計算数理工学論文集 Vol. 11 (2011 年 12 月)，論文 No. 16-111216 JASCOME

レベルセット法による形状表現を用いた固有振動数規定問題のトポロジー最適化

A TOPOLOGY OPTIMIZATION FOR THE EIGENFREQUENCY MATCHING PROBLEM USING THE LEVEL SET-BOUNDARY EXPRESSIONS

山田　崇恭 [1)]，松本　敏郎 [2)]，西脇　眞二 [3)]

Takayuki YAMADA, Toshiro MATSUMOTO and Shinji NISHIWAKI

1) 名古屋大学大学院工学研究科　(〒 464–8603　名古屋市千種区不老町，　E-mail: yamada@nuem.nagoya-u.ac.jp)
2) 名古屋大学大学院工学研究科　(〒 464–8603　名古屋市千種区不老町，　E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)
3) 京都大学大学院工学研究科　(〒 606–8501　京都市左京区吉田本町，　E-mail: shinji@prec.kyoto-u.ac.jp)

This paper presents a topology optimization method for the eigenfrequency matching problem using the level set-based boundary expressions. First, the basic details of a level set-based topology optimization method are briefly discussed. Second, an optimization problem for the eigenfrequency matching problem is formulated. Next, a new topology optimization algorithm based on the level set method is constructed, where a new topology optimization method using Tikhonov regularization method is used. Finally, two numerical examples are provided to confirm the usefulness and validity of the proposed topology optimization method.

Key Words: Topology Optimization, Optimum Design, Level Set Method, Structural Analysis, Vibration Problem, Finite Element Method

1. 緒言

振動特性は，機械構造物の動的な性能を決定する主要な特性であり，適切な振動特性を持つ構造を設計することは，機械設計において重要である．例えば，低次の固有振動数を大きな値を持つように設計することは，低い振動数領域における動的な安定性を得ることになる [1, 2]．逆に，共振現象を積極的に利用し，高機能な動的特性を持つ機械構造物を設計することも可能となる [3, 4]．すなわち，特定の固有振動数を持つ構造を設計することが可能となれば，高性能なセンサーやバイブロモーターを設計することができる．しかしながら，適切な動的特性を持つ機械構造物の設計は，設計者の勘と経験や，力学的考察に基づく試行錯誤により行われているのが現状であり，所望の動的特性を持つ構造を得るのは困難である．

他方，力学的，数学的根拠に基づいて最適な構造を設計する方法として，構造最適化がある．その方法は，寸法最適化，形状最適化，トポロジー最適化の３つの方法に大別されており，中でもトポロジー最適化 [5] は，構造物の外形形状だけではなく，構造の内部に穴が創出されるようなトポロジーの変更を許容した最も設計自由度の高い方法である．

トポロジー最適化を用いて振動特性の構造最適化を図った報告例も幾つかある．大別して，固有振動数最大化などの構造物の安定化を図った問題への適用と，特定の振動特性を持つように最適化を図った問題への適用である．前者の方法として，均質化設計法 [5] を用いた方法 [1, 2] や，レベルセット法に基づく方法 [6] 等が提案されている．中でも，レベルセット法に基づくトポロジー最適化法では，滑らかであり，かつ明瞭な最適形状が得られているため，今後，工学的応用が期待できる．後者の方法としては，特定の周期荷重に対して出力変位を最大化させる方法 [7, 8] や，特定の固有振動数や固有モードを持つ構造を創成設計する方法 [9] が提案されているが，グレースケールが広く分布した構造が得られるため，工学的に有効な形状が得られない問題 [9] を持つ．ここで，グレースケールとは物体領域と空洞領域の中間領域を示す領域である．この領域は，均質化設計法の場合においては多孔質状態として解釈することが可能であるが，実際に製造することは不可能である．この問題を本質的に解決する方法として，レベルセット法に基づく構造最適化法を用いた方法 [10, 11, 12] が提案されているが，基本的には形状最適化の方法 [13, 14] であるため，初期形状などの設定パラメータを適

