

時間・境界上の離散化に wavelet 基底を用いた 拡散問題時間域 BEM における係数行列計算の効率化

REDUCTION OF COMPUTATIONAL COST OF TIME-DOMAIN BEM WITH SPACE-TIME WAVELET DISCRETIZATION IN 2-D DIFFUSION PROBLEMS

紅露一寛¹⁾, 佐藤鉄太郎²⁾, 阿部和久³⁾

Kazuhiro KORO, Tetsutaro SATO and Kazuhisa ABE

- 1) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp)
 2) 新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)
 3) 新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp)

In the time-domain BEM with the Haar wavelet-based space- and time discretization for 2-D diffusion problems, we attempt to reduce the computational cost of the BE analysis by omitting an unnecessary calculation and storage on the entries with the same value in the coefficient matrix. The existence of the matrix entries with the same value depends on the kind and the arrangement of the basis functions in the time-domain. The present reduction strategy enables us to reduce the matrix entries of $O(N_b^2 N_t^2)$ to $O(N_b^2 \cdot N_t \log N_t)$ (N_b : the number of the basis functions on a boundary, N_t : the number of the basis in the time-domain) without matrix compression scheme.

Key Words: Haar wavelet, time-domain boundary integral equation, diffusion problem

1. はじめに

境界要素解析における wavelet 法⁽¹⁾は, wavelet 基底のゼロモーメント性 (wavelet と所定次以下の単項式との直交性) により係数行列成分の距離減衰性を高め, 結果として微小となった大半の係数成分を切り捨てることで係数行列をスパース化する方法である. これまでの wavelet 法の適用は, 係数行列が密行列となり計算効率の削減効果が顕著となる静的問題や定常問題を対象としてきた^(1,2).

しかしながら, 境界要素法は静的問題や定常問題だけでなく, 非定常問題の解析にも用いることができる. 特に拡散問題においては, Laplace 変換を適用する定式化や, 時間微分を差分近似した上で得られた境界積分方程式を離散化する方法, 時間域境界積分方程式を離散化して解く方法が示されている⁽³⁾. 時間域境界積分方程式を離散化して解く方法は, 逆変換の煩わしさがなく非線形問題への適用可能性も有しているが, 時間に関する畳み込み積分計算の処理のために行列ベクトル積の計算が必要である. この計算における計算負荷が無視できず, 効率化法も提案されている⁽⁴⁾. Wavelet 法は, 著者らによって時間域境界積分方程式の境界上の離散化に適用されており, 離散畳み込み積分計算の効率化に一定の効果があることが示されている⁽⁵⁾.

なお, 文献⁽⁵⁾では, 境界上の離散化にのみ wavelet を用いているが, wavelet は時間領域の離散化にも適用可能である. Barmada⁽⁶⁾は, 拡散問題の時間域境界要素法において, 未知量の時間近似を wavelet 級数で構成し, 境界積分方程式を境界上で選点法により離散化した上で, ソース側の時間変数について wavelet 変換を作用させることで必要数の代数方程式を導出し, それを解いて得られた解を wavelet 逆変換することで時刻歴応答に再構成する方法を提案している. また, 著者らは, 拡散問題の時間域境界積分方程式の離散化において, 時間・空間の離散化に wavelet 基底を用いる方法を構成し, 定式化の妥当性及びその計算効率について検討している⁽⁷⁾. 文献⁽⁷⁾では, Haar wavelet を用いた境界上・時間領域の離散化を行ない, 係数計算の効率化を図るために, 高速 wavelet 変換 (FWT) を採用する方法についても検討しているが, 保存成分数・計算時間ともに従来法に比べて著しく大きくなる状況にあった.

しかしながら, 拡散問題の時間領域基本解の性質を考慮した場合, 時間領域での基底関数の配置の組合せによっては, 同一の係数値を持つものが係数行列中に多数存在することが予想され, 同一値となる係数の計算・保存の省略によって, 文献⁽⁷⁾で示した計算効率がさらに向上することが予想される. そこで本研究では, 拡散問題における時間域境界積分方程式を用いる定式化を対象に, Haar wavelet を時間および境

2011 年 9 月 30 日受付, 2011 年 11 月 10 日受理

† Dedicated to the memory of Prof. Takuo FUKUI

界上の離散化に用いた場合において、多数の同一係数成分値が存在することを示し、同一値の係数計算を省略した場合に生成計算が必要となる成分の総数を評価する。また、係数行列内の同一値成分の生成計算・保存を省略した上で切り捨ても実行した場合における、係数行列の保存成分数および係数行列の作成に要する時間の削減効果について検討する。

2. 拡散問題の時間域 BEM における Haar wavelet を用いた時間・空間の離散化⁽⁷⁾

2 次元拡散問題における時間域境界積分方程式は、 k を拡散係数、 u をポテンシャル、 $q = \partial u / \partial n$ (n : 境界上の点における外向き法線方向) として、次式で与えられる⁽³⁾。

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{\xi}, \tau) u(\boldsymbol{\xi}, \tau) + k \int_0^\tau \int_\Gamma q^*(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) u(\boldsymbol{x}, t) d\Gamma_x dt \\ - k \int_0^\tau \int_\Gamma u^*(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) q(\boldsymbol{x}, t) d\Gamma_x dt = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

