

レベルセット法に基づく境界要素法を用いた 定常動弾性問題のトポロジー最適化

TOPOLOGY OPTIMIZATION OF ELASTIC SOLID SUBJECTED TO TIME-HARMONIC LOADS BASED ON LEVEL-SET METHOD AND BEM

志知 晋一郎¹, 山田 崇恭², 松本 敏郎³, 高橋 徹⁴

Shinichiro SHICHI, Takayuki YAMADA, Toshiro MATSUMOTO and Toru TAKAHASHI

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: s_shichi@nuem.nagoya-u.ac.jp)
- 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: yamada@nuem.nagoya-u.ac.jp)
- 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)
- 4) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)

This paper presents a technique for topology optimization of three-dimensional elastic solids under time-harmonic loads by means of a level-set method and the boundary element method. Level set function is used to control the shape and topology of the solid. In order to update the distribution of the level-set function, a reaction diffusion equation that involves the topological sensitivity of the Lagrangian is solved. The topological sensitivity is evaluated by the strains of the original state and the adjoint state both of which are calculated by BEM. We present the topology optimization based on the level set method that can represent boundaries clearly and controls complexity of optimal configuration. The proposed method can obtain the optimal configuration that minimizes the displacement on a part of boundary. Finally, some numerical examples are shown to demonstrate the validity of the proposed topology optimization method.

Key Words: Optimum Design, Structural Analysis, Boundary Element Method
Topology Optimization, Level Set Method, Sensitivity Analysis

1. 緒言

センサー等の計測機器における計測精度や、自動車等の乗り物における快適性の向上のために、構造物の振動を抑制・遮断することがこれらの機器設計上の重要な課題となっている。すなわち、静剛性や強度等の静的な特性に加えて、固有値解析、周波数応答解析等の機械製品の動的な解析とその特性評価が、付加価値の高い製品の開発に必要な不可欠な技術となっている。

これらの課題を解決し高性能な機械製品の設計に有用な手段として、トポロジー最適化⁽¹⁾の適用が考えられる。トポロジー最適化は構造最適化問題を固定設計領域内の材料配置問題に置き換えることにより、大幅な形状変更を可能とした最も設計自由度の高い構造最適化手法であり、BendsøeとKikuchi⁽¹⁾によって均質化法に基づくトポロジー最適化として、初めて工学分野への適用が提案された。その後、密度法⁽²⁾、レベルセット法に基づく形状最適化手法^(3,4)等の様々な手法が提案され、定常動弾性問題に対しても適用されてい

る。Maら⁽⁵⁾は均質化設計法を用いて、二次元構造物に対して、特定の周波数区間内における動弾性平均コンプライアンスを最小化する方法を提案した。Minら⁽⁶⁾は均質化設計法を用いて、三次元における動弾性平均コンプライアンスを最小化する方法を提案し、Jog⁽⁷⁾は密度法を用いて、二次元における動弾性平均コンプライアンスを最小化する方法を提案した。また、Shuら⁽⁸⁾はレベルセット法に基づく形状最適化手法を用いて、特定の点における応答変位を最小化する方法を提案した。しかしながら、均質化設計法、密度法に基づく場合、最適化問題の正則化に起因して、構造領域と空洞領域の中間領域であるグレースケールを含む部分構造を最適構造として許容する問題を持つ。特に、動的特性を最適化の指標にする場合や、構造の柔軟性を積極的に利用した構造を創成設計する場合においては、グレースケールの問題が顕著に現れることが知られている。レベルセット法に基づく形状最適化では、グレースケールを本質的に排除することを可能とするが、基本的には形状最適化の方法であるため、初期構造などの設定パラメータに最適化結果が大きく依存する。その

結果、適切に最適化を行うためには、多くの試行錯誤を必要とする。さらに、いずれの方法も固定設計領域に対する有限要素法に基づき目的関数を計算している。すなわち、空洞領域に対して弱い材料を配置し、境界近傍においては滑らかに材料が変化する仮定の下、近似的な取り扱いを行っているため、実際の構造に対応する領域に対して計算すべき目的関数の値を定量的且つ正確に評価することが困難である。