2011 年 10 月 2 日受付，2011 年 11 月 4 日受理

切に決定することが極めて困難である．

そこで本研究では，グレースケールを本質的に排除し，明確な外形形状表現を行いながら，所望の振動特性を持つ構造物の創成設計法をトポロジー最適化に基づき構築する．すなわち，レベルセット法に基づくトポロジー最適化を用いて，特定の固有振動数を持つ構造を創成設計する方法を開発する．なお，レベルセット法に基づくトポロジー最適化法として著者らが開発した方法 [15, 16] を用いることにより，明瞭かつ滑らかな形状を創成設計可能とする．以下，二節ではレベルセット法に基づくトポロジー最適化について述べる．次に，固有振動数規定問題の定式化を行う．三節では，最適化問題の定式化に基づき，有限要素法を用いたトポロジー最適化アルゴリズムを構築する．四節では，二次元の数値解析例により，本手法の妥当性と有効性の検証を行う．

2. 最適化法

2.1. レベルセット法に基づくトポロジー最適化

設計する物体の存在が許容される固定領域 D（以下，固定設計領域）を導入し，その内部において，物体により占められている領域 Ω（以下，物体領域）の構造最適化について考える．トポロジー最適化では，次に示す特性関数 χ を用いて固定設計領域 D における物体領域の分布を表現する．

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \ \boldsymbol{x} \in \Omega \\ 0 & \text{if } \ \boldsymbol{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \tag{1}$$

このとき，トポロジー最適化問題は，次のように定式化される．

$$\inf_{\chi} \quad F = \int_D f_1(\boldsymbol{x}, \chi) \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma f_2(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\Gamma \tag{2}$$

$$\text{subject to} \quad G = \int_D g(\boldsymbol{x}, \chi) \, \mathrm{d}\Omega - G_{\max} \leq 0 \tag{3}$$

ここで，F は目的汎関数，G は制約汎関数，$f_1(\boldsymbol{x})$，$f_2(\boldsymbol{x})$ は目的汎関数を与える分布関数，$g(\boldsymbol{x}, \chi)$ は制約汎関数を与える分布関数，$G_{\max}$ は許容される制約汎関数値の上限値を表す．

次に，最適化問題の正則化 (regularization) について考える．特性関数は可積分性のみを許容された関数であるため，至る所に無限小の間隔で不連続点が存在することを許容する．その結果，トポロジー最適化問題は，不適切問題 (ill-posed) となることが知られている．そのため，何らかの手法を用いて最適化問題を正則化する必要がある．均質化設計法 [5] では，固定設計領域内部を適当なミクロ構造を仮定し，そのミクロ構造を与えるパラメータを設計変数とする．さらに，均質化法を用いてマクロな密度分布を求める．SIMP 法を始めとする密度法 [17] では，固定設計領域内部にペナルティーを負荷された連続関数を密度として定義し，その密度関数が設計変数となる．これらの方法によって得られる最適構造は，明確な外形形状が存在せず，構造と空洞の中間領域であるグレースケールを含むことになる．そのため，工学的に有効な形状を得ることが難しく，さらには，振動問題においては最適化過程ける数値不安定の原因となる [9]．そこで，本研究では，レベルセット法による形状表現を導入し，チコノフの正則化法により最適化問題を正則化する方法 [15, 16] を用いる．

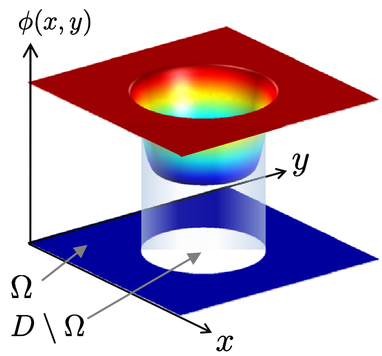


Fig. 1　Level set function

レベルセット法では，図 1 に示すように，形状を表現する領域内部において，レベルセット関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ と呼ばれるスカラー関数を導入し，その等値面により陰的に形状を表現する．すなわち，次式に示すように，レベルセット関数の正の領域は物体領域 Ω，負の領域は空洞領域 $D \setminus \Omega$，ゼロをとる等値面上でそれらの境界を表現する．

$$\begin{cases} \phi(\boldsymbol{x}) > 0 & \text{if} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\boldsymbol{x}) = 0 & \text{if} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \\ \phi(\boldsymbol{x}) < 0 & \text{if} \quad \forall \boldsymbol{x} \in D \setminus \Omega \end{cases} \tag{4}$$