なお、 t は時間変数、 $t = 0$ は初期時刻、 Ω は 2 次元空間で定義された領域であり、境界 Γ は $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ 、 $\emptyset = \Gamma_u \cap \Gamma_q$ なる 2 つの部分境界 Γ_u, Γ_q からなるものとする。境界条件は、 $u(\boldsymbol{x}, t) = \bar{u}(\boldsymbol{x}, t)$ (on Γ_u) または $q(\boldsymbol{x}, t) = \partial u / \partial n(\boldsymbol{x}, t) = \bar{q}(\boldsymbol{x}, t)$ (on Γ_q) で与えられるものとし、初期条件は、 $u(\boldsymbol{x}, t)|_{t=0} = u_0(\boldsymbol{x}) = 0$ (in Ω) を仮定する。さらに、 $\boldsymbol{\xi}$ はソース点、 \boldsymbol{x} は積分点であり、 $c(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ は点 $\boldsymbol{\xi}$ において境界が滑らかであれば 1/2 となる。また、 u^*, q^* は当該問題の時間領域基本解⁽³⁾ であり、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u^*(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) &= \frac{H(\tau - t)}{4\pi k(\tau - t)} \exp\left[-\frac{r^2}{4k(\tau - t)}\right], \\ q^*(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) &= \frac{\partial u^*}{\partial n}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau), \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$ であり、 $H(\cdot)$ は Heaviside 関数である。

次に、時間域境界積分方程式 (1) の離散化について考える。解析対象とする時間領域を $\mathcal{T} = \{t \mid 0 \leq t \leq \bar{\tau}\}$ ($\bar{\tau}$: 既知) に設定した上で、式中の u と q を時間・空間の領域 $\Gamma \times \mathcal{T}$ における次の 2 次元 wavelet 級数で構成する。

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}, t) &\approx \sum_{j=1}^{N_s} \hat{u}_j \phi_j(\boldsymbol{x}) \phi(t) + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{N_w(k)} \tilde{u}_{k,l} \psi_{k,l}(\boldsymbol{x}) \phi(t), \\ &+ \sum_{\lambda=0}^m \sum_{\beta=1}^{2^\lambda} \sum_{j=1}^{N_s} \hat{u}_j^{(\lambda,\beta)} \phi_j(\boldsymbol{x}) \psi^{(\lambda,\beta)}(t) \\ &+ \sum_{\lambda=0}^m \sum_{\beta=1}^{2^\lambda} \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{N_w(k)} \tilde{u}_{k,l}^{(\lambda,\beta)} \psi_{k,l}(\boldsymbol{x}) \psi^{(\lambda,\beta)}(t) \\ &= \sum_{J=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_b} \chi^{(J)}(t) w_j(\boldsymbol{x}) U_j^{(J)}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} q(\boldsymbol{x}, t) &\approx \sum_{j=1}^{N_s} \hat{q}_j \phi_j(\boldsymbol{x}) \phi(t) + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{N_w(k)} \tilde{q}_{k,l} \psi_{k,l}(\boldsymbol{x}) \phi(t) \\ &+ \sum_{\lambda=0}^m \sum_{\beta=1}^{2^\lambda} \sum_{j=1}^{N_s} \hat{q}_j^{(\lambda,\beta)} \phi_j(\boldsymbol{x}) \psi^{(\lambda,\beta)}(t) \\ &+ \sum_{\lambda=0}^m \sum_{\beta=1}^{2^\lambda} \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{N_w(k)} \tilde{q}_{k,l}^{(\lambda,\beta)} \psi_{k,l}(\boldsymbol{x}) \psi^{(\lambda,\beta)}(t), \\ &= \sum_{J=1}^{N_t} \sum_{j=1}^{N_b} \chi^{(J)}(t) w_j(\boldsymbol{x}) Q_j^{(J)}, \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\hat{u}_j, \tilde{u}_{k,l}, \hat{u}_j^{(\lambda,\beta)}, \tilde{u}_{k,l}^{(\lambda,\beta)}, \hat{q}_j, \tilde{q}_{k,l}, \hat{q}_j^{(\lambda,\beta)}, \tilde{q}_{k,l}^{(\lambda,\beta)}$ は展開係数である。 $\phi(t), \psi^{(\lambda,\beta)}(t)$ はそれぞれ時間近似に用いる Haar scaling 関数、Haar wavelet であり、時間領域 \mathcal{T} でそれぞれ 1 個、 2^λ 個配置する。 m は時間近似に関する最高階層である。なお、 $\psi^{(\lambda,\beta)}$ は、 ψ (ただし、 $\text{supp}\psi = [0, \bar{\tau})$) を mother wavelet として、 $\psi^{(\lambda,\beta)} = 2^{\lambda/2} \psi(2^\lambda t - (\beta - 1)\bar{\tau})$ で定義する。

一方、 $\phi_j, \psi_{k,l}$ はそれぞれ境界上の wavelet 展開に用いる Haar scaling 関数、Haar wavelet であり、 M は最高階層であり、 $N_s, N_w(k)$ はそれぞれ $\phi_j, \psi_{k,l}$ の個数である。 N_t, N_b はそれぞれ、時間近似、境界上の近似に用いる基底関数の総数である。Haar 基底の詳細については、文献⁽⁷⁾ を参照されたい。なお、 $\chi^{(J)}(t)$ ($J = 1, 2, \dots, N_t$) は、 $\phi(t)$ または $\psi^{(\lambda,\beta)}$ で与えられ、 $w_j(\boldsymbol{x})$ ($j = 1, 2, \dots, N_b$) $\phi_j(\boldsymbol{x})$ または $\psi_{k,l}(\boldsymbol{x})$ で与えられる。 $U_j^{(J)}, Q_j^{(J)}$ は式 (3), (4) の展開係数で構成される。

