

# RBF 法によるエネルギーオプション評価について

## Energy Option Evaluation By RBF Method

青山 健太<sup>1)</sup>, 藤原 良介<sup>1)</sup>, 脇田 佑希子<sup>1)</sup>, 北 栄輔<sup>2)</sup>

Kenta Aoyama, Ryosuke Fujiwara, Yukiko Wakita, and Eisuke Kita

- 1) 名古屋大学大学院情報科学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町1 )  
 2) 名古屋大学大学院情報科学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町1, E-mail: kita@is.nagoya-u.ac.jp)

Application of meshless method to the energy option pricing is presented in this paper. The governing equation of energy future option with respect to one asset is given as Schwartz one parameter equation. The option price is approximated with the radial basis functions. The European put option is considered as the numerical example. The numerical results are compared with theoretical one.

**Key Words**: Energy Option Contract, Black-Scholes, Radial Basis Function, Crank-Nicolson.

### 1. はじめに

近年, 金融市場は激しい価格変動にさらされている. その中でデリバティブ(派生証券)取引の発展は, 経済の自由化やグローバル化にともなう金融リスクの増大, 多様化, 複雑化に対して, 社会全体として最適リスクシェアリングを実現するものとして期待されている.

デリバティブ取引のひとつであるオプション取引は, Black と Scholes<sup>(1)</sup> によってオプション価格の評価式が考案されて以来, 重要なリスク回避の手段として広まっている. しかし, 全てのオプションの支配方程式が解析的に解けるわけではない. 何らかの数値解法が必要となるため, 現在オプションの価格評価のための数値解法が盛んに研究されている(2, 3, 4, 5, 6).

本研究では, エネルギーデリバティブにおける先物オプションの価格評価について述べる. オプション価格算出のモデルには Schwartz<sup>(7)</sup> の一因子モデルをとり, 数値解法として Radial Basis Function (RBF) を用いる(8, 9, 10, 11, 12, 13). RBF とはメッシュレス法における関数近似の一種である. Black と Scholes の偏微分方程式では, 求める先物オプション価格を, 先物オプションの対象となる先物価格と時間の2つの独立変数で表される関数として扱っており, この偏微分方程式を数値計算で解く場合, これらの変数の微分項を離散化する必要がある. 偏微分方程式の代表的な数値解法である有限差分法や有限要素法では, 解析領域の要素分割を必要とし, メッシュに区切って離散化された点を用いて近似する. しかし, RBF を用いた数値解法では解析領域の要素分割を必要とせず, メッシュの構造に関係なく, 評価点の周りの近

傍領域だけを定義し, その内部にあるランダムな点を用いて関数を近似することができる. そのため, 各タイムステップにおいて全ての評価点周りの関数を独立して近似することができる. さらに, ここで用いる RBF は, 解の収束性に優れ, 節点の増加にともない解が正解に収束することが知られているため, 解析精度の向上が期待できる(14, 15, 16, 17).

本論文の構成は次のとおりである. 第2節ではデリバティブとオプション取引について述べる. 第3節では, ヨーロピアン・先物オプションについての定式化を行う. 第4節では, 解析例において数値解と理論解との比較を行い, 第5節で結論を述べる.

### 2. オプション

#### 2.1. コール・オプションとプット・オプション

オプションとは, ある特定の商品(原資産と呼ばれる)を, 将来のある一定時点(満期日)あるいはそれ以前の一定期間内(権利行使期間)に, あらかじめ定められた価格(権利行使価格「行使価格」)で取引する権利のことである. オプション取引とは, 権利を売り・買いする取引のことを指す. オプションの権利のうち, 「買う権利」のことをコール・オプション(call option)「売る権利」のことをプット・オプション(put option)と呼ぶ.