そこで本研究では、三次元定常弾性問題において、目的関数を正確に評価することが可能なトポロジー最適化法を開発する。すなわち、最適化の過程において逐次要素分割を行いながら、形状とトポロジーの変更を行うことが可能な三次元定常弾性問題の構造最適化手法の開発を行う。なお、数値解析手法には、波動の取り扱いに優れ、要素生成が容易な境界要素法を用いる。トポロジー最適化手法は、Yamadaら^(9,10)が提案した方法を用い、境界要素法と逐次要素分割を組み合わせることにより、最適構造の外形形状が明瞭且つ滑らかで、最適構造の幾何学的な複雑さを同時に設定可能な構造最適化手法を開発する。

2. 境界要素法

境界 Γ_u で変位規定、境界 Γ_t で表面力が規定された、等方線形弾性体で構成された領域 Ω について考える。弾性体が一定角振動数 ω を持つ調和加振力を受け、定常状態が達成されたと仮定すると、支配微分方程式と境界条件は次のように書ける。

$$C_{ijkl}u_{k,li} + \rho\omega^2 u_j = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \quad (2)$$

$$t_i = \bar{t}_i \quad \text{on } \Gamma_t \quad (3)$$

ただし、 u_i 、 t_i はそれぞれ変位と表面力の複素振幅、 C_{ijkl} は弾性定数テンソル、 ρ は密度、 $\bar{\cdot}$ は既知関数であることを表す。繰り返し用いられる添字は総和規約に従い、カンマの後の添字はその座標成分による偏微分を表すものとする。

式(1)の基本解を用いると、変位 $u_i(\mathbf{y})$ の積分表現が次のように得られる。

$$u_j(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in \Omega \quad (4)$$

ただし、 Γ は $\Gamma_u \cup \Gamma_t$ を、 U_{ij} 、 T_{ij} はそれぞれ基本解とそれに関係づけられる表面力を表す。三次元問題の場合、 U_{ij} と T_{ij} は以下の様になる。

$$\begin{aligned} U_{ij} &= \frac{1}{4\pi\rho C_2^2} [\alpha\delta_{ij} - \beta r_{,i}r_{,j}] \\ T_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{d\alpha}{dr} - \frac{1}{r}\beta \right) \left(\delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} - r_{,j}n_{,i} \right) \right. \\ &\quad + \frac{2}{r}\beta \left(r_{,i}n_{,j} + 2r_{,i}r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2 \frac{d\beta}{dr} r_{,i}r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &\quad \left. - \left(\frac{C_1^2}{C_2^2} - 2 \right) \left(\frac{d\alpha}{dr} - \frac{d\beta}{dr} - \frac{2}{r}\beta \right) r_{,i}n_{,j} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

ただし、 C_1 と C_2 は、それぞれ縦波と横波の伝播速度、 r は点 \mathbf{x} 、 \mathbf{y} 間の距離、 n_i は点 \mathbf{x} における単位法線ベクトル、 $\frac{\partial r}{\partial n}$ は点 \mathbf{x} における r の法線方向微係数である。また、 α と β は次のように与えられる。

$$\alpha = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{i}{k_2 r} - \frac{1}{k_2^2 r^2} \right) e^{ik_2 r} + \frac{1}{r} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 \left(\frac{i}{k_1 r} + \frac{1}{k_1^2 r^2} \right) e^{ik_1 r} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{3i}{k_2 r} - \frac{3}{k_2^2 r^2} \right) e^{ik_2 r} \\ &\quad - \frac{1}{r} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 \left(1 - \frac{3i}{k_1 r} - \frac{3}{k_1^2 r^2} \right) e^{ik_1 r} \quad (7) \end{aligned}$$

