

# 多重極モーメントを用いた電子写真現像剤の効率的な電場解析

Efficient Electrostatic Analysis for Toner Particle using Multipolar Moment

滝口真也<sup>1)</sup>, 天谷賢治<sup>1)</sup>

Shinya TAKIGUCHI, Kenji AMAYA

1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail: kamaya@mei.titech.ac.jp)

Electrophotography is the technology of controlling toner at high speed and precision. In order to achieve such various advanced requests as better picture, speeding up and colorization, numerical analysis of electrical field around toner particles is important. On the other hand, huge number of toner particles should be considered for the numerical analysis, so the computational cost amounts to very high. In this paper, a Fast Multipole Boundary Integral Method is developed for an efficient toner particle simulation. The moments of the potential on the surface of toner particles are taken as the unknown variables directly. This approach enables to avoid the boundary element meshing, and it brings advantage for the toner particle analysis which needs to consider the movement of the particles. The base functions of the multipole expansion of the fundamental solution are employed for the kernel function for the boundary integral formulation. Because of this kernel function, the application of the Fast Multipole Method is simplified. In order to demonstrate the efficiency of the proposed method, simple example problems are numerically solved.

**Key Words:** Boundary Element Method, Toner Particles, Electrophotography, Fast Multipole Method

## 1. はじめに

近年の複写機・プリンタの高速化, 高画質化, 小型化, 低価格化の要求に対応するためには, 短期間でシステムの性能を十分に, かつ確実に作り込まなければならない. そのためには現物をベースとした実験的・経験的アプローチだけで設計パラメータを決定することは難しく, 数値シミュレーションのニーズが高まっている<sup>(1, 2)</sup>. 数値シミュレーションによって, 現象のメカニズムを明確にしながらか最適な設計の方向性を検討し, モノをつくる前にトラブルを予測して最適な設計パラメータを決定することが可能となる. 特に, 現像剤であるトナー粒子が関与する現像, 転写, クリーニングの各プロセスに対しては離散要素法<sup>(3, 4)</sup>(Discrete Element Method)が活用され, 専用のシミュレータの開発や, 様々な解析, 設計援用が図られてきている<sup>(5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)</sup>, 現像剤の搬送, 層形成, 画像形成などを行う現像プロセスでは, 静電気力, 接触力, 付着力, 重力等, 多数の力が現像剤に作用しており, これらのバランスが最終的な画質に大きな影響を与え, 中でも静電気力は支配的な役割を担っている. ゆえに, 数値シミュレーションにおいて, 特に定量的な精度を保

証するためには, プロセスで取り扱う膨大な現像剤粒子に作用する静電気力を厳密に計算する必要がある<sup>(11)</sup>. 静電気力には, 帯電粒子間のクーロン相互作用力と外部から形成する現像電界により発生する力が考えられる. 一般に, 前者は, 個々の粒子間に作用するクーロン相互作用力を求めて総和し, 後者については, 差分法あるいは有限要素法により電界に対するポアソン方程式を解き, 求めた電界と粒子の帯電量の積で計算する. この後者の静電気力を厳密に計算するには, 現像剤粒子が存在することにより, 解析領域内の誘電率が非均質となることを考慮する必要がある. しかし, プロセスで取り扱う膨大な現像剤粒子の存在に伴う解析領域内の誘電率の非均質を合理的に考慮した計算は困難であり, 現状では, この影響を無視する<sup>(11, 12)</sup>, あるいは粒子数を大幅に限定し, 粒子位置の計算要素の物性値を変化させることにより解析領域内の誘電率の非均質を考慮している<sup>(13, 14, 15, 16)</sup>.