ここで、式 (3), (4) を式 (1) に代入して得られる残差に対し、次の関数

$$\chi^{(I)}(\tau) w_i(\boldsymbol{\xi}), \quad (I = 1, 2, \dots, N_t, i = 1, \dots, N_b), \quad (5)$$

を重み関数とした Galerkin 条件を課す。その結果、次の連立一次方程式を得る。

$$HU = GQ, \quad (6)$$

なお、 U, Q はそれぞれ u, q の展開係数 $U_j^{(J)}, Q_j^{(J)}$ を成分に持つベクトルである。また、 G, H はそれぞれ基本解 u^*, q^* の境界・時間積分により得られた係数行列であり、それぞれの成分 $g_{ij}^{(I,J)}, h_{ij}^{(I,J)}$ は次式で定義する。

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(I,J)} &:= \int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma \chi^{(I)}(\tau) w_i(\boldsymbol{\xi}) \\ &\cdot \int_0^\tau \int_\Gamma k u^*(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) \chi^{(J)}(t) w_j(\boldsymbol{x}) d\Gamma_x dt d\Gamma_\xi d\tau, \\ h_{ij}^{(I,J)} &:= \int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma c(\boldsymbol{\xi}, \tau) \chi^{(I)}(\tau) w_i(\boldsymbol{\xi}) \chi^{(J)}(\tau) w_j(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_\xi d\tau \\ &+ \int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma \chi^{(I)}(\tau) w_i(\boldsymbol{\xi}) \\ &\cdot \int_0^\tau \int_\Gamma k q^*(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) \chi^{(J)}(t) w_j(\boldsymbol{x}) d\Gamma_x dt d\Gamma_\xi d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

本手法では、式 (7) の微小成分を切り捨てることで、解析時の使用メモリの削減を図る。文献⁽⁷⁾ と同様、解析に際しては、切り捨て対象成分の生成に関する不要な計算を回避する目的で、時間・境界それぞれの二重積分の計算前後の 2 度、切り捨て判定を行なう。係数計算前の事前切り捨ては、 G 行列成分 $g_{ij}^{(A,B)}$ が次の条件を満たした場合に実行する。

$$\bar{g}_{ij}^{(A,B)} < \kappa \cdot g_{max}, \quad (8)$$

ここで、 κ は切り捨てる閾値、 g_{max} は行列 G の成分の代表値、 $\bar{g}_{ij}^{(A,B)}$ は $|g_{ij}^{(A,B)}|$ の近似評価値であり、基底関数のゼロモーメント次数を考慮して次式で与える。

$$\begin{aligned} |g_{ij}^{(A,B)}| &\approx \bar{g}_{ij}^{(A,B)} := \frac{k\gamma_A\gamma_B\beta_i\beta_j\bar{J}_A^{\nu_A+1}\bar{J}_B^{\nu_B+1}\bar{G}_i^{\nu_i+1}\bar{G}_j^{\nu_j+1}}{\nu_A!\nu_B!n_i!n_j!} \\ &\cdot \left| \frac{\partial^{\nu_A+\nu_B+n_i+n_j} u^*}{\partial \tau^{\nu_A} \partial t^{\nu_B} \partial \boldsymbol{r}^{\nu_i+n_i} \partial \boldsymbol{r}^{\nu_j+n_j}}(\boldsymbol{x}_c^{(j)}, t_c^{(B)}; \boldsymbol{\xi}_c^{(i)}, \tau_c^{(A)}) \right|, \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、 $x_c^{(j)}, t_c^{(B)}, \xi_c^{(i)}, \tau_c^{(A)}$ はそれぞれ $w_j, \chi^{(B)}, w_i, \chi^{(A)}$ のサポート中央点である。また、 $\bar{J}_A, \bar{J}_B, \bar{G}_i, \bar{G}_j$ は時間および境界上の積分に関するヤコビアンであり、基底関数のサポートは無次元座標上でいずれも $[-1, 1]$ に一致するように定義するものとし、 $\gamma_A, \gamma_B, \beta_i, \beta_j$ はそれぞれ $\chi^{(A)}$ の ν_A 次、 $\chi^{(B)}$ の ν_B 次、 w_i の n_i 次、 w_j の n_j 次モーメントである。

式 (8) を満たさない成分については、係数生成に必要な所定の計算を実行後、次の切り捨て判定条件に基づき、再度切り捨て判定を行なう。

$$|g_{ij}^{(A,B)}| < \kappa \cdot g_{max}. \quad (10)$$

3. 時間領域の近似基底の組合せと係数行列の同値成分の関係

本節では、式 (7) の係数行列成分の作成に際し、拡散問題の時間領域基本解の時間依存特性を考慮した場合、時間領域における Haar scaling 関数（区間一定関数）および Haar wavelet の組合せと配置によって同一値成分が存在することを示す。

式 (7) の係数計算に際し、時間積分に関する部分のみを抽出し、基本解の因果律を考慮すると、計算において次の時間に関する二重積分を取り扱う必要がある。

$$\begin{aligned} & (\chi^{(I)}, \chi^{(J)})_f \\ & := \int_0^{\bar{\tau}} \chi^{(I)}(\tau) \int_0^{\bar{\tau}} \chi^{(J)}(t) f(\tau - t) H(\tau - t) dt d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、時間に関する基底関数は、 $\chi^{(I)}$ については $\phi(\tau)$ または $\psi^{(\Lambda, B)}(\tau)$ 、 $\chi^{(J)}$ については $\phi(t)$ または $\psi^{(\lambda, \beta)}(t)$ で与えられるものとし、 f は被積分関数、 H は Heaviside 関数である。