現時点での原資産の価格が  $S$  であるとし, ある投資家がこの原資産を一定期間  $[0, T]$  の間に価格  $E$  で購入する権利を与えるコール・オプションを購入したとする.  $T$  をオプションの満期日,  $[0, T]$  を行使期間,  $E$  を行使価格という. 満期日において原資産価格が行使価格よりも高かった場合, コール・オプションの保有者は権利を行使して, 行使価格で原資産を購入し, それを市場で売却してその差額を得る. 原資産

価格が行使価格より低い場合は、買う権利を放棄すれば取引による損失は発生せず、コストはプレミアム支払相当額に限定される。

一方、原資産を価格  $E$  で売却する権利のついたプット・オプションを購入したとすると、もし原資産の価格が下落すれば、プット・オプションの保有者は時価で原資産を購入し、それよりも高い行使価格  $E$  でそれを売却できる。もし価格が予想以上に上昇していれば、権利を放棄することで損失を抑えられる。

オプション取引の最終的な損益のことをペイオフという。オプションを購入した場合は、コール・オプション、プット・オプションともに先行きの価格変動等で損失が発生しても、その額はプレミアムの範囲内に限定される。他方、オプションの売り手はオプション・プレミアムを受け取るが、買い手の権利の実行に応ずることにもなって、大きな損失が発生する可能性もある。

## 2.2. オプション取引の種類

オプションの権利行使は、ヨーロッパタイプとアメリカンタイプの2種類に大別できる。ヨーロッパ・先物オプションは、満期日  $T$  でのみ権利を行使することができるオプションで、アメリカン・先物オプションは、行使期間内のどの時点でも権利を行使することができるオプションである。これらに基づく先物オプションについて以下に述べる。

## 3. 定式化

### 3.1. Schwartz の一因子モデル

まず、Black と Scholes の考案したオプション価格を算出する偏微分方程式について述べる。配当支払いのない原資産の価格  $S$  の挙動は、以下の確率微分方程式で記述できる<sup>(18)</sup>。

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (1)$$

オプション価格を  $V$ 、原資産のボラティリティを  $\sigma$ 、リスクフリーレートを  $r$  とし、 $r$  が時間に関して一定で、原資産の価格過程が幾何ブラウン運動に従うとする。原資産が式 (1) を満たすとき、1つの原資産からなるオプションの価格  $V$  の支配方程式は次式となる。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2)$$

エネルギーデリバティブにおいては、満期の長い先渡しでは満期の短いものよりボラティリティが小さくなる。Black と Scholes のモデルはこれに対応していないので、Schwartz は一因子モデルを考案している<sup>(7)</sup>。Schwartz は原資産価格  $S$  が平均回帰的な過程をたどることを想定しており、原資産の価格  $S$  は以下の確率微分方程式で記述している。

$$\frac{dS}{S} = \alpha(\mu - \lambda - \ln S) dt + \sigma dz \quad (3)$$

ここで  $\alpha$  は平均回帰率、すなわち原資産価格が長期価格水準  $\mu$  に戻る速さであり、 $\sigma$  は原資産のボラティリティ、 $\lambda$  はエネルギーリスクの市場価格である。これより、エネルギー

原資産価格  $S$  と時間に依存するオプション価格が満たすべき微分方程式は以下ようになる<sup>(7)</sup>。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \alpha(\mu - \lambda - \ln S)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (4)$$

### 3.2. 評価方法

Schwartz は原資産価格の動きが式 (3) を満たす場合、先物価格は満期  $T$  の先渡し価格と等しくなるという境界条件のもとで、先物価格  $F$  は次の式で与えられることを示した<sup>(7)</sup>。

$$F(t, T) = \exp \left[ e^{-\alpha(T-t)} \ln S + (1 - e^{-\alpha(T-t)}) \times \left( \mu - \lambda - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) + \frac{\sigma^2}{4\alpha} (1 - e^{-2\alpha(T-t)}) \right] \quad (5)$$

ここで、 $(T-t)$  は満期までの期間を表す。

$V$  の  $S$  についての偏微分を求めると、次式を得る。

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial F}{\partial S} \frac{\partial V}{\partial F} = \frac{e^{-\alpha(T-t)}}{S} F \frac{\partial V}{\partial F} \quad (6)$$

これを、もう一度  $S$  で偏微分すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{e^{-\alpha(T-t)}}{S} F \frac{\partial V}{\partial F} \right) \\ &= \frac{e^{-2\alpha(T-t)}}{S^2} \left[ (1 - e^{\alpha(T-t)}) F \frac{\partial V}{\partial F} + F^2 \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