一方で大規模問題のための数値解析手法として有効性のある高速多重極法(FMM)を境界要素法に適用した高速多重極境界要素法(FMBEM)<sup>(17)</sup>が研究されている. 高速多重極境界要素法は, 多重極展開を用いることにより遠方場からの寄与をまとめて評価する手法として知られ, 計算時間,

記憶容量を従来の境界要素法に比べ大幅に軽減させることが可能となる。

そこで、本研究では高速多重極法を適用し電子写真における現像剤に働く電気力を効率的に計算する手法を開発する。本手法ではさらに通常の高速多重極境界要素法に対して粒子の形状が円形であることを利用して各粒子の表面における電位のモーメントを直接未知数とする方法を新たに提案する。この新しい方法により要素分割を全く行わずに解析することができるので粒子が刻々と移動する現像剤の解析に極めて有効である。手法の有効性を検証するために簡単な数値計算例を示す。

## 2. 解析手法

莫大な数の現像剤粒子が運動する、すなわち、誘電率の非均一な分布が時間的に変化する場の電場解析を行う場合、有限要素法などのように領域を要素分割する手法を適用することは現実的でない。本研究では、このように誘電率の不均一な場において要素分割を必要としない静電場解析手法を提案する。具体的には、現像剤粒子表面における電位分布のモーメントを未知数とする方程式を構成し、これを高速多重極展開法により効率的に解く。

### 2.1. 現像剤粒子が存在する静電場ポテンシャル問題

本論文では簡単のため、Fig.1のような2次元静電場ポテンシャル問題を考える。現像剤粒子の形状は円形でモデル化できるものとする。誘電率  $\varepsilon_v$  の無限領域に誘電率  $\varepsilon_t$  の現像剤粒子が  $n$  個存在し、現像剤粒子の電荷分布は  $\rho(z)$  で与えられているとする。ここで、 $z$  は2次元空間の位置を表現する複素数とする。位置  $z$  における電位を  $u(z)$  とする。電位  $u(z)$  は次式のポアソン方程式を満足する。

$$\varepsilon_v \nabla^2 u_v(z) + \rho(z) = 0 \quad (\forall z \in \Omega_v) \quad (1)$$

$$\varepsilon_t \nabla^2 u_t(z) + \rho(z) = 0 \quad (\forall z \in \Omega_i, \quad i = 0, \dots, n) \quad (2)$$

また  $\Omega_v$  と  $\Omega_i (i = 0, \dots, n)$  の境界  $\Gamma_i$  では次式の境界条件を満足する。

$$u_v(z) = u_t(z) = u(z) \quad (\forall z \in \Gamma_i, \quad i = 0, \dots, n) \quad (3)$$

$$\varepsilon_v q_v(z) = \varepsilon_t q_t(z) \quad (\forall z \in \Gamma_i, \quad i = 0, \dots, n) \quad (4)$$

ここで、 $q_{v/t}(z)$  は、

$$q_{v/t}(z) \equiv \frac{\partial u_{v/t}(z)}{\partial n(z)} \quad (5)$$

であり、 $n(z)$  は領域  $\Omega_v$  から  $\Omega_i$  へ向かう法線方向ベクトルを表す。

### 2.2. モーメント方程式の構成

次式の調和関数を考える。

$$O_k(z) \equiv \begin{cases} \log|z| & (k=0) \\ \frac{(k-1)!}{z^k} & (k \geq 1) \end{cases} \quad (6)$$

$z_i$  は現像剤粒子  $\Omega_i$  の中心座標とし、 $O_k(z - z_i)$  を重み関数として式 (1) に乗じ、領域  $\Omega_v$  において積分する。グリーンの公式を適用すると次式の積分方程式が得られる。

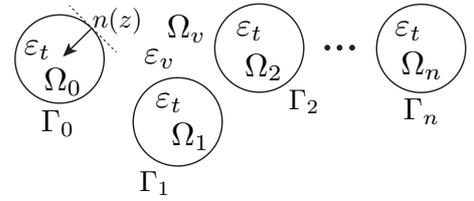


Fig.1 Potential problem for toner particle.

$$\varepsilon_v \int_{\cup_{j=0}^n \Gamma_j} \{O_k(z - z_i)q_v(z) + O_{k+1}(z - z_i)n(z)u(z)\} |dz| + \int_{\Omega_v} O_k(z - z_i)\rho(z)d\Omega(z) = 0 \quad (7)$$