なお，レベルセット関数の符号とプロファイルには任意性がある．ここでは，後述の正則化の手続きのために上限値と下限値の制約を設定する．このとき，レベルセット関数 ϕ を設計変数として，トポロジー最適化問題 (2)(3) は次のように置き換えられる．

$$\inf_{\phi(\boldsymbol{x})} \quad F = \int_D f_1(\boldsymbol{x}, \chi(\phi)) \, \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma f_2(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\Gamma \tag{5}$$

$$\text{subject to} \quad G = \int_D g(\boldsymbol{x}, \chi(\phi)) \, \mathrm{d}\Omega - G_{\max} \leq 0 \tag{6}$$

$$-1 \leq \phi(\boldsymbol{x}) \leq 1 \tag{7}$$

次に，チコノフ正則化法による正則化法の適用を行う．すなわち，次式に示すように，正則化係数 τ を導入し，目的汎関数に正則化項 R を追加する．

$$\inf_{\phi(\boldsymbol{x})} \quad F_R = F + R \tag{8}$$

$$\text{subject to} \quad G \leq 0 \tag{9}$$

$$-1 \leq \phi(\boldsymbol{x}) \leq 1 \tag{10}$$

ここで，正則化項 R はレベルセット関数 ϕ により，次のように与えられる．

$$R = \frac{1}{2} \int_D \tau \, |\, \nabla\phi \,|^2 \;\; \mathrm{d}\Omega \tag{11}$$

正則化項は，レベルセット関数の勾配によって与えられる汎関数であるため，レベルセット関数の定義から境界近傍のみでゼロ以外の値をとることがわかる．したがって，正則化係数を設定することは，陰的にペリメータ制約を導入することに対応する．

2.2. 設計変数の更新方法

前述のトポロジー最適化問題を，ラグランジュ未定乗数法を用いて無制約問題に置き換えると次のようになる．

$$\inf_{\phi(\boldsymbol{x})} \qquad \bar{F}_R = F_R + \lambda G \tag{12}$$

ここで，$\bar{F}_R$ は正則化項を含めたラグランジュアン，λ は制約汎関数 G に関するラグランジュ乗数である．次に，最適解の必要条件 (KKT：Karush-Kuhn-Tucker 条件) を導けば次式となる．

$$\frac{\delta \bar{F}_R}{\delta \phi} = 0, \quad \lambda G = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad G \leq 0 \tag{13}$$

ここで，$\frac{\delta \bar{F}_R}{\delta \phi}$ は，$\bar{F}_R$ のレベルセット関数 ϕ に関する変分を意味する．これらの条件を満たすレベルセット関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ が最適解の候補となる．しかしながら，これらの条件のすべてを満たすレベルセット関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ を直接求めることは困難であるため，レベルセット関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ に適当な初期値を与え，更新していくことにより，最適構造を示すレベルセット関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ を求める．本手法では，仮想的な時間 t を導入し，仮想的な時間におけるレベルセット関数の時間発展問題を考える．レベルセット関数 $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ を発展させる駆動力はラグランジュアンの勾配に比例すると仮定すると，次に示す，レベルセット関数 $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ に関する時間発展方程式を導くことが出来る．

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = -K \frac{\delta \bar{F}_R(\phi, t)}{\delta \phi(\boldsymbol{x}, t)} \tag{14}$$