ただし、 i は虚数単位、 $k_1 = \omega/C_1$ 、 $k_2 = \omega/C_2$ である。

式(4)は、静弾性問題の Somigliana の式に対応するものであり、点 $\mathbf{y} \in \Omega$ の点 $\mathbf{y} \in \Gamma$ への極限をとると、次のような境界積分方程式が得られる。

$$C_{ij}u_i(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma \quad (8)$$

ただし、 C_{ij} は点 \mathbf{y} が置かれている境界の形状に依存する定数であり、境界がなめらかな場合は Kronecker のデルタ記号を用いて $C_{ij} = (1/2)\delta_{ij}$ とかける。

境界積分方程式(8)を離散化すると、変位と表面力の節点値からなるベクトル $\{u\}$ 、 $\{t\}$ 、変位と表面力の節点値の係数マトリクス $[H]$ 、 $[G]$ からなる、次のような代数方程式が得られる。

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (9)$$

さらに、境界条件を適用して節点の未知量を左辺、既知量を右辺に移項して整理すると、式(9)は次式に帰着する。

$$[A]\{X\} = \{Y\} \quad (10)$$

ここで、 $\{X\}$ は未知節点値ベクトル、 $\{Y\}$ は既知量を右辺に移項して整理して得られるベクトルである。式(10)の代数方程式を解くと境界上の変位、表面力がすべて求められる。また、領域内の変位は Somigliana の公式により与えられ、境界積分方程式の場合と同様にして、離散化することにより計算することができる。

3. レベルセット法に基づく形状表現

固定された設計領域 D (以下、固定設計領域) において、物体領域 Ω と空洞領域を考える。物体領域と空洞領域の境界 $\partial\Omega$ をレベルセット法を用いて表現する。すなわち、レベルセット関数 ϕ を導入し、次式に示すように、物体領域では上限値 1 の正の値、空洞領域では下限値 -1 の負の値をとり、物体境界上においてゼロをとる関数 ϕ を用いて形状表現を行う。Fig. 1 に、レベルセット関数 ϕ と、レベルセット関数 ϕ により表現される二次元の形状を示す。

$$\begin{cases} 0 < \phi(\mathbf{x}) \leq 1 & \text{for } \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) = 0 & \text{for } \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(\mathbf{x}) < 0 & \text{for } \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (11)$$

上記のレベルセット関数を用いて、物体の有無を表現する特性関数を次のように定義する。

$$\chi_\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0 & \text{if } \phi(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad (12)$$

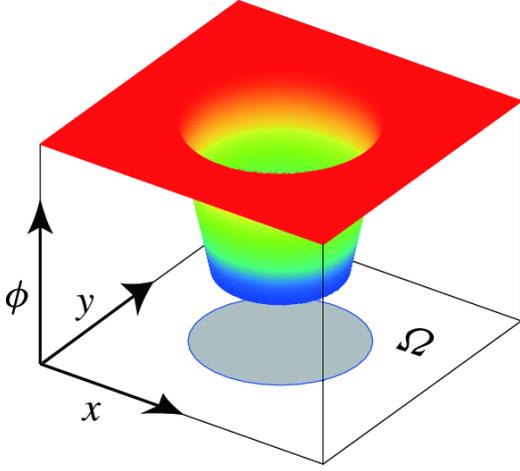


Fig. 1 The level set function in two dimensions

4. トポロジー最適化

4.1. 変位最小化問題

体積制約付きの変位最小化問題のトポロジー最適化は次のように定式化することができる。

$$\inf_{\phi} F(\chi_\phi) = \int_{\Gamma_0} \frac{1}{2} u_i u_i^* d\Gamma \quad (13)$$

$$\text{subject to } I = \text{Re} \left[\int_D v_j (C_{ijkl} u_{k,li} + \rho \omega^2 u_j) \chi_\phi d\Omega \right] = 0 \quad (14)$$

$$G(\chi_\phi) = \int_D \chi_\phi d\Omega - G_{\max} \leq 0 \quad (15)$$

ここで、 Γ_0 は変位の最小化対象とする境界、 v_i は随伴変数、* は複素共役、 G_{\max} は許容される体積の上限値である。

次に、目的汎関数 F のラグランジアン \bar{F} を導く。ラグランジアン \bar{F} はラグランジュ乗数 λ を用いて次式のようになる。

$$\bar{F} = F + I + \lambda G(\chi_\phi) \quad (16)$$

上記のラグランジアン \bar{F} が最適解となる為の必要条件は、次式で表されるカルーシュ・キューン・タッカー条件 (KKT 条件) を満たすことである。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\bar{F}}{d\phi}, \Phi \right\rangle &= 0, & I &= 0 \\ \lambda G(\chi_\phi) &= 0, & \lambda &\geq 0, & G(\chi_\phi) &\leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

