{K}_P は各々、次式で表される積分作用素である。

$$\mathcal{A}'_P = \begin{pmatrix} -\mathcal{W} & 0 \\ 0 & -\mathcal{N} \end{pmatrix}, \quad (37)$$

$$\mathcal{T}_P = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{T}^* \mathbf{n}_y \\ \rho^{(1)}\omega^2 \mathbf{n}_x^T \mathcal{T} & 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathcal{K}_P = \begin{pmatrix} -\rho^{(1)}\omega^2 \mathbf{n}_x \mathcal{S} \mathbf{n}_y^T & \mathbf{n}_x \mathcal{D} \\ \rho^{(1)}\omega^2 \mathcal{D}^* \mathbf{n}_y & -\rho^{(1)}\omega^2 \mathbf{n}_x^T \mathcal{U} \mathbf{n}_y \end{pmatrix}. \quad (39)$$

ここで、 \mathcal{K}_P はコンパクト作用素である。 \mathcal{K}_P のコンパクト性を保ちつつ、 \mathcal{A}'_P 、 \mathcal{T}_P の条件を改善することを考える必要がある。特に、 \mathcal{A}'_P は超特異作用素であるため、離散化後の行列の条件を著しく悪くする可能性がある。超特異作用素の影響を消去するため、ここでは、次の作用素を考える。

$$\mathcal{M}_P^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{S} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

この作用素を用いると、Calderon の式 (29)、(33) より、 $\mathcal{A}_P \mathcal{M}_P^{-1}$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_P \mathcal{M}_P^{-1} &= \mathcal{A}'_P \mathcal{M}_P^{-1} + \mathcal{T}_P \mathcal{M}_P^{-1} + \mathcal{K}_P \mathcal{M}_P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{I}}{4} - \mathcal{T}^* \mathcal{T}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathcal{I}}{4} - \mathcal{D}^* \mathcal{D}^* \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{T}^* \mathbf{n}_y \mathcal{S} \\ \rho^{(1)}\omega^2 \mathbf{n}_x^T \mathcal{T} \mathcal{U} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathcal{K}_P \mathcal{M}_P^{-1} \end{aligned} \quad (41)$$

ここで、式 (41) の右辺に現れる作用素のうち、 $\mathcal{K}_P \mathcal{M}_P^{-1}$ 、 $\mathcal{T}^* \mathbf{n}_y \mathcal{S}$ 、 $\rho^{(1)}\omega^2 \mathbf{n}_x^T \mathcal{T} \mathcal{U}$ はコンパクト作用素である。また、 \mathcal{T}^* 、 \mathcal{D}^* の性質より、 $\mathcal{A}'_P \mathcal{M}_P^{-1}$ の固有値の集積点は $1/4$ 、 $1/4 - c^2$ の2点のみであることが分かる。ここに、 c は式 (26) で定義される定数である。

以上より、式 (41) の $\mathcal{A}_P \mathcal{M}_P^{-1}$ は、「固有値の集積点が2点のみの作用素+コンパクト作用素」となることが分かる。したがって、これを離散化して得られる行列のほとんど全ての固有値は、作用素の固有値の集積点の近傍に集中すると考えられる。また、定数 c は縦波の速度と横波の速度の比の2乗であるため、 $1/4$ 、 $1/4 - c^2$ は非常に近い点であることも分かる。したがって、式 (40) の \mathcal{M}_P^{-1} は有効な前処理行列 (の逆) と言える。

しかしながら、このように構成した \mathcal{M}_P は見かけの固有値に相当する周波数において非正則となる可能性がある。そこで、実際には見かけの固有値問題が問題とならない十分低い周波数に対する作用素で置き換えたものを用いる。

2.4. Burton-Miller 法を用いた定式化とその Calderon の式に基づく前処理

次に、Burton-Miller 法を用いた定式化を示す。式 (12)、(14) より、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(p + \alpha \frac{\partial p}{\partial n_x} \right) &= \left(p^I + \alpha \frac{\partial p^I}{\partial n_x} \right) \\ &\quad + (S + \alpha \mathcal{D}^*) \frac{\partial p}{\partial n_y} - (\mathcal{D} + \alpha \mathcal{N}) p \end{aligned} \quad (42)$$