ここで，K は比例係数である．上式に，式 (12) を代入し，非設計境界 ∂D_N に，ディレクレ境界条件，設計境界に流入流出ゼロのノイマン境界条件を与えることにより，固定設計領域外からの影響がないことを表現する．したがって，レベルセット関数の時間発展方程式系は，次式で与えられる．

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \phi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = -K \Big\{ \dfrac{\delta \bar{F}(\phi, t)}{\delta \phi(\boldsymbol{x}, t)} - \tau \nabla^2 \phi(\boldsymbol{x}, t) \Big\} & \\ \dfrac{\partial \phi(\boldsymbol{x}, t)}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad \partial D \setminus \partial D_N & \\ \phi(\boldsymbol{x}, t) = 1 \qquad \text{on} \quad \partial D_N & \end{array} \right. \tag{15}$$

本研究では，上式を解くことにより，レベルセット関数の最適解の候補を得る．

2.3. 固有振動数規定問題の定式化

線形弾性体で構成される物体領域 Ω と空洞領域 $D \setminus \Omega$ で構成される固定設計領域 D に対し，境界 Γ_u において変位拘束されている構造物の固有振動数規定問題について考える．最低次から k 番目の固有振動数を ω_k，固有振動モードを $\boldsymbol{u}_k$ とする．このとき，k 番目の固有振動数の規定値を $\bar{\omega}_k$ とすると，固有振動数規定問題は次のように定式化される．

$$\inf_{\chi} \qquad F = \sum_{k=1}^{n} \mid \omega_k - \bar{\omega}_k \mid^2 \tag{16}$$

$$\text{subject to} \quad a(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}) = \lambda_k b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \tag{17}$$

$$\text{for} \quad \forall \boldsymbol{v} \in U, \quad \boldsymbol{u}_k \in U, \quad k = 1, ..., n$$

$$G = \int_D \chi \, \mathrm{d}\Omega - V_{\max} \leq 0 \tag{18}$$

$$-1 \leq \phi(\boldsymbol{x}) \leq 1 \tag{19}$$

なお，固有値 λ_k と固有振動数 ω_k の関係は次式で与えられる．

$$\lambda_k = \omega_k^2 \tag{20}$$

各表記は次式で定義される．

$$a(\boldsymbol{u}_k, , \boldsymbol{v}) = \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_k) : \boldsymbol{E}\chi : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}\Omega \tag{21}$$

$$b(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}) = \int_D \rho \chi \boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Omega \tag{22}$$

$V_{\max}$ は許容される体積の上限値，$\boldsymbol{\epsilon}$ はひずみテンソル，$\boldsymbol{E}$ は弾性テンソル，ρ は質量密度，U は次式で定義される変位関数空間である．

$$U = \{ \boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}_i : v_i \in H^1(D) \quad \text{with} \quad \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{on} \ \Gamma_u \} \tag{23}$$

2.4. 感度解析

次に，随伴変数法を用いて，レベルセット関数の時間発展方程式を解くために必要となる目的汎関数の感度を求める．

$$\frac{\delta F}{\delta \phi} = 2 \sum_{k=1}^{n} \mid \omega_k - \bar{\omega}_k \mid \delta \omega_k \tag{24}$$

ここで，固有値 λ_k の感度は，随伴変数法を用いて次の関係が成り立つ [2, 18]．

$$\delta \lambda_k = \delta a(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k) - \lambda_k \delta b(\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k) \tag{25}$$

また，固有値 λ_k と固有振動数 ω_k の関係式 (20) より，次の関係が成り立つ．

$$\delta \lambda_k = 2 \omega_k \delta \omega_k \tag{26}$$

したがって，目的汎関数の感度は次式で与えられる．

$$\frac{\delta F}{\delta \phi} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mid \omega_k - \bar{\omega}_k \mid}{\omega_k} \cdot \Big\{ \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_k) : \boldsymbol{E}\chi : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_k) - \omega_k^2 \rho \chi \boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_k \Big\} \tag{27}$$