なお、 $\left\langle \frac{d\bar{F}}{d\phi}, \Phi \right\rangle$ はラグランジアン \bar{F} の Φ 方向へのフレッシュエ微分を表す。

4.2. Tikhonov の正則化

特性関数 χ_ϕ は至る所で不連続性を許容する関数であるため、トポロジー最適化は不適切問題である。したがって、均

質化設計法や密度法等の方法により設計空間の緩和を行う必要があるが、物体領域と空洞領域を明確に識別する場合、それらの方法を適用することができない。そこで Yamada らの方法に従い Tikhonov の正則化⁽¹²⁾を行うと、正則化された目的汎関数のラグランジアン \bar{F}_R は次式のようになる。

$$\bar{F}_R = \bar{F} + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tau \phi_{,i} \phi_{,i} d\Omega \quad (18)$$

なお、 τ は正則化係数である。正則化係数 τ の値によって、得られる最適形状の複雑さが設定可能となる。詳細は文献⁽⁹⁾を参照されたい。

4.3. 感度解析

式 (13) で用いられるような境界積分は、次のように境界で定義される u_i や t_i からなる関数 $g(u_i, t_i)$ を積分したものと表現でき、 $F + I$ は次のように書くことができる。

$$J \equiv F + I = \int_{\Gamma} g(u_i, t_i) d\Gamma + \text{Re} \left[\int_{\Omega} v_j (C_{ijkl} u_{k,li} + \rho \omega^2 u_j) d\Omega \right] \quad (19)$$

式 (19) は部分積分により、次のように弱形式を含む形に変形できる。

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Gamma} g(u_i, t_i) d\Gamma \\ &+ \text{Re} \left[\int_{\Gamma} v_j t_j d\Gamma - \int_{\Omega} v_{j,i} C_{ijkl} u_{k,l} d\Omega + \int_{\Omega} v_j \rho \omega^2 u_j d\Omega \right] \end{aligned} \quad (20)$$

半径 ε をもつ微小球の空洞が物体領域に配置されたとき、 J は次式のように変化する。

$$\begin{aligned} J + \delta J &= \int_{\Gamma \cup \Gamma_\varepsilon} \left(g(u_i, t_i) + \frac{\partial g}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial g}{\partial t_i} \delta t_i \right) d\Gamma \\ &+ \text{Re} \left[\int_{\Gamma \cup \Gamma_\varepsilon} v_j (t_j + \delta t_j) d\Gamma - \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} v_{j,i} C_{ijkl} (u_{k,l} + \delta u_{k,l}) d\Omega \right. \\ &\left. + \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} v_j \rho \omega^2 (u_j + \delta u_j) d\Omega \right] \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、 Ω_ε は微小球の空洞領域、 Γ_ε は境界を表す。また、境界 Γ_ε における境界条件は表面力が既知とする。式 (20) を式 (21) に代入すると次式のような、 δJ を表す式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta J &= \text{Re} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} v_j t_j d\Gamma + \int_{\Omega_\varepsilon} v_{j,i} C_{ijkl} u_{k,l} d\Omega - \int_{\Omega_\varepsilon} v_j \rho \omega^2 u_j d\Omega \right. \\ &+ \int_{\Gamma_u} \left(\frac{\partial g}{\partial t_i} + v_i \right) \delta t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_t \cup \Gamma_\varepsilon} \left(\frac{\partial g}{\partial u_i} - \eta_i \right) \delta u_i d\Gamma \\ &\left. + \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \left(C_{ijkl} v_{j,kl} + \rho \omega^2 v_i \right) \delta u_i d\Omega \right] \end{aligned} \quad (22)$$