3.1. $\chi^{(I)} = \phi(\tau), \chi^{(J)} = \phi(t)$ の場合

前節で述べたように、時間領域では scaling 関数は 1 個のみ用いるように wavelet 級数を定義している。そのため、この組み合わせは 1 通りしか存在せず、他の組合せの下で得られる式 (11) の計算値と同一となることはない。そのため、当該組み合わせの下で式 (11) の二重積分計算が必要となる。

3.2. $\chi^{(I)} = \phi(\tau), \chi^{(J)} = \psi^{(\lambda, \beta)}(t)$ の場合

この場合、2 種類の基底関数 $\chi^{(I)}, \chi^{(J)}$ のサポートは、 $\text{supp } \phi = [0, \bar{\tau}]$ 、 $\text{supp } \psi^{(\lambda, \beta)} = [2^{-\lambda}(\beta - 1)\bar{\tau}, 2^{-\lambda}\beta\bar{\tau}]$ で与えられる。このとき、式 (11) は、

$$\begin{aligned} & (\chi^{(I)}, \chi^{(J)})_f = (\phi, \psi^{(\lambda, \beta)})_f \\ & = \int_0^{\bar{\tau}} \phi(\tau) \int_{2^{-\lambda}(\beta-1)\bar{\tau}}^{2^{-\lambda}\beta\bar{\tau}} 2^{\lambda/2} \psi(2^\lambda t - (\beta - 1)\bar{\tau}) \\ & \quad f(\tau - t) H(\tau - t) dt d\tau, \end{aligned} \quad (12)$$

となる。ここで、積分変数を $t = \bar{\tau} - t'$ 、 $\tau = \bar{\tau} - \tau'$ のように変換すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & (\phi, \psi^{(\lambda, \beta)})_f = \int_{\bar{\tau}}^0 \phi(\bar{\tau} - \tau') \\ & \quad \cdot \int_{(1-2^{-\lambda}\beta)\bar{\tau}}^{(1-2^{-\lambda}(\beta-1))\bar{\tau}} 2^{\lambda/2} \psi(-2^\lambda t' + (2^\lambda - \beta + 1)\bar{\tau}) \\ & \quad f(t' - \tau') H(t' - \tau') dt' d\tau'. \end{aligned} \quad (13)$$

なお、Haar wavelet の形状がサポート中心に関して反対称となるから、 $2^{\lambda/2} \psi(-2^\lambda t' + (2^\lambda - \beta + 1)\bar{\tau}) = -2^{\lambda/2} \psi(2^\lambda t' -$

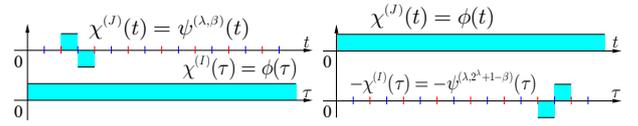


Fig.1 Two kinds of arrangement of two basis functions $\chi^{(I)} = \phi$ and $\chi^{(J)} = \psi^{(\lambda, \beta)}$ in the time domain. The two matrix entries on these two kinds of arrangement have the same absolute value.

$(2^\lambda - \beta)\bar{\tau}) = -\psi^{(\lambda, 2^\lambda+1-\beta)}$ となる。また、 ϕ は $\text{supp } \phi$ において区間一定関数で与えられるから、式 (13) は、

$$\begin{aligned} & (\phi, \psi^{(\lambda, \beta)})_f = - \int_{(1-2^{-\lambda}\beta)\bar{\tau}}^{(1-2^{-\lambda}(\beta-1))\bar{\tau}} \psi^{(\lambda, 2^\lambda+1-\beta)}(t') \\ & \quad \cdot \int_0^{\bar{\tau}} \phi(\tau') f(t' - \tau') H(t' - \tau') d\tau' dt' \\ & = -(\psi^{(\lambda, 2^\lambda+1-\beta)}, \phi)_f, \end{aligned} \quad (14)$$

のように変形できる。そのため、当該の基底関数の組み合わせでも、時間に関する二重積分値の大きさが同一となる成分が存在することがわかる。当該の基底の組合せの例を Fig.1 に示す。しかし、同一値となる係数は $\chi^{(I)}$ が scaling 関数、 $\chi^{(J)}$ が階層 λ の wavelet で与えられる係数行列ブロック内には同一値をとる係数は存在しないため、当該の係数行列ブロックを構成する 2^λ 個全ての計算を実行する必要がある。

3.3. $\chi^{(I)} = \psi^{(\Lambda, B)}(\tau), \chi^{(J)} = \phi(t)$ の場合

この場合、すべての係数成分は式 (14) から得られる。そのため、新たに当該の基底の組み合わせの下で係数成分の計算を実行する必要がない。

3.4. $\chi^{(I)} = \psi^{(\Lambda, B)}(\tau), \chi^{(J)} = \psi^{(\lambda, \beta)}(t)$ の場合

この場合、基底関数のサポートは、 $\text{supp } \psi^{(\Lambda, B)} = [2^{-\Lambda}(B - 1)\bar{\tau}, 2^{-\Lambda}B\bar{\tau}]$ 、 $\text{supp } \psi^{(\lambda, \beta)} = [2^{-\lambda}(\beta - 1)\bar{\tau}, 2^{-\lambda}\beta\bar{\tau}]$ となるから、式 (11) は、

$$\begin{aligned} & (\chi^{(I)}, \chi^{(J)})_f = (\psi^{(\Lambda, B)}, \psi^{(\lambda, \beta)})_f \\ & = \int_{2^{-\Lambda}(B-1)\bar{\tau}}^{2^{-\Lambda}B\bar{\tau}} 2^{\Lambda/2} \psi(2^\Lambda \tau - (B - 1)\bar{\tau}) \\ & \quad \cdot \int_{2^{-\lambda}(\beta-1)\bar{\tau}}^{2^{-\lambda}\beta\bar{\tau}} 2^{\lambda/2} \psi(2^\lambda t - (\beta - 1)\bar{\tau}) f(\tau - t) H(\tau - t) dt d\tau, \end{aligned} \quad (15)$$