ここに、 α は Burton-Miller 法の結合定数であり、虚部が零でない複素数である。式 (13)、(42) から、境界条件 (式 (4)、(5)) を用いて t 、 $\frac{\partial p}{\partial n_y}$ を消去すると、次の積分方程式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{I}}{2} + \mathcal{D} + \alpha \mathcal{N} & -\rho^{(1)}\omega^2 \left(\mathcal{S} + \alpha \left(\mathcal{D}^* - \frac{\mathcal{I}}{2} \right) \right) \mathbf{n}_y^T \\ -\mathcal{U} \mathbf{n}_y & \frac{\mathcal{I}}{2} - \mathcal{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(y) \\ \mathbf{u}(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^I(x) + \alpha \frac{\partial p^I(x)}{\partial n} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (43)$$

以降、式 (43) の左辺の作用素を \mathcal{A}_B と書く。

\mathcal{A}_B を離散化して得られる行列に対する Calderon の式に基づく前処理行列も、前小節で示した \mathcal{A}_P に対するそれと同様に構成することができる。すなわち、超特異作用素 \mathcal{N}

に対して、 \mathcal{S} を用いてその超特異性を消去すれば良い。また、対角スケールリングを同時に行うため、ここでは次の作用素を考える。

$$\mathcal{M}_B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2\mathcal{S}}{\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \quad (44)$$

\mathcal{M}_B^{-1} を用いると、 $\mathcal{A}_B \mathcal{M}_B^{-1}$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_B \mathcal{M}_B^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{I}}{2} - \mathcal{D}^* \mathcal{D}^* & i\omega \sqrt{\rho^{(1)} \lambda^{(1)}} \mathcal{I} \mathbf{n}_y^T \\ \mathbf{0} & \frac{\mathcal{I}}{2} - \mathcal{T} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -\frac{\mathcal{S} + 2\mathcal{D}\mathcal{S}}{\alpha} & -\rho^{(1)} \omega^2 (\mathcal{S} + \alpha \mathcal{D}^*) \mathbf{n}_y^T \\ \frac{2\mathcal{U} \mathbf{n}_y \mathcal{S}}{\alpha} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

ここに、式(45)の右辺第2項はコンパクト作用素である。また、 \mathcal{T} 、 \mathcal{D}^* の性質より式(45)の右辺第1項に現れる作用素の固有値の集積点は $1/2$ 、 $1/2 \pm c$ の3点のみであることが分かる。したがって、式(44)の \mathcal{M}_B^{-1} も、有効な前処理行列(の逆)となっていることがわかる。

また、式(40)の \mathcal{M}_P^{-1} を評価する際と同様に、式(44)の \mathcal{M}_B^{-1} の評価も、見かけの固有値を避けるため、十分に低い周波数を用いて行う。

最後に、本小節及び前小節で定式化したCalderonの式に基づく前処理は、非周期問題、すなわち式(16)–(19)の積分核を3次元Helmholtz方程式の基本解に置き換えた場合にも適用可能であることに注意しておく。

3. 数値計算例

本節では、数値実験を通して、提案する前処理法の有効性を検証する。全ての数値計算例を通して、境界積分方程式の離散化には選点法、一定要素を用いた。また、計算には京都大学学術情報メディアセンターのAppro GreenBlade 8000 (Subsystem B)を用いた。また、数値計算コードはOpenMPにより並列化を行い、16コアを用いた。

3.1. 係数行列の固有値分布

まずはじめに、提案する前処理が、実際に係数行列の条件を改善することを確認するため、非周期問題に対して行列を作成し(すなわち多重極法を用いず)、その固有値分布を調べた。計算に用いた条件は以下の通りである。

- 領域 D_2 の形状: 球
- 球の半径: 1.0
- 球の表面を 2000 分割 (8000DoF)、4500 分割 (18000DoF)
- 周波数: ω : 3.0
- $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \mu^{(2)} = 1.0$
- $c = 0.1667$

Fig. 2、Fig. 3は各々、球の表面を2000分割した場合のPMCHWT定式化、Burton-Miller法を用いた場合の係数行列の固有値 σ の分布を示している。前処理行列無しの場合、固有