なお、 η_i は随伴変数 v_i に対応する表面力を表す。ここで、随伴方程式と境界条件を次式のように決める。

$$C_{ijkl} v_{k,li} + \rho \omega^2 v_j = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (23)$$

$$v_i = -\frac{\partial g}{\partial t_i} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (24)$$

$$\eta_i = \frac{\partial g}{\partial u_i} \quad \text{on } \Gamma_t \cup \Gamma_\varepsilon \quad (25)$$

上式の境界値問題の解を随伴変数の値として用いると、式 (22) は次式に帰着する。

$$\delta J = \text{Re} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} v_j t_j d\Gamma + \int_{\Omega_\varepsilon} v_{j,i} C_{ijkl} u_{k,l} d\Omega - \int_{\Omega_\varepsilon} v_j \rho \omega^2 u_j d\Omega \right] \quad (26)$$

Γ_ε は微小球の境界であるので、式 (26) の右辺第 1 項は次のように見積もることができる。

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} v_{jt} d\Gamma = \int_0^{4\pi} v_j^0 \sigma_{ij}^0 n_i \varepsilon^2 d\xi = v_j^0 \sigma_{ij}^0 \varepsilon^2 \int_0^{4\pi} n_i d\xi = 0 \quad (27)$$

ここで、 ξ は立体角を、上付きの 0 は微小球の中心での物理量であることを示す。式 (26) の右辺第 2 項、第 3 項も同様に次のように評価できる。

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v_{j,i} C_{ijkl} u_{k,l} d\Omega = \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 v_{j,i}^0 C_{ijkl} u_{k,l}^0 \quad (28)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v_j \rho \omega^2 u_j d\Omega = \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 v_j^0 \rho \omega^2 u_j^0 \quad (29)$$

よって、 J のトポロジー導関数を J' とすると次式のようになる。

$$J' = \text{Re} \left[v_{j,i}^0 C_{ijkl} u_{k,l}^0 - v_j^0 \rho \omega^2 u_j^0 \right] \quad (30)$$

4.4. 設計変数の更新

仮想的な時間 t を導入し、レベルセット関数の更新をレベルセット関数の時間発展として表現する。レベルセット関数の変動の駆動力は、ラグランジアンの変分勾配に比例するものと仮定すると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K \frac{d\bar{F}_R}{d\phi} \quad (31)$$

ここで、 K は比例定数である。上式に式 (18) を代入すれば次式が得られる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K \left(\frac{d\bar{F}}{d\phi} - \tau \phi_{,ii} \right) \quad (32)$$

式 (32) の $\frac{d\bar{F}}{d\phi}$ に、式 (30) で得られたトポロジー導関数を用いると、レベルセット関数を更新するための微分方程式（時間発展方程式）が次のように得られる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K \left\{ \text{Re} \left[v_{j,i}^0 C_{ijkl} u_{k,l}^0 - v_j^0 \rho \omega^2 u_j^0 \right] \chi_\phi - \lambda - \tau \phi_{,ii} \right\} \quad (33)$$

式 (33) 中の u_j^0 , $u_{k,l}^0$ および v_j^0 , $v_{j,i}^0$ は、境界要素法により計算することができる。式 (33) は、レベルセット関数を更新するための方程式となっている。レベルセット関数は、固定設計領域 D で定義されているので、更新に際して解析領域の変化は生じない。したがって式 (33) については、固定設計領域 D をボクセルで離散化することにより、有限要素法できわめて効率的に解くことができる。