一方、 $V$  の  $t$  についての偏微分を求めると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= e^{-\alpha(T-t)} \left[ \alpha \ln S - \alpha \left( \mu - \lambda - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma^2}{2} e^{-\alpha(T-t)} \right] F \frac{\partial V}{\partial F} + \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned} \quad (8)$$

式 (6), (7), (8) を式 (4) に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} e^{-\alpha(T-t)} \left[ \alpha \ln S - \alpha \left( \mu - \lambda - \frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) - \frac{\sigma^2}{2} e^{-\alpha(T-t)} \right] F \frac{\partial V}{\partial F} \\ + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 e^{-2\alpha(T-t)}}{2} \left[ (1 - e^{\alpha(T-t)}) F \frac{\partial V}{\partial F} + F^2 \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} \right] \\ + e^{-\alpha(T-t)} \alpha (\mu - \lambda - \ln S) F \frac{\partial V}{\partial F} - rV = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

上式を整理すると、最終的に以下の式に帰着する。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{e^{-2\alpha(T-t)}}{2} \sigma^2 F^2 \frac{\partial^2 V}{\partial F^2} - rV = 0 \quad (10)$$

### 3.3. ペイオフ条件

ヨーロッパ・コール・先物オプションの場合、満期時点におけるペイオフは次式で与えられる。

$$V(F, T) = \max(F(T) - E, 0) \quad (11)$$

また、ヨーロッパ・プット・先物オプションの境界条件は次式で与えられる。

$$V(F, T) = \max(E - F(T), 0) \quad (12)$$

ここで、 $E$  はオプションの行使価格であり、 $\max(F - E, 0)$  は  $(F - E)$  と 0 の大きい方の値をとる。

### 3.4. Radial Basis Function

本研究では以下に示す RBF を定式化に用いて比較する。ここで  $F_j$  は評価点  $F$  に対する  $V$  を近似するためのデータ点である。

- Multi-quadric RBF

$$\phi(F, F_j) = \sqrt{c^2 + \|F - F_j\|^2} \quad (13)$$

- Reciprocal multi-quadric RBF

$$\phi(F, F_j) = \frac{1}{\sqrt{c^2 + \|F - F_j\|^2}} \quad (14)$$

- Gaussian RBF

$$\phi(F, F_j) = \exp\left(-\frac{\|F - F_j\|^2}{2c^2}\right) \quad (15)$$

### 3.5. Radial Basis Function を用いた数値解法

式 (10) において、演算子を

$$K = \frac{e^{-2\alpha(T-t)}}{2} \sigma^2 F^2 \frac{\partial^2}{\partial F^2} - r \quad (16)$$

とおくと、式 (10) は次式となる。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + KV = 0 \quad (17)$$

式 (17) をクランク・ニコルソン法によって離散化すると次式を得る<sup>(10)</sup>。

$$HV^{t+\Delta t} = GV^t \quad (18)$$

ここで、係数  $\theta$  は  $0 \leq \theta \leq 1$  の範囲でとられる。  $\Delta t$  は微小期間である。また、 $H, G$  は次式で定義される微分演算子である。

$$H = 1 + x \left( \frac{e^{-2\alpha(T-t+\Delta t)}}{2} \sigma^2 F^2 \frac{\partial^2}{\partial F^2} - r \right)$$

$$G = 1 - y \left( \frac{e^{-2\alpha(T-t)}}{2} \sigma^2 F^2 \frac{\partial^2}{\partial F^2} - r \right)$$

ここで

$$x = (1 - \theta) \Delta t, \quad y = \theta \Delta t$$

先物オプション価格  $V$  を  $\phi_j$  を用いて次式で近似する。

$$V^t \simeq \sum_{j=1}^N \lambda_j^t \phi_j \quad (19)$$

ここで、 $N$  は近似データ点の個数、 $\lambda_j^t$  は時刻  $t$  における未知係数を示す。式 (18) に式 (19) を代入すると次式を得る。

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{t+\Delta t} H \phi_j = \sum_{j=1}^N \lambda_j^t G \phi_j \quad (20)$$