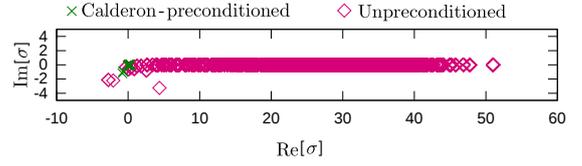


Fig. 2 The eigenvalues for matrices with PM-CHWT formulation

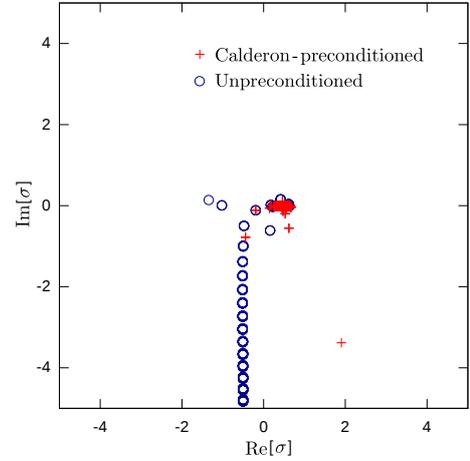


Fig. 3 The eigenvalues for matrices with Burton-Miller formulation

値は複素面上のどの点にも集中していない一方で、提案する前処理を用いた場合、固有値はある点のまわりに集まっている様子が見てとれる。

前節で見積もった点に、固有値が集中していることを確認するため、Fig. 4に次の条件を満たす固有値の個数を示す。

$$|\text{Im}[\sigma]| \leq \varepsilon \text{ かつ } x < \text{Re}[\sigma] \leq x + \delta \quad (46)$$

ここでは、 $\varepsilon = 0.1$ 、 $\delta = 0.02$ とした。Fig. 4より、PMCHWT定式化を用いた場合には0.2付近、Burton-Miller法を用いた場合には0.38、0.5、0.56付近に固有値が集まっている様子

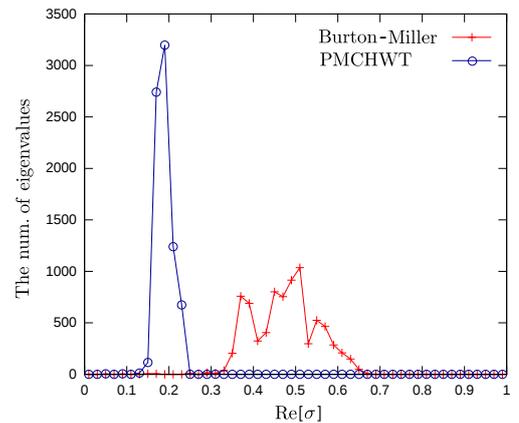


Fig. 4 The number of the eigenvalues.

Table 1 The ratio of maximum and minimum absolute value of the eigenvalue for the PMCHWT formulation

The num. of bound. elem.	2000	4500
Calderon-preconditioned matrix	23.63	23.11
Unpreconditioned matrix	108.40	162.65

Table 2 The ratio of maximum and minimum absolute value of the eigenvalue for the Burton-Miller formulation

The num. of bound. elem.	2000	4500
Calderon-preconditioned matrix	24.90	25.11
Unpreconditioned matrix	72.07	112.48

が見てとれる。見積りどおりであれば、PMCHWT 定式化を用いた場合の固有値の集積点は 0.222、0.25 の 2 点、Burton-Miller 法を用いた場合の固有値の集積点は 0.333、0.5、0.667 の 3 点となる。若干のずれがあるものの、概ね見積りどおりの点付近に固有値が集まることが確認できる。

最大固有値の絶対値と最小固有値の絶対値の比 $|\sigma|_{\max}/|\sigma|_{\min}$ は Table 1、Table 2 に示す通りであった。前処理行列を乗じない場合、メッシュ分割数が大きくなると $|\sigma|_{\max}/|\sigma|_{\min}$ は大きくなるが、提案する前処理法を用いた場合、 $|\sigma|_{\max}/|\sigma|_{\min}$ はメッシュ分割数に依存せずほぼ一定の値を取ることが分かる。したがって、提案する手法を用いた場合、反復法の反復回数はメッシュ分割数に依存しないと考えられる。

3.2. 周期穴あきスラブによる散乱問題

次に、周期的に円形に穿孔されたスラブ (円孔の半径: 0.1875、厚さ: 0.3750、周期: $\zeta_{2,3} = 1.000$) による音波の散乱問題を考える (Fig. 5)。ここでは、母材として水、スラブとしてタングステンを想定する。タングステンは水と比べて極端に材料定数の異なる材料である (Table 3)。垂直入射を考え、周波数 ω を 3.0 から 16.0 まで 0.1 毎に変化させ、解析を実行した。水とタングステンの界面を 14948 分割した。この時、問題の自由度は 119584 となる。ここでは、Burton-Miller 法の結合定数は $\alpha = -i/k^{(1)}$ とした。

Table 3 Material parameters for the perforated slab problem.