5. 最適化アルゴリズム

最適化のフローチャートを Fig. 2 に示す。最初に、適当な初期構造を示すレベルセット関数 ϕ を与える。レベルセット関数 ϕ は、構造格子で要素分割された有限要素の各節点で定義し、物体領域は 1、空洞領域は -1、その境界は 0 を与える。与えたレベルセット関数 ϕ の初期値より、マーチングキューブ法⁽¹¹⁾ に基づいた境界要素生成を行う。境界要素法生成のアルゴリズムについては文献⁽¹³⁾ を参照されたい。そして、境界要素法を用い、変位 \mathbf{u} と表面力 \mathbf{t} を解析する。次に、得られた変位 \mathbf{u} が境界条件となる随伴方程式を境界要素法を用いて解析する。得られた変位 \mathbf{u} 、表面力 \mathbf{t} 、随伴変数 \mathbf{v} を用いて、目的汎関数と設計感度を計算する。このとき計算する

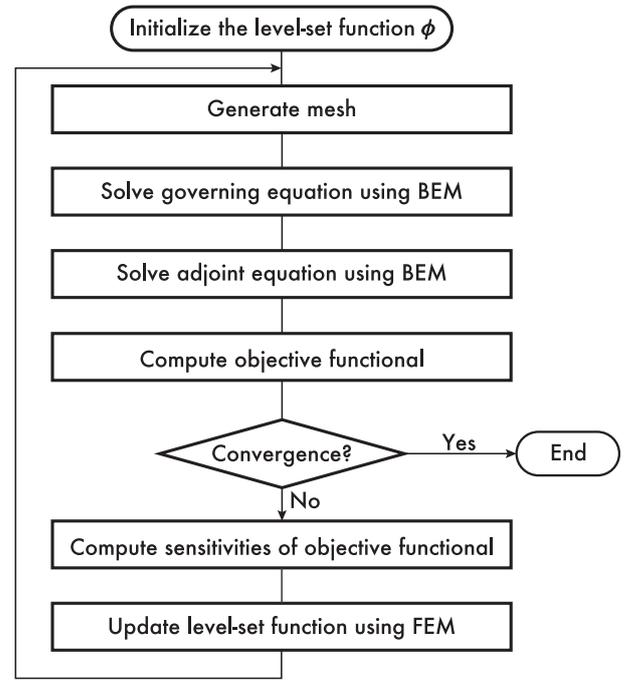


Fig. 2 Flow chart of optimization procedure

設計感度を、有限要素の各節点において計算する。なお、境界上又は境界と有限要素の節点の距離が最近接の境界要素長以内の場合、有限要素の節点に最も近い境界値を代入して計算される。ここで、目的汎関数が収束していれば、最適解が得られたとして最適化を終了する。収束していなければ、有限要素法を用いて時間発展方程式を解くことにより、レベルセット関数 ϕ を更新し、境界要素を生成するステップに戻る。なお、初期体積が体積制約 G_{\max} と異なる場合、数十ステップをかけ線形に体積制約に近づくように設定する。

6. 数値解析例

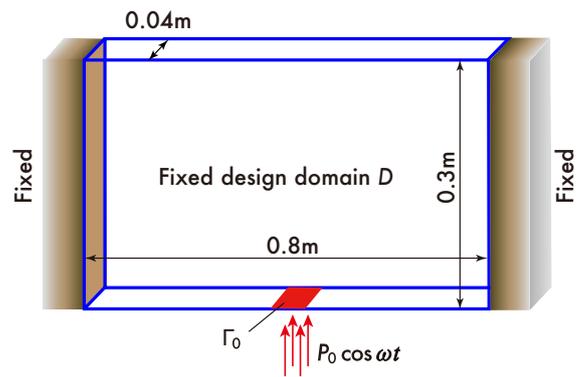
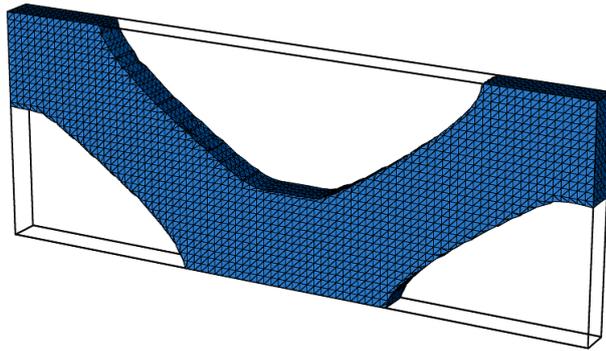
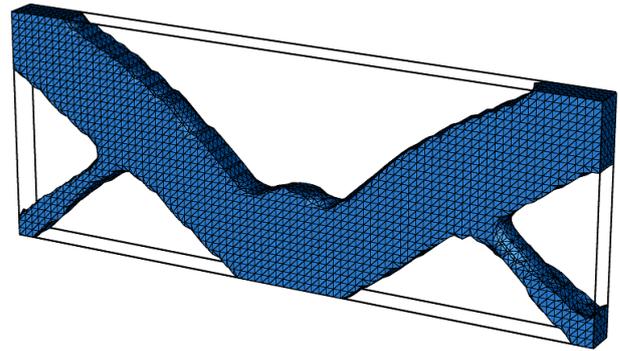