同様に  $O_k(z - z_i)$  を重み関数として式 (2) に乗じ、領域  $\cup_{j=0, j \neq i}^n \Omega_j$  において積分する。グリーンの公式を適用すると次式の積分方程式が得られる。

$$\varepsilon_t \int_{\cup_{j=0, j \neq i}^n \Gamma_j} \{O_k(z - z_i)q_t(z) + O_{k+1}(z - z_i)n(z)u(z)\} |dz| - \int_{\cup_{j=0, j \neq i}^n \Gamma_j} O_k(z - z_i)\rho(z)d\Omega(z) = 0 \quad (8)$$

さらに、次式の調和関数を考える。

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!} \quad (9)$$

これについても、同様に  $I_k(z - z_i)$  を重み関数として式 (2) に乗じ、領域  $\Omega_i$  において積分すると、

$$\varepsilon_t \int_{\Gamma_i} \{I_k(z - z_i)q_t(z) - I_{k-1}(z - z_i)n(z)u(z)\} |dz| - \int_{\Gamma_i} I_k(z - z_i)\rho(z)d\Omega(z) = 0 \quad (10)$$

ここで、 $r_i$  を現像剤粒子  $\Omega_i$  の半径とし、

$$A_{ki} \equiv \frac{k!(k-1)!}{r_i^{2k}} \quad (11)$$

とすると、

$$\int_{\Gamma_i} A_{ki} I_k(z - z_i)q_t(z) |dz| = \int_{\Gamma_i} O_k(z - z_i)q_t(z) |dz| \quad (12)$$

となる。ゆえに、式 (10) の両辺に  $A_{ki}$  を乗じ、共役をとると、

$$\varepsilon_t \int_{\Gamma_i} O_k(z - z_i)q_t(z) |dz| - \varepsilon_t A_{ki} \int_{\Gamma_i} I_{k-1}(z - z_i)n(z)u(z) |dz| - A_{ki} \int_{\Gamma_i} I_k(z - z_i)\rho(z)d\Omega(z) = 0 \quad (13)$$

式 (4) を考慮して式 (8) と式 (13) の辺々の和を式 (7) から引くと、

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_v - \varepsilon_t) \int_{\cup_{j=0, j \neq i}^n \Gamma_j} O_{k+1}(z - z_i)n(z)u(z) |dz| \\ & + \varepsilon_v \int_{\Gamma_i} O_{k+1}(z - z_i)n(z)u(z) |dz| \\ & + \varepsilon_t A_{ki} \int_{\Gamma_i} I_{k-1}(z - z_i)n(z)u(z) |dz| \\ & + \int_{\Omega_v + \cup_{j=0, j \neq i}^n \Omega_j} O_k(z - z_i)\rho(z)d\Omega(z) \\ & + A_{ki} \int_{\Omega_i} I_k(z - z_i)\rho(z)d\Omega(z) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、次式で表すモーメントを定義する．

$$N_{k+1}(z_j) \equiv \int_{\Gamma_j} I_k(z - z_j) n(z) u(z) |dz| \quad (15)$$

さらに、

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_i} O_{k+1}(z - z_i) n(z) u(z) |dz| \\ &= A_{ki} \int_{\Gamma_i} I_{k-1}(z - z_i) n(z) u(z) |dz| \\ &= A_{ki} \overline{N_k(z_i)}. \end{aligned} \quad (16)$$

また、 $\forall z \in \Gamma_j \wedge j \neq i$  ならば、 $|z - z_j| < |z_i - z_j|$  より、

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_j} O_{k+1}(z - z_i) n(z) u(z) |dz| \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l O_{k+l+1}(z_j - z_i) N_{l+1}(z_j) \end{aligned} \quad (17)$$

式 (15)、(16)、(17) より、式 (14) は、

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_v - \varepsilon_t) \sum_{j=0, j \neq i}^n \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l O_{k+l+1}(z_j - z_i) N_{l+1}(z_j) \\ &+ (\varepsilon_v + \varepsilon_t) A_{ki} \overline{N_k(z_i)} \\ &+ \int_{\Omega_v \cup \bigcup_{j=0, j \neq i}^n \Omega_j} O_k(z - z_i) \rho(z) d\Omega(z) \\ &+ A_{ki} \int_{\Omega_i} I_k(z - z_i) \rho(z) d\Omega(z) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