### 3.6. アルゴリズム

RBF を用いた数値解法のアルゴリズムは次のようになる。

1. スポット価格  $S = 0$  から  $S = S_{\max}$  の間に  $N$  個のデータを均等にとり、 $t = 0$  から  $t = T$  の期間を  $M$  分割する。
2. 式 (5) により、各  $S$  の値に対して満期  $T$  における先物価格  $F$  を求める。
3. 3.3 節で示した境界条件より、各  $F$  の値に対して満期  $t = T$  における  $V^T$  を求める。

Table 1 Parameters for numerical result

Expiration date	$T = 0.25$ [year]
Exercise price	$E = 10.0$
Risk free interest rate	$r = 0.05$
Volatility	$\sigma = 0.1$
Mean reversion parameter	$\alpha = 0.1$
Long-term price level	$\mu = \log(28)$
Market price of energy risk	$\lambda = 0$
Crank-Nicolson parameter	$\theta = 0.5$
Maximum spot value	$S_{\max} = 30$
Number of timestep	$M = 300$
Number of stock data points	$N = 61$

4. 式 (19) で  $V^T$  を近似し、満期時点の未知係数値  $\lambda_j^T$  を求める。
5.  $t \leftarrow T - \Delta t$  とする。
6. 式 (20) を解いて  $\lambda_j^t$  を求める。
7.  $t \leftarrow t - \Delta t$  とする。
8.  $t \neq 0$  の時は 5 へ戻り、 $t = 0$  の時に次に進む。
9.  $t = 0$  の時点の  $\lambda_j^0$  が求まれば、それを式 (19) に代入して  $V^0$  が求まる。

## 4. 解析結果

### 4.1. パラメータの影響

RBF 関数におけるパラメータ  $c$  を決定するために表 1 のようにパラメータを設定して、タイムステップ数  $M = 300$ 、データ点の個数  $N = 61$  として Mathematica 7.0 で解析を行い、異なる  $c$  に対して相対誤差  $\varepsilon$  を計算する。式 (20) の係数行列  $G\phi_j$  の条件数も示す。数値解  $V_{RBF}$  と理論解  $V_{Theo}$  の相対誤差  $\varepsilon$  は次式より求める。

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |V(F_j, t)_{RBF} - V(F_j, t)_{Theo}| \quad (21)$$

### MQ-RBF の場合

MQ-RBF の場合の解析結果を図 1 に示す。図 1 において、実線は数値解の相対誤差  $\varepsilon$  を、破線は係数行列  $G\phi_j$  の条件数を示す。 $c$  の値が大きくなるにつれて理論解との誤差は小さくなるが、係数行列の条件数は大きくなっていくことがわかる。Mathematica のアルゴリズムによれば、条件数は  $10^9$  以上になると計算精度が保証されない。そこで、条件数が  $10^9$  よりも小さく、誤差が最も小さい値として、 $c = 2.2$  を採用する。

$c = 2.2$ 、タイムステップ数  $M = 300$  として、資産のデータ点の個数  $N$  を変化させた場合の解析結果を表 2 に示す。これらの中では、データ点の個数を  $N = 61$  とするのが良いことがわかる。

$c = 2.2$ 、データ点の個数を  $N = 61$  として、タイムステップ数  $M$  を変化させ、誤差を計算した結果を図 2 に示す。タイムステップ数を増やすに従い誤差は収束していく。 $M = 300$  は十分な精度を示していることがわかる。

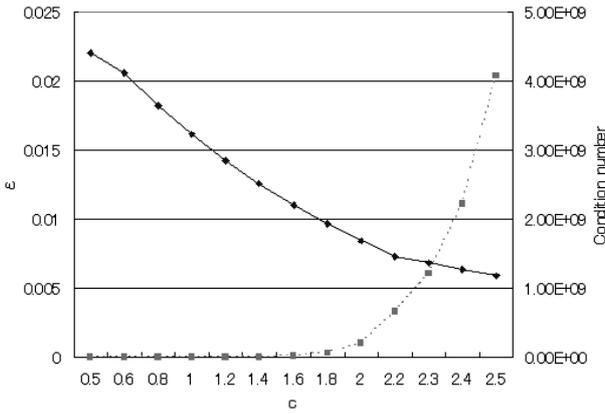


Fig. 1 Relative error and condition number with respect to parameter  $c$

Table 2 Relative error and condition number with respect to parameter  $N$

$N$	Condition number	$\varepsilon$
31	$2.36 \times 10^5$	0.01241660
61	$6.59 \times 10^8$	0.00731628
121	$3.51 \times 10^{13}$	0.05758400