Fig. 3 Fixed design domain and the boundary conditions

簡単な三次元の数値解析例を示し、本提案手法の妥当性を確認する。Fig. 3 に固定設計領域と境界条件を示す。Fig. 3 に示すように、固定設計領域は、 $0.8\text{m} \times 0.6\text{m} \times 0.04\text{m}$ の直方体領域とし、境界条件として、両端の面で完全変位拘束、下面中央 Γ_0 において垂直方向に調和加振力 $P_0 \cos \omega t$ を作用させ



(a) Case 1



(b) Case 2

Fig. 4 Optimal configurations

る. この調和加振力の角振動数を $\omega = 500$ [rad/sec], 振幅を $P_0 = 1.0 \times 10^8$ とする. なお, 本研究では, 工学的観点から振幅 P_0 を設定したが, 線形問題であるため, 最適構造には影響を与えないことを注記しておく. また, 固定設計領域の格子分割数は $80 \times 60 \times 4$ とする. すなわち, レベルセット関数を定義する有限要素は, 要素長 1.0×10^{-2} m の六面体一次要素の構造格子 (自由度 12555) である. また, 許容される体積の上限値 G_{\max} を固定設計領域の 70% とし, レベルセット関数の初期値はいずれの場合も, 固定設計領域の全領域において $\phi = 1$ とする. すなわち, 固定設計領域が物体により占められている形状とする. 材料は縦弾性係数 2.16×10^{10} Pa, 質量密度 7.9×10^3 kg/m³, ポアソン比 0.3 の等方線形弾性体とする.

正則化係数 τ として 1.0×10^{-3} , 1.0×10^{-4} を選択し, それぞれ Case 1, Case 2 とする. このとき, 得られた最適形状を Fig. 4 に示す. Fig. 4 に示すとおり得られた最適形状の境界は滑らかで, また正則化係数 τ の設定値により最適形状の幾何学的な複雑さが変化していることがわかる. Case 1 における目的汎関数 F は 7.6×10^{-11} , Case 2 では 7.3×10^{-11} であり, より複雑な形状が表現できる Case 2 の方が良い値を示している.

次に本提案手法のメッシュ依存性を調べる. 上記の数値解析例 Case 2 と, 同一条件でメッシュ $120 \times 90 \times 6$ とした場合を Case 3 とし両者を比較する. このとき得られた最適形状を Fig. 5 に示す. Fig. 5 に示すとおり, 同じ形状が得られた. しかしながら, 形状の滑らかさという観点からすると, メッシュが細かい Case 3 の方が良い結果が得られている. 正則化係数が小さな値の場合, メッシュが粗いと形状が正確に表現できない可能性があり注意が必要である.

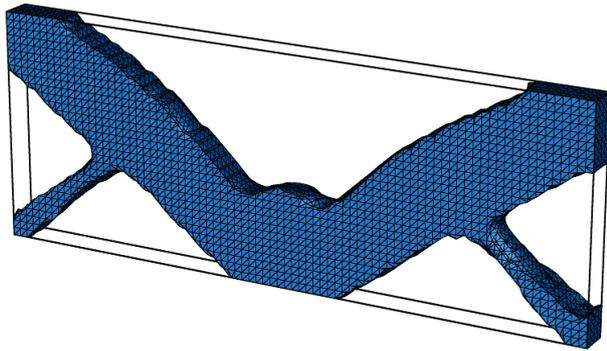
7. 結 言

本研究は, ステップ毎にレベルセット関数に基づき境界要素生成を伴う, 三次元境界要素法を用いたトポロジー最適化を定常動弾性問題に適用した. 本研究で得られた結果を以下に示す.