となる。以下では、2 種類の wavelet の階層レベル Λ, λ の大小を考慮した上で、同一値の係数行列成分の存在を調べる。なお、当該のような、2 種類の Haar wavelet の階層レベルが Λ, λ で与えられる係数行列ブロックにおいては、ブロックを構成する係数成分の総数は $2^{\Lambda+\lambda}$ 個となる。

(1) $\Lambda > \lambda$ の場合

この場合、式 (15) の変数を $\tau = \tau' - 2^{-\lambda}\bar{\tau}\gamma$ 、 $t = t' - 2^{-\lambda}\bar{\tau}\gamma$ (γ : 整数) のように変換する。その結果、

$$\begin{aligned} & (\psi^{(\Lambda, B)}, \psi^{(\lambda, \beta)})_f \\ & = \int_{2^{-\Lambda}(B+2^{\Lambda-\lambda}\gamma)\bar{\tau}}^{2^{-\Lambda}(B+2^{\Lambda-\lambda}\gamma-1)\bar{\tau}} 2^{\Lambda/2} \psi(2^\Lambda \tau' - (B + 2^{\Lambda-\lambda}\gamma - 1)\bar{\tau}) \\ & \quad \cdot \int_{2^{-\lambda}(\beta+\gamma)\bar{\tau}}^{2^{-\lambda}(\beta+\gamma-1)\bar{\tau}} 2^{\lambda/2} \psi(2^\lambda t' - (\beta + \gamma - 1)\bar{\tau}) \\ & \quad f(\tau' - t') H(\tau' - t') dt' d\tau', \\ & = (\psi^{(\Lambda, B+2^{\Lambda-\lambda}\gamma)}, \psi^{(\lambda, \beta+\gamma)})_f, \end{aligned} \quad (16)$$

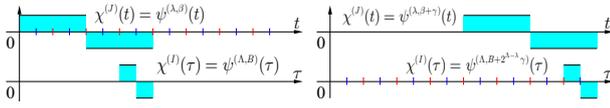


Fig. 2 Two kinds of arrangement of two basis functions $\chi^{(J)} = \psi^{(\Lambda, B)}$ and $\chi^{(J)} = \psi^{(\lambda, \beta)}$ ($\Lambda > \lambda$) in the time domain. The two matrix entries on these two kinds of arrangement have the same value.

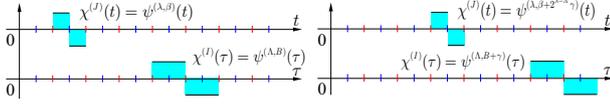


Fig. 3 Two kinds of arrangement of two basis functions $\chi^{(J)} = \psi^{(\Lambda, B)}$ and $\chi^{(J)} = \psi^{(\lambda, \beta)}$ ($\Lambda < \lambda$) in the time domain. The two matrix entries on these two kinds of arrangement have the same value.

が得られこととなり、同一値を示す基底関数の組み合わせが存在することがわかる。当該の基底の組合せの例を Fig.2 に示す。なお、コンパクトサポートを有する Haar wavelet を用いているため、因果律の要請から

$$(\psi^{(\Lambda, \delta_1)}, \psi^{(\lambda, 1+\delta)})_f = 0, \quad (17)$$

となる。ただし、 $\delta = 1, 2, \dots, 2^\lambda - 1$, $\delta_1 = 1, 2, \dots, 2^{\Lambda-\lambda} \delta$ である。そのため、基底関数の階層レベルの組み合わせが (Λ, λ) の係数行列ブロックにおいては、 $2^{\Lambda+\lambda}$ 個の係数のうち、 2^Λ 個の成分の計算を実行し保存すれば、必要となるすべての成分が得られる。

(2) $\Lambda < \lambda$ の場合

この場合、式 (15) の変数を $\tau = \tau' - 2^{-\Lambda} \bar{\tau} \gamma$, $t = t' - 2^{-\Lambda} \bar{\tau} \gamma$ (γ : 整数) のように変換すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & (\psi^{(\Lambda, B)}, \psi^{(\lambda, \beta)})_f \\ &= \int_{2^{-\Lambda}(B+\gamma-1)\bar{\tau}}^{2^{-\Lambda}(B+\gamma)\bar{\tau}} 2^{\Lambda/2} \psi(2^\Lambda \tau' - (B+\gamma-1)\bar{\tau}) \\ & \cdot \int_{2^{-\lambda}(\beta+2^{\lambda-\Lambda}\gamma-1)\bar{\tau}}^{2^{-\lambda}(\beta+2^{\lambda-\Lambda}\gamma)\bar{\tau}} 2^{\lambda/2} \psi(2^\lambda t' - (\beta+2^{\lambda-\Lambda}\gamma-1)\bar{\tau}) \\ & \quad f(\tau' - t') H(\tau' - t') dt' d\tau', \\ &= (\psi^{(\Lambda, B+\gamma)}, \psi^{(\lambda, \beta+2^{\lambda-\Lambda}\gamma)})_f. \end{aligned} \quad (18)$$