3. 最適化アルゴリズム

本研究で提唱する最適化法のフローチャートを図 2 に示し，アルゴリズムを次に示す．

Step 1

適当な初期形状を示し，かつ，上限値と下限値に対する制約を満たすレベルセット関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ を与える．

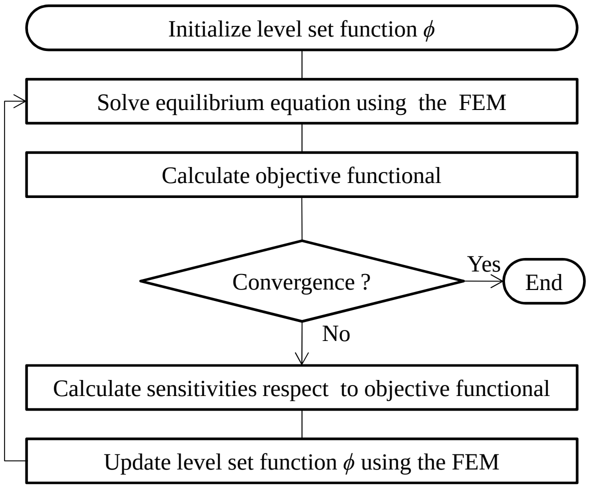


Fig. 2　Flowchart

Step 2

有限要素法を用いて，固有振動モード $\boldsymbol{u}_k$ 及び，固有振動数 ω_k を解析する．ここで，有限要素法の解析には，空洞領域に弱い材料を配置した方法 (14) を用いることにより，形状の変更に伴う有限要素の再分割を不要とする．

Step 3

有限要素解析の結果に基づき目的汎関数を計算し，収束していれば最適化を終了する．

Step 4

反応拡散方程式（15）に従い，レベルセット関数 $\phi(\boldsymbol{x})$ を更新し，Step 2 へ戻る．なお，反応拡散方程式は，時間方向に対して差分法，空間方向に有限要素法を用いた離散化を行ったアルゴリズム (16) を適用する．

以上の手続きにより，最適構造を示す，レベルセット関数値を得る．

なお，Step 3 における有限要素法による振動特性の解析は，逐次異なる形状に対して解析を行う必要がる．そのため，逐次有限要素メッシュ分割を行う必要があるが，空洞領域を十分に小さな縦弾性係数と質量密度を持つ物体として近似する方法 (14) を用いることにより，同一の有限要素を用いて解析を行う．すなわち，特性関数 χ は次式に示す，連続関数への置き換えて有限要素解析を行う．

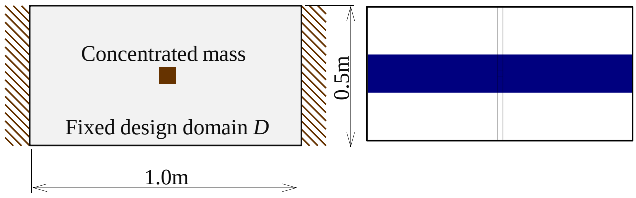
$$\chi(\phi) \simeq \tag{28}$$

$$= \begin{cases} d & (\phi < -w) \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\phi}{w}\left(\frac{15}{16} - \frac{\phi^2}{w^2}\left(\frac{5}{8} - \frac{3}{16}\frac{\phi^2}{w^2}\right)\right)\right)(1-d) + d & \\ & (-w < \phi < w) \\ 1 & (w < \phi) \end{cases} \tag{29}$$

ここで，w は連続関数の遷移幅，$d > 0$ は十分に小さな正の値を持つパラメータである．なお，上式は有限要素解析の不安定性を回避するために導入しており，理論上は材料分布の不連続性を許容している．