以上より式 (18) に対して  $i = 0 \dots n$  および  $k = 0 \dots m$  として  $n \times (m+1)$  の方程式を構成し、モーメント  $N_k(z_i)$  ( $k = 0 \dots m, i = 0 \dots n$ ) について解けば電場を効率的に解析することができる．ここで  $m$  は粒子一つ当たりの表面電位のモーメントの打ち切り項数であり、意味的には通常の境界要素法の要素分割の細かさに相当する．なお粒子  $i$  と  $j$  が粒子の径の3倍以上離れている場合であれば多重極展開の理論において式 (18) の左辺第1項の  $l$  に関する級数は15項ほどで十分収束することが知られている．

なお、現像剤粒子の挙動解析においては電場による粒子に働く外力を求めればよい．なお、電荷が粒子の中心に集中しているとしてモデル化した場合にはモーメント  $N_k(z_i)$  の奇数次の成分に粒子自身が持つ電荷を掛ければ粒子に働く外力を効率的に近似計算することができる．

### 3. 高速多重極法の適用

本解析手法を効率化するために高速多重極法を適用することができる．本章ではまず高速多重極法に必要な定式化<sup>(18)</sup>を説明する．

#### 3.1. モーメントの移動 (M2M 変換)

式 (18) の左辺第1項を計算するときに現れる次に示す計算について考える．Fig.2 に示すように  $z_j$  が  $z_{j'}$  に移動したときモーメントは次式の変換式を満足する．

$$O_{k+l+1}(z_i - z_j) N_{l+1}(z_j) = O_{k+l+1}(z_i - z_{j'}) N_{l+1}(z_{j'}) \quad (19)$$

$$N_{l+1}(z_{j'}) = \sum_{l'=0}^{l+1} I_{l+1-l'}(z_j - z_{j'}) N_{l'}(z_{j'}) \quad (20)$$

#### 3.2. モーメントから局所展開係数への変換 (M2L 変換)

式 (18) の左辺第1項を計算するときに現れる下記に示す項を  $z_{i'}$  の周りでテーラ展開する．

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l O_{k+l+1}(z_j - z_i) N_{l+1}(z_j) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} L_{k+l+1}(z_i) I_{l+1}(z_i - z_{i'}) \end{aligned} \quad (21)$$

ここで  $L_k(z_i)$  は次式で定義される局所展開係数である．

$$L_k(z_i) \equiv (-1)^k \sum_{l=0}^{\infty} O_{l+k}(z_j - z_i) N_l(z_j) \quad (22)$$

上式は M2L 変換公式と呼ばれる．

#### 3.3. 局所展開係数の移動 (L2L 変換)

式 (22) をさらに  $z_{i'}$  の周りでテーラ展開すると次式の L2L 変換公式が得られる．

$$L_k(z_{i'}) = \sum_{l=0}^m I_l(z_i - z_{i'}) L_{k+l}(z_i) \quad (23)$$

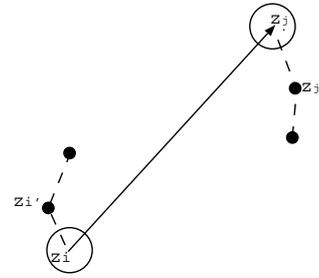


Fig. 2 The related points for multipole expansions.

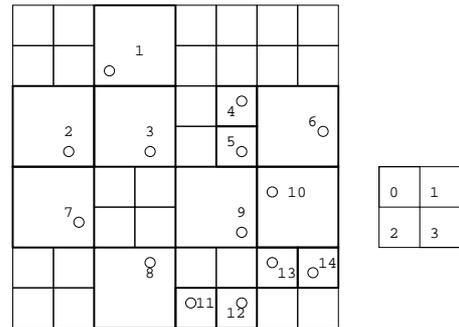


Fig. 3 A hierachical cell structure (the small square on the side shows the numbering scheme for the child cells of any given parent cell)<sup>(18)</sup> .