すなわち、この場合にも同一値を示す基底関数の組み合わせが存在することがわかる。当該の基底の組合せの例を Fig.3 に示す。なお、Haar wavelet を用いているため、因果律の要請から

$$(\psi^{(\Lambda, \delta)}, \psi^{(\lambda, 2^{\lambda-\Lambda}(\delta-1)+\delta_2)})_f = 0, \quad (19)$$

となる。ただし、 $\delta = 1, 2, \dots, 2^\lambda$, $\delta_2 = 1, 2, \dots, 2^{\lambda-\Lambda}$ である。そのため、式 (18), (19) を考慮することにより、2 種類の wavelet の階層レベルの組み合わせが (Λ, λ) の係数行列ブロックにおいては、 $2^{\Lambda+\lambda}$ 個の係数のうち、 2^λ 個の成分を計算し保存すれば、必要となる全ての成分が得られる。

(3) $\Lambda = \lambda$ の場合

ここで考察の対象となるのは、2 種類の wavelet の階層レ

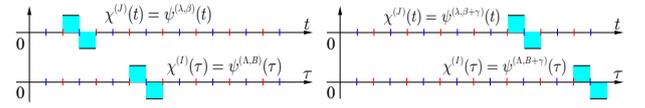


Fig. 4 Two kinds of arrangement of two basis functions $\chi^{(J)} = \psi^{(\Lambda, B)}$ and $\chi^{(J)} = \psi^{(\lambda, \beta)}$ ($\Lambda = \lambda$) in the time domain. The two matrix entries on these two kinds of arrangement have the same value.

ベルが Λ , $\lambda(\equiv \Lambda)$ となる係数行列ブロックの成分であり、係数成分の総数は $2^{\Lambda+\lambda} = 2^{2\Lambda} = 2^{2\lambda}$ となる。

式 (15) の変数を $\tau = \tau' - 2^{-\lambda} \bar{\tau} \gamma$, $t = t' - 2^{-\lambda} \bar{\tau} \gamma$ (γ : 整数) のように変換すると、

$$\begin{aligned} & (\psi^{(\Lambda, B)}, \psi^{(\lambda, \beta)})_f \\ &= \int_{2^{-\Lambda}(B+\gamma-1)\bar{\tau}}^{2^{-\Lambda}(B+\gamma)\bar{\tau}} 2^{\Lambda/2} \psi(2^\Lambda \tau' - (B+\gamma-1)\bar{\tau}) \\ & \cdot \int_{2^{-\lambda}(\beta+\gamma-1)\bar{\tau}}^{2^{-\lambda}(\beta+\gamma)\bar{\tau}} 2^{\lambda/2} \psi(2^\lambda t' - (\beta+\gamma-1)\bar{\tau}) \\ & \quad f(\tau' - t') H(\tau' - t') dt' d\tau' \\ &= (\psi^{(\Lambda, B+\gamma)}, \psi^{(\lambda, \beta+\gamma)})_f, \end{aligned} \quad (20)$$

となり、同一値を示す基底関数の組み合わせが存在することがわかる。当該の基底の組合せの例を Fig.4 に示す。なお、この場合についても、Haar wavelet のコンパクトサポート性、および因果律の要請から、

$$(\psi^{(\Lambda, \delta)}, \psi^{(\lambda, \delta_2)})_f = 0, \quad (21)$$

を得る。ただし、 $\delta = 1, 2, \dots, 2^\Lambda$, $\delta_2 = \delta + 1, \dots, 2^\lambda$ である。式 (20), (21) を考慮することにより、基底関数の階層レベルの組み合わせが (Λ, λ) の係数行列ブロックにおいては、 $2^{\Lambda+\lambda}$ 個の係数のうち、 2^Λ 個の成分の計算を実行し保存すれば、必要となるすべての成分が得られることがわかる。

3.5. 計算が必要な係数成分数の評価

本小節では、前小節の考察結果を踏まえ、式 (7) の係数行列成分の切り捨てを実行しない場合における、係数行列 G または H の作成において最小限計算が必要となる係数成分数を評価する。以下では、係数行列 G または H を A で表すこととする。

まず、係数行列の作成において計算が必要な係数成分数を $\mathcal{N}(A)$ で表す。その結果、 $\mathcal{N}(A)$ は 3.1-3.4. の考察より、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= N_b^2 \left[1 + \sum_{\lambda=0}^m 2^\lambda + \sum_{\Lambda=0}^m \left(\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} 2^\lambda + \sum_{\lambda=\Lambda+1}^m 2^\lambda \right) \right] \\ &= 2N_b^2 \left[2 + N_t (\log_2 N_t - 1) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

のように評価できる。なお、 $N_t = 2^{m+1}$, $m+1 = \log_2 N_t$ としている。式 (22) において、 $m \geq 1$ ならば $\log_2 N_t - 1 \geq 1$, $m = 0$ のとき $\mathcal{N}(A) = 4N_b^2$, $N_b^2 \cdot N_t = 2N_b^2$ となることに留意すると、0 以上のすべての整数 m に対して、

$$\mathcal{N}(A) = 2N_b^2 \left[2 + N_t (\log_2 N_t - 1) \right] > N_b^2 \cdot N_t, \quad (23)$$

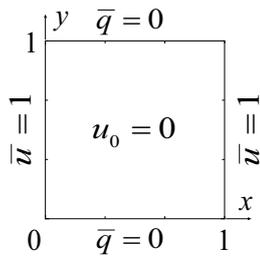


Fig.5 Test example.