	Density ρ	λ	μ
Tungsten	13.800	145.597	64.85
Water	1.000	1.000	-

Fig. 6 に、Burton-Miller 法に基づく定式化を用いて得られた透過エネルギーを示す。得られた数値解は、Estrada et al. (9)

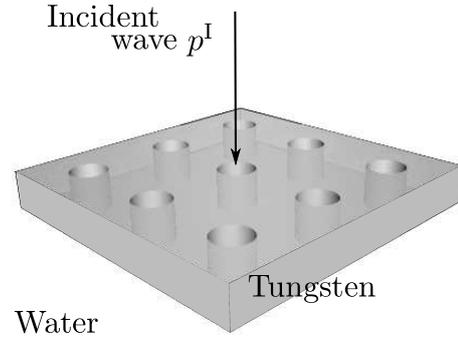


Fig. 5 Perforated slab immersed in water.

によるスラブを剛体としたモデルと長波長域を除いて一致している。ずれの原因は、長波長域ではスラブの弾性変形が大きいためだと考えられる。また、 $\Lambda/\zeta_{2,3} \approx 1.22$ 付近で、透過エネルギーが 1 に達する異常透過現象を再現できている。さらに、 $\Lambda \approx 0.45, 0.5, 0.7, 1.0$ 付近で見られる透過エネルギーのディップはアノマリである。アノマリ付近においても、提案手法は高精度であることが確認できる。

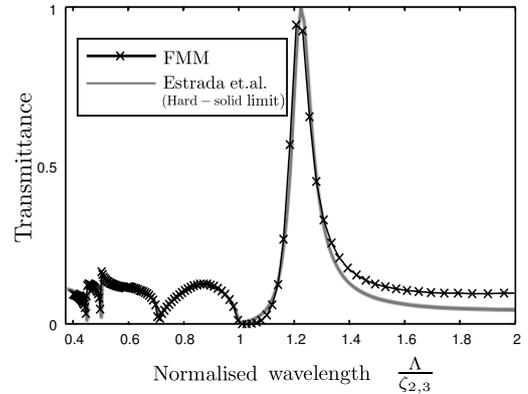


Fig. 6 Transmittance vs normalised wavelength in the case of scattering by periodically perforated tungsten slab.

次に、提案する前処理法の有効性を検証するため、提案する前処理法を用いた場合と従来法を用いた場合の (F)GMRES の反復回数 (Fig. 7)、計算時間 (Fig. 8) を示す。従来法としては、ここでは、多重極法の直接計算部分の全てを前処理行列として用いた。前処理行列の逆を作用させる際には GMRES を用い、その収束条件は残差が 10^{-1} を下回る、あるいは反復回数が 10 回に達するのいずれかとした。従来法による結果は図中では “Direct” と記す。なお、提案法・従来法いずれを用いた場合も、(F)GMRES の収束条件は 10^{-5} とした。

これらの図から、提案する Calderon の式に基づく前処理を用いた場合、従来法を用いた場合よりも (F)GMRES の収束性を改善できていることが分かる。また、短波長域で見られるアノマリ付近において、反復回数は増大するが、提案手

法を用いた場合、その増大は小さく抑えられていることが分かる。

次に、Burton-Miller 法を用いた場合と PMCHWT 定式化を用いた場合の提案する前処理法の性能の比較を行う。長波長域において、反復回数は PMCHWT 定式化を用いた場合の方が少なくなっているが、計算時間は全ての波長に対して Burton-Miller 法を用いた場合の方が短くなっている。これは、Burton-Miller 法を用いた場合の前処理行列の逆 (式 (44)) を作用させる計算量が、PMCHWT 定式化を用いた場合のそれ (式 (40)) と比べて少ないためである。