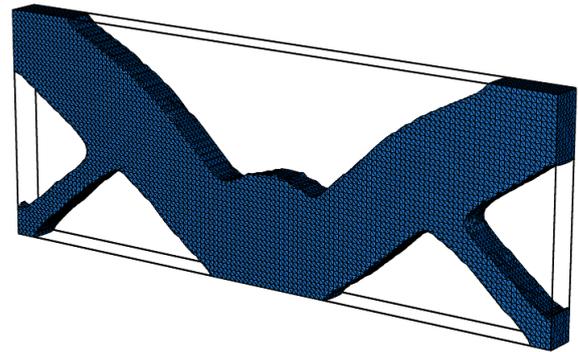
- (1) レベルセット法による形状表現を用いたトポロジー最適化法に基づいて, 三次元境界要素法を用いた体積制約付変位最小化問題の定式化を行った.
- (2) 数値解析例により, 本提案手法の妥当性, 有効性を検証した. その結果, 明瞭な形状が得られることがわかった. また, 本研究における定常弾性問題のベンチマークテストにより, メッシュ生成を行いながらの三次元境界要素法を用いたトポロジー最適化を適切に行うことが可能であるとわかった.

参考文献

- (1) M.P. Bendsøe and N. Kikuchi: Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **71**(1988), pp. 197–224.
- (2) M.P. Bendsøe: Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem, *Structural Optimization*, **1**(1989), pp. 193–202.
- (3) M.Y. Wang, X. Wang, and D. Guo: A Level Set Method for Structural Topology Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**(2003), pp. 227–246.
- (4) Allaire, G., Jouve, F., and Toader, A. M.: Structural Optimization Using Sensitivity Analysis and a Level-Set Method, *Journal of Computational Physics*, **194**(2004), pp. 363–393.
- (5) Z.D. Ma, N. Kikuchi and I. Hagiwara: Structural topology and shape optimization for a frequency response problem, *Computational mechanics*, **13**(1993), pp. 157–174.
- (6) S. Min, N. Kikuchi, Y.C. Park, S. Kim and S. Chang: Optimal topology design of structures under dynamic loads, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **17**(1999), pp. 208–218.
- (7) CS. Jog: Topology design of structures subjected to periodic loading, *Journal of sound and vibration*, **253**(2002), pp. 687–709.



(a) Case 2



(b) Case 3

Fig. 5 Mesh dependency of the optimal configuration

- (8) L. Shu, M.Y. Wang, Z. Fang, Z. Ma and P. Wei: Level set based structural topology optimization for minimizing frequency response, *Journal of Sound and Vibration*, **330**(2011), pp. 5820–5834.
- (9) T. Yamada, K. Izui, S. Nishiwaki, and A. Takezawa: A Topology Optimization Method Based on the Level Set Method Incorporating a Fictitious Interface Energy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**(2010), pp. 2876–2891.
- (10) 山田崇恭, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, 竹澤晃弘: レベルセット法による形状表現を用いたフェーズフィールド法の考え方に基づくトポロジー最適化, *日本機械学会論文集 A 編*, **75**(2009), pp. 550–558.
- (11) W.E. Lorensen and H.E. Cline: Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm, *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, **21**(1987), pp. 136–169.
- (12) A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin: *Solution of Ill-posed Problems*, (1997), Wiston and Sons.
- (13) 志知晋一郎, 山田崇恭, 鈴木皓久, 松本敏郎, 高橋徹: 三次元境界要素法を用いたレベルセット法に基づくトポロジー最適化, *日本機械学会論文集 C 編* **78**(2012), pp. 228–239.