以上より, RBF のパラメータ  $c$ , タイムステップ数  $M$ , 資産のデータ点の個数  $N$  の値を決定して解析を行った結果を図 3 に示す. 図 3 を見ると, MQ-RBF を用いた解析解  $V_{RBF}$  と理論解  $V_{Theo}$  は, ほぼ一致していることがわかる.

#### RMQ-RBF の場合

RMQ-RBF の場合について, 同様にパラメータ評価を行った結果を図 4, 図 5, 表 3 に示す. 図 4 において, 実線は数値解の相対誤差  $\varepsilon$  を, 破線は係数行列  $G\phi_j$  の条件数を示す. 図 4 より  $c = 3.1$ , 図 5 より  $M = 300$ , 表 3 より  $N = 61$  とする. 数値解  $V_{RMQ-RBF}$  と理論解  $V_{Theoretical}$  の比較を図 6 に示す. 図 6 を見ると, RMQ-RBF を用いた解析結果と理論解は, ほぼ一致していることがわかる.

#### Gaussian-RBF の場合

Gaussian-RBF の場合について, 同様にパラメータ評価を行った結果を図 7, 図 8, 表 4 に示す. 図 7 において, 実線は

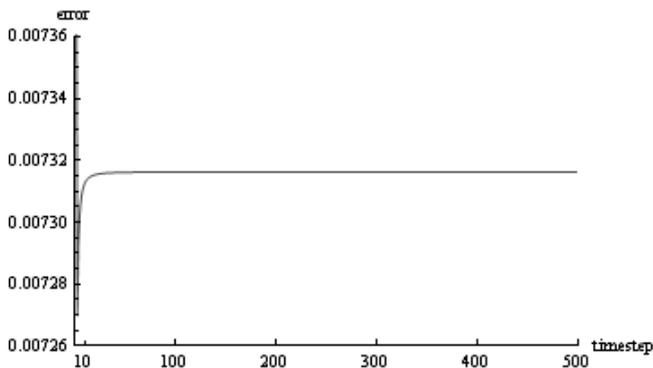


Fig. 2 Relative error with respect to timestep  $M$

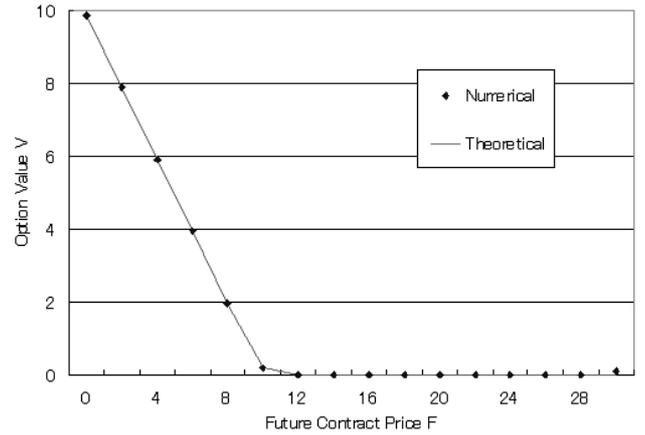


Fig. 3 Results by Multi-quadric RBF

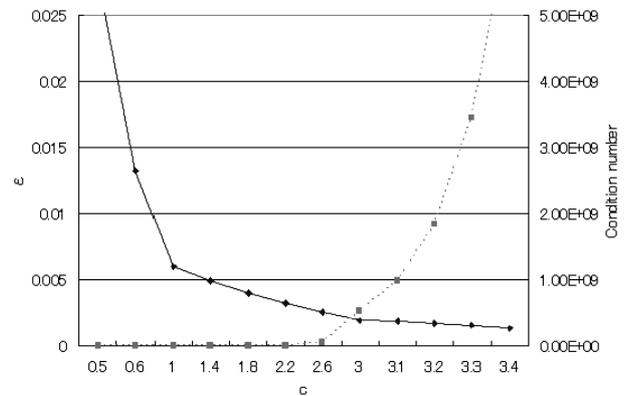


Fig. 4 Relative error and condition number with respect to parameter  $c$

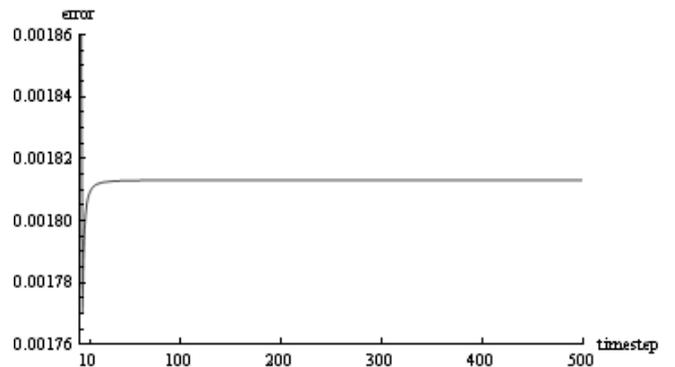