4. 数値解析例

二次元のベンチマークモデルにより，本研究で提唱する方法論の妥当性を検証する．解析モデルの材料には，等方性線形弾性体を想定し，材料定数は，物体領域の縦弾性係数を 210GPa，物体領域の質量密度を $7850\mathrm{kg/m^3}$，ポアソン比を 0.3 とし，遷移幅を与えるパラメータ w を 0.2，空洞領域の材料定数を与えるパラメータ d を 0.01 とする．振動特性の解析及び，レベルセット関数場の更新には四節点のアイソパラメトリック要素を用い，要素長 $5 \times 10^{-3}\mathrm{m}$ の構造格子を用いて要素分割を行う．図 3 に固定設計領域と初期形状及び，境界条件を示す．図に示すように，固定設計領域の両端を変位拘束し，中央に 1kg の集中質量を設置する．なお，集中質量を設置した領域は非設計領域とする．初期形状は，図に示すように固定設計領域中央に置かれた長方形形状とし，体積制約の上限値 $V_{\max}$ は，設計領域全体の 25% とする．このときの固有振動数は，$\omega_1 = 3.34 \times 10^3\mathrm{Hz}$, $\omega_2 = 1.08 \times 10^4\mathrm{Hz}$, $\omega_3 = 1.20 \times 10^4\mathrm{Hz}$ である．また，固有振動モード形状は図 4 に示すようなモード形状である．



(a) Fixed design domain　　(b) Initial design

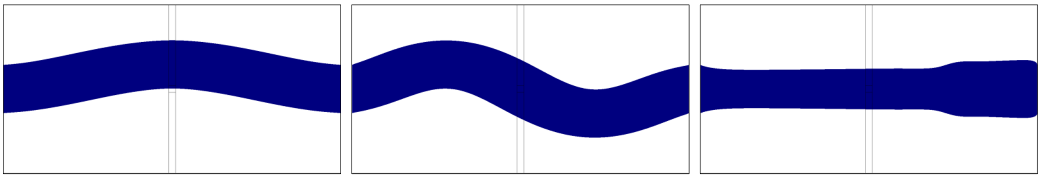
Fig. 3　Fixed design domain and initial design

4.1. $n = 3$ の場合

最初に，$n = 3$ の場合について最適化を図る．固有振動数の規定値を表 1 に示す値に設定する．このとき，得られた最適構造を図 5 に示す．図に示すように，滑らかで明瞭な最適構造が得られた．最適構造の各固有振動数は表 1 に示すように，規定値とほぼ一致していることを確認することができる．また，最適構造の各固有振動モード形状を図 6，各固有振動数の収束履歴を図 7 に示す．初期構造と最適構造の固有振動モード形状を比較すると，1 次モード形状は同一のモード形状をしているが，2 次モード形状と 3 次モード形状が入

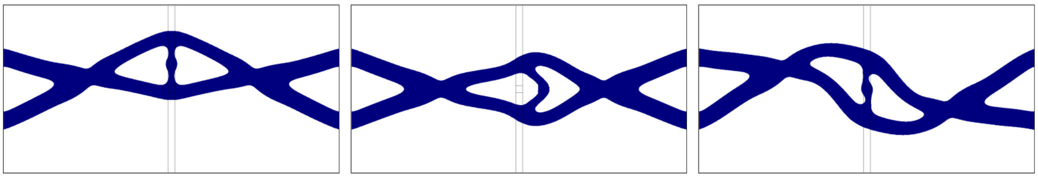
Table 1　Eigenfrequencies of the initail, the target and the optimum [Hz]

	initial	target: $\bar{\omega}_k$	optimum
1st	3.34×10^3	4.00×10^3	4.00×10^3
2nd	1.08×10^4	6.00×10^3	6.00×10^3
3rd	1.20×10^4	1.00×10^4	9.75×10^3



(a) 1st mode　(b) 2nd mode　(c) 3rd mode

Fig. 4　Eigenmodes of the initial design



(a) 1st mode　(b) 2nd mode　(c) 3rd mode

Fig. 6　Eigenmodes of the optimal configuration

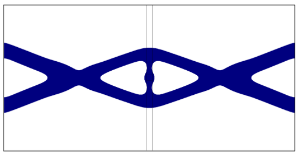


Fig. 5　Optimal configuration of the numerical example 1

れ替わっていることを確認することが出来る．このモード形状の入れ替わりは，固有振動数の収束履歴から 54 ステップ目において生じていると推測される．この結果から，最適化の過程において規定する固有振動数の固有振動モード形状の入れ替わりが生じた場合においても，適切に最適化が行われていることを確認することができる．