また、従来法を用いた場合に、Burton-Miller 法に基づいた場合の反復回数が少ない理由としては、式 (43) において、 $\alpha = 0$ とした場合、左辺に現れる作用素は「固有値の集積点が 3 点 ($1/2, 1/2 \pm c$) の作用素+コンパクト作用素」と書けるためであると考えられる。 $\alpha = -i/k^{(1)}$ が大きくなると、前処理無し、あるいはスケーリング等の簡便な前処理法を用いて式 (43) を離散化して得られる代数方程式を解いても、効率はそれほど悪くない。しかしながら、実際には α の値は非零であるため、従来法は超特異作用素 \mathcal{N} の影響を受ける。したがって、超特異作用素の影響を消去した提案手法の方が効率が良い。特に、係数行列の条件の悪化するアノマリ付近においては、提案手法の有効性が顕著となる。

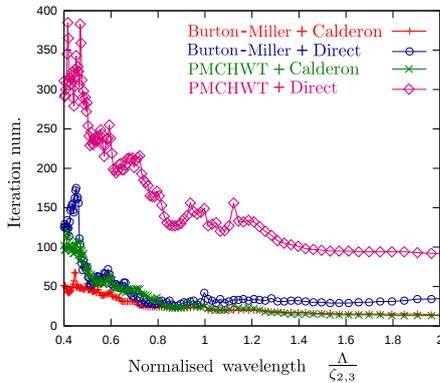


Fig. 7 The number of iteration for (F)GMRES.

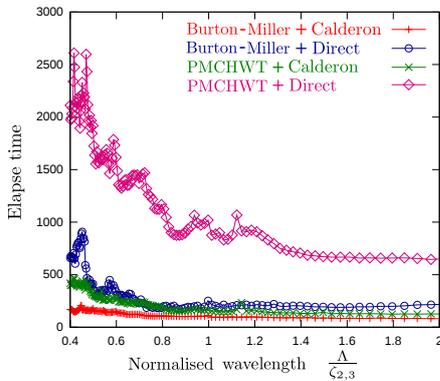


Fig. 8 Elapse time.

4. 結言

本論文では、音場・弾性場連成問題における周期多重極法

の Calderon の式に基づく前処理の開発を行った。PMCHWT 定式化に基づく積分方程式及び Burton-Miller 法を用いた積分方程式に対して、前処理行列の提案を行った。数値計算例を通して、いずれの定式化を用いた場合も、従来の前処理法を用いた場合に比べ、反復法の収束性を改善することができた。特に、アノマリ付近においても、提案する前処理法が有効であることを確認できた。また、Burton-Miller 法を用いた場合の方が、前処理行列の逆を作用させる計算量が少ないため、PMCHWT 定式化を用いた場合よりも、全体の計算時間が短くなることも分かった。

参考文献

- (1) M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 71, No. 13, pp. 2022–2025, Sep 1993.
- (2) Y. Otani and N. Nishimura. A periodic FMM for Maxwell's equations in 3D and its applications to problems related to photonic crystals. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 4630–4652, 2008.
- (3) 飯盛浩司, 吉川仁, 西村直志. 3次元動弾性学における周期多重極法とその平面2周期構造による散乱問題への適用. *応用力学論文集*, Vol. 13, pp. 169–178, 8 2010.
- (4) 飯盛浩司, 吉川仁, 西村直志. Helmholtz 場-弾性場連成問題のための周期多重極法. *計算数理工学論文集*, Vol. 11, pp. 59–64, 2011.
- (5) O. Steinbach and WL Wendland. The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method. *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 9, No. 1, pp. 191–216, 1998.
- (6) K. Niino and N. Nishimura. Preconditioning based on Calderon's formulae for periodic fast multipole methods for Helmholtz' equation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, pp. 66–81, 2012.
- (7) H. Isakari, K. Niino, H. Yoshikawa, and N. Nishimura. Calderon's preconditioning for periodic fast multipole method for elastodynamics in 3d. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 90, pp. 484–505, 2012.
- (8) W.C. Chew, E. Michielssen, JM Song, and JM Jin. *Fast and efficient algorithms in computational electromagnetics*. Artech House, Inc., 2001.
- (9) H. Estrada, V. Gómez-Lozano, A. Uris, P. Candelas, F. Belmar, and F. Meseguer. Sound transmission through plates perforated with two periodic subwavelength hole arrays. *Journal of Physics: Condensed Matter*, Vol. 23, p. 135401, 2011.