Fig. 5 Relative error with respect to timestep  $M$

Table 3 Relative error and condition number with respect to parameter  $N$

$N$	Condition number	$\varepsilon$
31	$4.26 \times 10^4$	0.00583569
61	$9.86 \times 10^8$	0.00181310
121	$4.47 \times 10^{13}$	$3.78 \times 10^{227}$

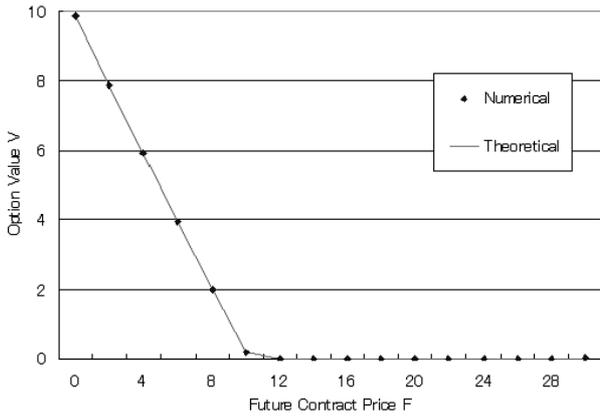


Fig. 6 Results by Reciprocal multi-quadric RBF

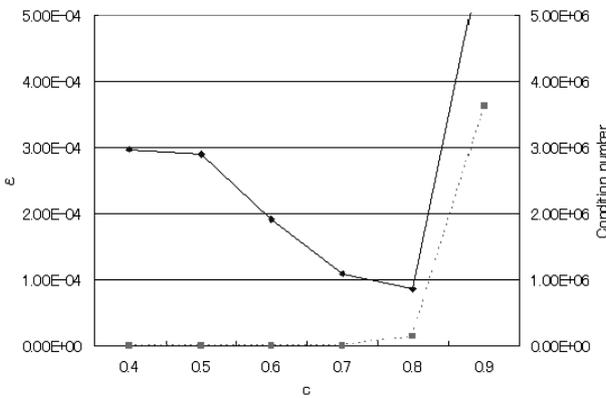


Fig. 7 Relative error and condition number with respect to parameter  $c$

数値解の相対誤差  $\varepsilon$  を、破線は係数行列  $G\phi_j$  の条件数を示す。図7より  $c=0.8$ 、図8より  $M=300$ 、表4より  $N=61$  とする。数値解  $V_{Gaussian-RBF}$  と理論解  $V_{Theoretical}$  の比較を図9に示す。図9を見ると、Gaussian-RBFを用いた解析結果と理論解は、ほぼ一致していることがわかる。

#### 4.2. RBF の比較

3つのRBFについて計算誤差を図10に示す。これよりGaussian-RBF, RMQ-RBF, MQ-RBFの順で、精度が良いことがわかる。

計算には、CPU: Intel(R) Pentium(R) 4 CPU 3.20GHz, 1.00 GB RAM を用い、数値解析には、Mathematica 7.0を用いてプログラムを作成している。計算時間の比較を図11に示す。