4.2. 異なる規定値を設定した場合

次に，2 次モードの既定値を異なる値に設定して最適化を図る．すなわち，1 次モードの固有振動数の規定値を同一の値 (4×10^3[Hz]) とし，2 次モードの固有振動数の規定値を，Case 1 では 6×10^3[Hz]，Case 2 では 8×10^3[Hz] に設定する．このとき，得られた最適構造を図 8，各固有振動数の値を表 2 に示す． 図に示すように，いずれの最適構造も，滑らかで明瞭な形状が得られた．また，固有振動数はそれぞれの規定

Table 2　Eigenfrequencies of Case 1 and Case 2 [Hz]

	initial	target: $\bar{\omega}_k$	optimum
1st of Case 1	3.34×10^3	4.00×10^3	4.00×10^3
2nd of Case 1	1.08×10^4	6.00×10^3	6.00×10^3
1st of Case 2	3.34×10^3	4.00×10^3	4.00×10^3
2nd of Case 2	1.08×10^4	8.00×10^3	7.97×10^3

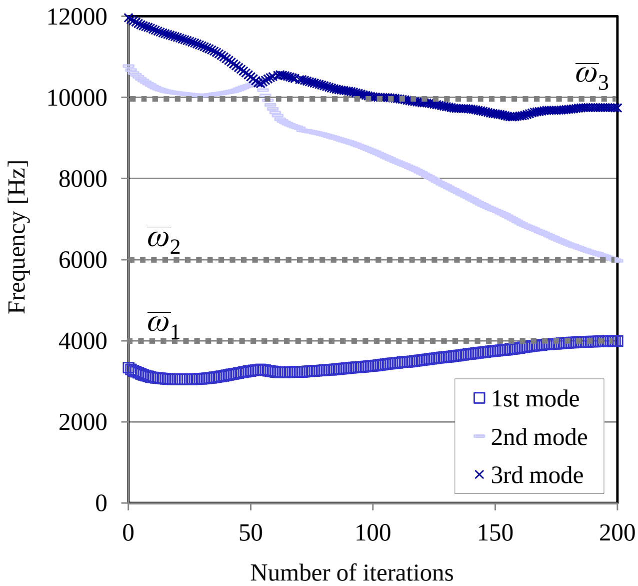


Fig. 7　Convergence of the eigenfrequencies

値とほぼ一致していることから，適切に最適化が行われたことがわかる．さらに，Case 1 と Case 2 を比較すると，異なる形状形態（トポロジー）を持つ最適構造が得られていることから，複数の固有振動数を考慮した点が，最適構造に反映されていることを確認することができる．

5. 結言

本研究では，レベルセット法による形状表現を用いて，特定の固有振動数を持つ構造の創成設計法をトポロジー最適化に基づいて構築した．結果を次に示す．

(1) レベルセット法による形状表現に基づき，固有振動数規定問題のトポロジー最適化法を定式化した．

(2) 定式化に基づき，有限要素法と随伴変数法を用いた最

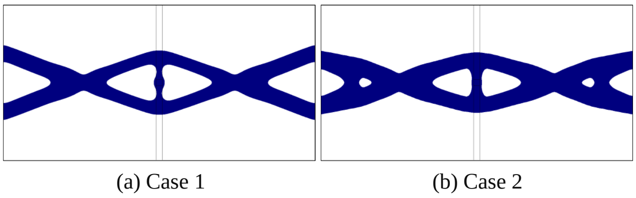


Fig. 8　Optimal configurations of the numerical example 2

適化アルゴリズムを構築した．

(3) 二次元の数値例により，本研究で提唱する方法の有効性と妥当性の検証を行った．その結果，明瞭で滑らかな最適構造が得られることがわかった．さらには，最適化の過程において，固有振動モード形状の入れ替わりが生じた場合においても，適切に最適化が行われることを示すことができた．

参考文献

(1) Diaz, A. R. and Kikuchi, N.: Solutions to Shape and Topology Eigenvalue Optimization Using a Homogenization Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**(1992), pp. 1487–1502.