となる．以上の結果から，当該の境界要素解析手法においては，係数成分の切り捨てを実行しない限り，従来の時間域境界要素法における係数行列保存成分数を下回る係数成分数とはならない．次節では，本節で示した同一値成分の係数計算を省略した上で，さらに係数成分の切り捨ても実行した場合における計算効率について検討する．

4. 計算効率の改善効果の検証

前節では，拡散問題時間領域基本解の性質に起因して，係数行列内には多数の同一値成分が存在し，その保存・計算を省略することで使用メモリや計算時間を削減できる可能性があることを示した．また，同一値成分の保存・生成計算の省略をしても，微小成分の切り捨てを併用しない限り，一般的な時間域境界要素解析における係数行列保存成分数を下回る計算効率は実現できないことを示した．そこで本節では，実際の境界要素解析において係数行列の同一値成分の生成・保存を省略し，さらに微小な係数成分の切り捨ても実行した場合における計算効率について検証する．

4.1. 解析条件

数値実験は，Fig.5 に示す拡散問題を対象に境界要素解析を行なった．解析領域 Ω は 1 辺の長さを 1 とした正方形領域で与え，初期条件は $u_0(x) = u(x, t = 0) = 0$ ($x \in \Omega$) で与えた．境界条件は，辺 $y = 0$ ， $y = 1$ では Neumann 条件 $\bar{q} = 0$ を，辺 $x = 0$ ， $x = 1$ では Dirichlet 条件 $\bar{u} = 1$ を与えた．なお，拡散係数は $k = 1$ としている．

境界値関数の境界上の分布を近似するために用いる wavelet 級数は，各部分境界において scaling 関数を 1 個配置するように定義し，最高階層を $M = 3$ ($N_b = 64$ 相当) としている．一方，時間に関しては，解析対象時間を $\bar{\tau} = 0.32$ とし，最高階層を $m = 4$ ($N_t = 32$ 相当) に設定した．計算効率の改善効果の検討は，係数行列の圧縮率と計算時間とについて行なうこととした．

係数行列の圧縮率 $\rho(\%)$ は，一般的な時間域境界要素解析において保存が必要な係数行列成分の総数が $N_b^2 \cdot N_t$ (N_b : 空間自由度， N_t : 時間ステップ数) を上限とすることを留意し，次式で定義する．

$$\rho(\%) := \frac{100 \cdot N_s}{N_b^2 \cdot N_t}. \quad (24)$$

ここで， N_s は式 (6) を解くために保存が必要となる係数行列成分数である．

切り捨て基準値 κ は， $\kappa = 1 \times 10^{-3}$ ， $\kappa = 1 \times 10^{-4}$ ， $\kappa =$

1×10^{-5} ， $\kappa = 1 \times 10^{-6}$ ， $\kappa = 1 \times 10^{-7}$ ， $\kappa = 0$ (切り捨てしない) の 6 通りに設定して解析を行なった．係数行列の圧縮率および計算時間の比較のために，時間領域では後退方向一定近似と選点法を，境界上では一定要素を用いた選点法をそれぞれ適用した一般的な時間域境界要素法，文献⁽⁵⁾で示した，時間領域の離散化は後退方向区分一定近似で近似し，境界上の離散化に wavelet 法を適用した時間域境界要素法，文献⁽⁷⁾に示した時間・境界上の離散化に Haar wavelet を用いた時間域境界要素法の 3 つのアプローチに基づく境界要素解析もあわせて行なった．

4.2. 係数行列の圧縮率の改善効果

各々の切り捨て基準値の下での係数行列の圧縮率 ρ を Table 1 に示す．表中「重複考慮なし」は前節で示した同一値成分の生成・保存を省略しなかった結果「重複考慮あり」は前節の考察結果を踏まえ，同一値成分の生成・保存を省略した場合の結果をそれぞれ示している．

係数行列の圧縮率は，同一係数成分の存在を考慮することで，考慮しない場合の 4 割程度となり，文献⁽⁷⁾の定式化の下では，係数成分の保存に要するメモリを最小限に抑えるためには，同一値を持つ係数成分の生成・保存の省略は有効である．ただし，保存成分数が省略しない場合の 40% 程度に削減できたとしても，本論文で示した効率化アルゴリズムを採用した場合，保存が必要なすべての係数成分を計算した場合には，連立方程式の求解計算を実行するために追加の整数値ベクトルが複数必要となる．そのため，実際のメモリ削減効果は圧縮率の低減効果よりも小さくなり，注意が必要である．

次に，同一値成分の計算・保存の省略を考慮した場合と，一般的な時間域 BEM および境界上の離散化にのみ wavelet を用いた時間域 BEM で得られた解析結果と比較する．Table 1 に示すように，当該の自由度では一般的な時間域 BEM，境界上の離散化にのみ wavelet を適用した BEM の圧縮率と同程度なるのは，切り捨て基準値を $\kappa = 1 \times 10^{-3}$ に設定した場合に限定されている．ただし，当該の切り捨て基準値では切り捨てにより近似解の誤差が増大する条件となっており，実際の解析では採用できない過大な切り捨て基準値である．そのため，切り捨てにより近似解の誤差が増大しない範囲内では，従来の 2 手法を上回る係数行列圧縮効果は達成できなかった．ただし，時間に関する最高階層 m を大きくした場合，係数行列に占める微小成分の割合が大きくなるため，保存が必要な係数成分の削減効果の向上が期待される．また，今回示した解析例では従来の時間域 BEM に対する使用メモリの削減効果は確認できなかったが，係数の切り捨ては切り捨てにより生じる近似解の誤差が離散化誤差と同等となる水準で実行できることから，近似解の離散化誤差のより大きい例題において本手法を適用した場合には，従来の時間域 BEM における使用メモリと同程度か，それを若干下回る程度まで削減できる可能性があることをあわせて指摘しておく．

4.3. 係数行列作成に要する計算時間の削減効果

次に，係数行列の作成に要する計算時間について検討する．解析結果を Table 2 に示す．なお，境界積分および時間積

Table 1 Compression rate $\rho(\%)$ of the coefficient matrix.