Table 4 Relative error and condition number with respect to parameter  $N$

$N$	Condition number	$\varepsilon$
31	$1.15 \times 10^1$	0.0037766700
61	$1.36 \times 10^5$	0.0000863275
121	$2.84 \times 10^{13}$	$2.81 \times 10^{332}$

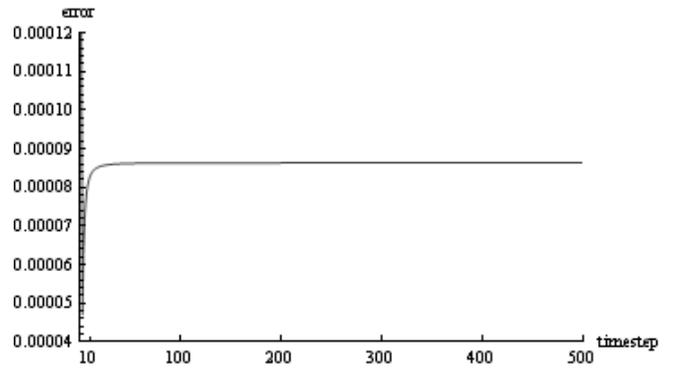


Fig. 8 Relative error with respect to timestep  $M$

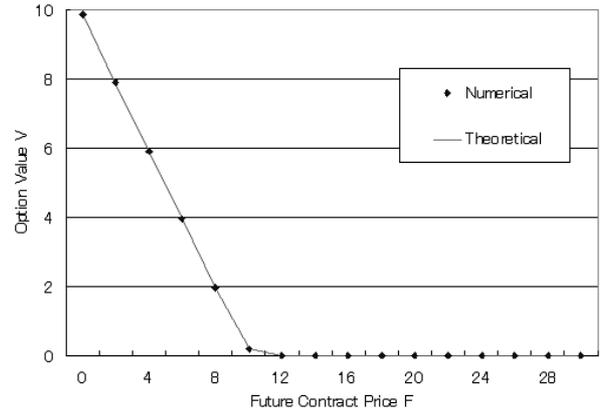


Fig. 9 Results by Gaussian RBF

図11を見ると、MQ-RBF, RMQ-RBF, Gaussian-RBFの順で計算時間が短いことがわかる。

#### 5. 結論

本研究は、1つのエネルギーを資産とするヨーロッパタイプのプット・先物オプションについて、Radial Basis Function(RBF)を用いたメッシュレス法で解析を行った。

最初に、パラメータ評価を行ってから、数値解を理論解と比較した。その結果、各RBFともに、数値解と理論解はほぼ一致するという結果を得られた。計算精度の点では、Gaussian RBF, RMQ-RBF, MQ-RBFの順で高い精度を示した。また、計算時間の点では、MQ-RBFとRMQ-RBFは同程度、Gaussian RBFは他よりも計算時間が長いという結果を得られた。これらの結果から、計算精度だけを求めるなら、RBF関数としてGaussian RBFを用いるのが最適であるが、計算速度を考慮するとMQ-RBFとRMQ-RBFはほぼ同じ時間の計算速度なので、総合するとRMQ-RBFを用いるのが良いと結論づけられた。