(2) Ma, Z. D., Kikuchi, N., and Cheng, H. C.: Topological Design for Vibrating Structures, *Computer Methods in Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **121**(1995), pp. 259–280.

(3) Jose, K. A., Suh, W. D., Xavier P. B., Varadan, V. K., and Varadan, V. V.: Surface Acoustic Wave MEMS Gyroscope, *Wave Motion*, **36**(2002), pp. 367–381.

(4) Saitou, K., Wang D. A. and Wou, S. J.: Externally Resonated Linear Microvibromotor for Microassembly, *Journal of Microelectromechanical Systems*, **9**(2000), pp. 336–346.

(5) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N.: Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **71**(1988), pp. 891–909.

(6) 山田崇恭，泉井一浩，西脇眞二，佐藤政司，田畑修: 静電容量型超音波トランスデューサの最適構造設計法（レベルセット法に基づく等断面形状制約付トポロジー最適化），日本機械学会論文集 A 編**76**(2010), pp. 1403–1411.

(7) Nishiwaki, S., Saitou, K., Min, S. and Kikuchi, N.: Topological Design Considering Flexibility Under Periodic Loads, *Structural Optimization*, **19**(2000), pp.4–16.

(8) Tcherniak, D.: Topology Optimization of Resonating Structures Using SIMP Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **54**(2002), pp. 1605–1622.

(9) Maeda, Y., Nishiwaki, S., Izui, K., Yoshimura, M., and Terada, K.: Structural Topology Optimization of Vibrating Structures with Specfied Eigenfrequencies and Eigenmode Shapes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **67**(2006), pp. 597–628.

(10) Xia, Q., Shi, T. and Wang, M. Y.: A Level Set Based Shape and Topology Optimization Method for Maximizing the Simple or Repeated First Eigenvalue of Structure Vibration, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **43**(2011), pp. 473–485.

(11) Allaire, G. and Jouve, F.: A Level-Set Method for Vibration and Multiple Loads Structural Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**(2005), pp. 3269–3290.

(12) Yamasaki, S., Nishiwaki, S., Yamada, T., Izui, K. and Yoshimura, M.: A Structural Optimization Method Based on the Level Set Method Using a New Geometry-Based Re-Initialization Scheme, it International Journal for Numerical Methods in Engineering, **83**(2010), pp. 1580–1624.

(13) Wang, M. Y., Wang, X., and Guo, D.: A Level Set Method for Structural Topology Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**(2003), pp. 227–246.

(14) Allaire, G., Jouve, F., and Toader, A. M.: Structural Optimization Using Sensitivity Analysis and a Level-Set Method, *Journal of Computational Physics*, **194**(2004), pp. 363–393.

(15) 山田崇恭，西脇眞二，泉井一浩，吉村允孝，竹澤晃弘: レベルセット法による形状表現を用いたフェーズフィールド法の考え方に基づくトポロジー最適化，日本機械学会論文集 A 編，**75**(2009), pp. 550–558.

(16) Yamada, T., Izui, K., Nishiwaki, S. and Takezawa, A.: A Topology Optimization Method Based on the Level Set Method Incorporating a Fictitious Interface Energy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**(2010), pp. 2876–2891.

(17) Bendsøe, M. P.: Optimal Shape Design as a Material Distribution Problem, *Structural Optimization*, **1**(1989), pp. 193–202.

(18) Ma, Z. D. and Hagiwara, I.: Sensitivity Analysis Methods for Coupled Acoustic-Structural Systems Part I: Modal Sensitivities, *AIAA Journal*, **29**(1991), pp. 1787–1795.