切り捨て基準値	圧縮率 $\rho(\%)$	
	重複考慮なし	重複考慮あり
1×10^{-3}	114.835	40.155
1×10^{-4}	325.510	133.411
1×10^{-5}	677.328	290.872
1×10^{-6}	1161.874	500.333
1×10^{-7}	1629.236	677.750
0	2053.125	809.375
従来法(選点法)	≤ 100	—
Wavelet BEM(境界上のみ)	45.197	—

Table 2 CPU time for generating the coefficient matrix.

切り捨て基準値	計算時間(sec)	
	重複考慮なし	重複考慮あり
1×10^{-3}	4032.81	3047.28
1×10^{-4}	5967.98	4414.77
1×10^{-5}	8067.91	5697.17
1×10^{-6}	10109.26	6654.79
1×10^{-7}	11515.93	7278.42
0	12249.58	7539.47
従来法(選点法)	0.81	—
Wavelet BEM(境界上のみ)	15.23	—

分は、積分精度を確保する目的で、積分区間を細分して数値積分を実行するアルゴリズムを採用している。

解析結果より、係数行列内の同一値成分の計算・保存の省略を考慮した場合は、考慮しない場合と比べて、計算時間が3~4割削減できている。計算時間の削減効果は、切り捨て基準値をより小さく設定し、切り捨て対象成分が少なくなるほど顕著となっており、切り捨てを実行しない場合の計算時間の削減効果が最も大きくなった。一方、従来一般的な時間領域境界要素法および境界上の離散化に wavelet を用いる時間領域境界要素法と計算時間を比べると、非常に大きな値を示している。これは、係数行列の1成分を生成するために時間および境界上の4重積分を計算する必要があることが主要因であるが、事前切り捨てに用いる係数成分の近似評価式の精度の低さや、積分区間の細分割アルゴリズムの調整の不十分さなども原因として考えられる。今後も継続して検討したい。

5. おわりに

本研究では、拡散問題における時間領域境界要素解析において、Haar wavelet を時間および境界上の離散化に用いる定式化を対象に、時間領域の2つの基底関数の種類と配置の組合せに起因して、離散化により得られた係数行列内に多数の同一係数成分値が存在することを示した。また、同一値の係数計算・保存を省略した場合において、生成計算が必要となる係数成分の総数を理論的に評価した。その結果、係数行列内には同一値を示す多数の係数成分が存在するものの、同一値成分の計算・保存を省略したとしても、切り捨てを実行しない条件下では一般的な時間領域境界要素法で必要とする係数成分数を下回ることが不可能であり、当該の定式化の下で従来法の計算効率を上回るためには、係数行列成分の切り捨てが

必須であることが分かった。

このような状況から、実際の数値実験において、同一値成分の生成・保存を省略する解析アルゴリズムを採用した上で、微小な係数成分の切り捨てを実行し、係数行列の圧縮および計算時間の削減効果を検討した。その結果、係数計算・保存の省略を行なうことで、省略しない場合の4割程度まで係数行列を圧縮でき、計算時間も6割程度まで削減できることがわかった。しかし、Haar wavelet を用い、例示した離散化条件のもとでは、従来時間領域境界要素法の場合と比べ、係数行列の圧縮率・計算時間ともに解析上不利となる結果を得た。ただし、係数行列の圧縮効果は、時間領域の wavelet 級数の最高階層をできるだけ大きく設定することによる向上が期待できる。計算時間については、時間・境界上の4重積分の計算が必要となることから、従来法を凌ぐことは難しいことが予想される。今後は、本論文で示した同一値成分の生成・保存を省略するアルゴリズムに高速 wavelet 変換アルゴリズムを併用する計算アルゴリズムの有効性や、時間領域においてゼロモーメント次数がより高次の wavelet を用いた離散化の有効性などについて検討した上で、時間・境界上の離散化に wavelet を用いた時間領域境界要素法定式化の有用性(非有用性)に対する結論をまとめたい。

謝辞 本研究を実施するにあたり、平成23年度新潟大学プロジェクト推進経費(奨励研究)の助成を得た。よって、ここに記して謝意を表す。

参考文献

- (1) Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V.: Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol.44, pp.144-183, 1991.
- (2) Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149-164, 2001.
- (3) 田中正隆, 中村正行, 松本敏郎著: 境界要素法(計算力学とCAEシリーズ), 培風館, 1991.
- (4) Soares Jr., D., Mansur, W.J.: Compression of time-generated matrices in two-dimensional time-domain elastodynamic BEM analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.61, pp.1209-1218, 2004.
- (5) 紅露一寛, 五十嵐和希, 阿部和久: 拡散問題を対象とした時間領域境界積分方程式法における wavelet 基底の適用とその計算効率. 計算数理工学論文集, Vol.9, pp.73-78, 2009.
- (6) Barmada, S.: Improving the performance of the boundary element method with time-dependent fundamental solutions by the use of a wavelet expansion in the time domain. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.71, pp.363-378, 2007.
- (7) 紅露一寛, 佐藤鉄太郎, 阿部和久: 時間・空間の離散化に wavelet 基底を用いた境界要素法による線形拡散解析. 計算数理工学論文集, Vol.10, pp.81-86, 2010.