今後は、実データからのパラメータ推定を含めた具体的な実例に対する適用について研究をすすめていきたいと考えている。

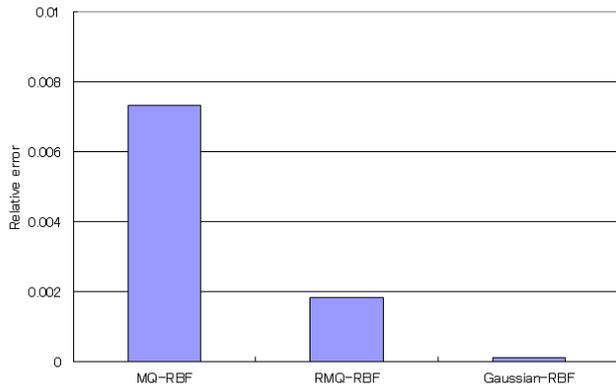


Fig. 10 Comparison of computational errors for RBFs

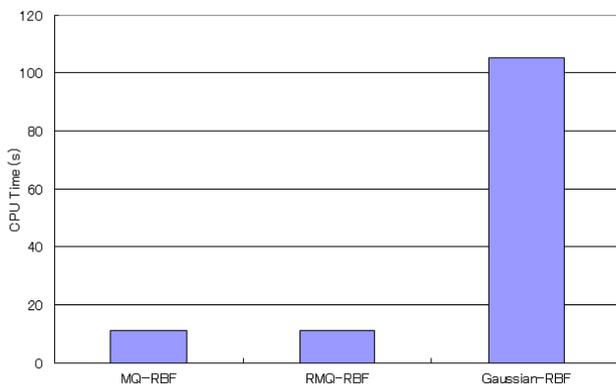


Fig. 11 Comparison of computational times for RBFs

### 参考文献

- (1) F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637–659, 1973.
- (2) P. Wilmott, J. Dewynne, and S. Howison. *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press, 1993.
- (3) M. A. Dempster and J. P. Hutton. Pricing american stock options by linear programming. *Mathematical Finance*, Vol. 9, No. 3, pp. 229–254, 1999.
- (4) 湯前祥二, 鈴木輝好. シリーズ現代金融工学 6 モンテカルロ法の金融工学への応用. 朝倉書店, 2000.
- (5) 諸星穂積. アメリカンオプションの数値解析に関する話題. 日本計算工学会論文集, Vol. 8, No. 2, pp. 686–689, 2003.
- (6) 津野義道. ファイナンスの数理入門. 共立出版, 2003.
- (7) L. Clewlow, C. Strickland, 山木要一 (訳). エネルギーデリバティブ. シグマベイスキャピタル, 2004.
- (8) S. Choi and M. Marozzi. A numerical approach to american currency option valuation. *Journal of Derivatives*, pp. 19–29, 2001.
- (9) M. Marozzi, S. Choi, and C. S. Chen. On the use of boundary conditions for variational formulations arising in financial mathematics. *Journal of Applied Mathematics and Computation*, Vol. 124, pp. 197–214, 2001.
- (10) M. B. Koc, I. Boztosum, and D. Boztosum. On the numerical solution of Black-Scholes equation. In *Proceedings of International Workshop on Meshfree Method 2003*, pp. 11–16, 2003.
- (11) Y. C. Hon. A quasi-radial basis functions method for american options pricing. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 43, No. 3, pp. 513–524, 2002.
- (12) E. Kita, Y. Goto, F. Zhai, and K. Shen. Evaluation of asian option by using rbf approximation. In C. A. Brebbia and J. T. Katsikadelis, editors, *Boundary Elements XXVIII (Skiathos, Greece, 2006)*, pp. 33–40, 2006.
- (13) E. Kita and Y. Goto. Evaluation of the european stock option by using the RBF approximation. In A. Kassab, C. A. Brebbia, E. Divo, and D. Poljak, editors, *Boundary Elements XXVII (Orlando, USA, 2005)*, pp. 91–98, 2005.
- (14) Y. C. Hon and X. Z. Mao. A multiquadric interpolation method for solving initial value problems. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 12, No. 1, pp. 51–55, 1997.
- (15) C. S. Chen, A. S. Muleshkov, and M. A. Golberg. The numerical evaluation of particular solutions for Poisson's equation - a revisit. In C. A. Brebbia and H. Power, editors, *Boundary Elements XXI*, pp. 312–322. WIP Press, 1999.
- (16) C. S. Chen, M. D. Marozzi, and S. Choi. The method of fundamental solutions and compactly supported radial basis functions: a meshless approach to 3D problems. In C. A. Brebbia and H. Power, editors, *Boundary Elements XXI*, pp. 561–570. WIP Press, 1999.
- (17) W. Chen. Some recent advances on the RBF. In C. A. Brebbia and D. Poljak, editors, *Boundary Elements XXIV*, pp. 125–134. WIP Press, 2002.
- (18) 森平爽一郎, 小島裕. コンピュータシヨナル・ファイナンス. 朝倉書店, 1997.