#### 3.4. 高速多重極法のアルゴリズム

以下にモーメント方程式 (18) を高速多重極法を適用して解く手順を説明する．

手順 1 Fig.3 および Fig.4 に示すように粒子の中心の座標に基づきツリー構造を作成する．Fig.3 中の粒子の傍にある数字は粒子番号を表す．例えば、2次元の問題では粒子全体を囲む正方形を考え、この正方形をレベル

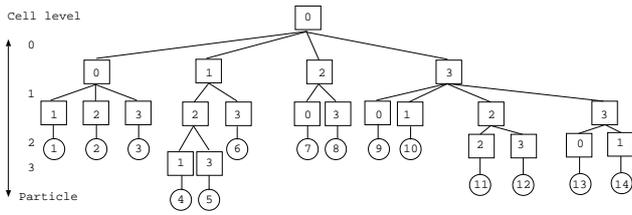


Fig. 4 The quad tree structure (the number in each box is the quat tree numbering index given by its parent cell, and the number in each circle is the particle number).

0のセルとする．次にこのセルを親セルとして4つの正方形の子セルに分割する．これら4つのセルをレベル1のセルとする．同様に，レベル $l$ の親セルを4つのレベル $l+1$ の子セルに分割してゆく．セルの中の粒子数があらかじめ決められた数より小さくなるまで再帰的にこの作業を続ける．各レベルにおける親-子 の関係を統合すると4分木構造が構築される．

手順2それぞれの粒子のモーメント  $N_k(z_j)$  ( $j = 1 \sim n$ ) を仮定する．すべてのセルにおけるモーメントを計算する．手順1で構成したツリー構造の下から上に向かって計算を進める．M2M変換により子セルのモーメントを統合することにより自セルのモーメントは効率的に計算を行うことができる．なおモーメントの中心は各セルの中心に取る．

手順3上位のセルから下に向かって順に局所展開係数を計算していく．親セルからの局所展開係数の寄与分はL2L変換により計算する．これ以外の寄与分は手順2で求めたモーメントをM2L変換して計算する．

手順4最下位のセルまで計算した局所展開係数からさらに各粒子の中心における係数をL2L変換を用いて計算する．以上の手順で式(18)の右辺第1項の計算を効率的に行うことができる．

手順5手順2で仮定したモーメントの値を更新しながらGMRES法などの反復解法により収束計算を行い．連立方程式(18)の未知数であるモーメントを求める．

#### 4. 数値解析例

本手法の有効性を確認するために仮想的な問題に対して簡単な解析を実行した．半径1，誘電率が0のトナー粒子が誘電率が1の空間にFig.5に示すように渦巻状に配置され，中心の粒子が $2\pi$ の電荷を帯びているときの静電場を解析する．

渦巻状に配置される粒子数が1000個，2000個，4000個，8000個，18000個の5ケースに対して解析を行った．境界要素法の要素分割の程度に対応する未知モーメントの展開項数は $m = 8$ とした．反復解法にはGMRES法を適用した．計算にはIntel Xeon X5670 2.93GHzのCPUを持つ計算機を用いた．

Fig.5およびFig.6は粒子数がそれぞれ2000個および4000個の場合の配置を示している．Fig.7はそれぞれの粒子の電

位を中心部から順に渦巻きに沿ってプロットしたものを示している．Fig.8に粒子数を変えて解析を行ったときの計算時間を示す．計算時間は連立方程式の残差を1回評価する解析時間をプロットした．高速多重極法の適用により粒子数 $n$ に対して $O(n)$ の計算時間であることははっきりとは確認できないが $O(n^2)$ を下回る計算時間となっていることが確認できる．計算時間のオーダの考察については今後の課題とする．

Fig.9に粒子数を変えて解析を行ったときの必要メモリー容量を示す．必要メモリー容量に対しても高速多重極法の適用により粒子数 $n$ に対して $O(n)$ の変化を示していることが確認できる．

粒子数が200の場合に対して従来法である境界要素法の解析結果と精度を比較した．本手法では $m = 8$ であることは粒子1つあたりの未知数は複素数8つであるので自由度をそろえるために従来法では粒子一つを16要素で分割し，全体で3200要素に分割した．Fig.10に粒子の中心の電位を中心部から順に渦巻きに沿ってプロットしたものを示す．両者の結果は良く一致し，本手法が十分な精度を持つことが確認できた．また，本手法および従来手法の計算時間はそれぞれ0.430[sec]および36.50[sec]であった．プログラムが異なるので一概には比較できないが効率性においても本手法の優位性が確認できた．

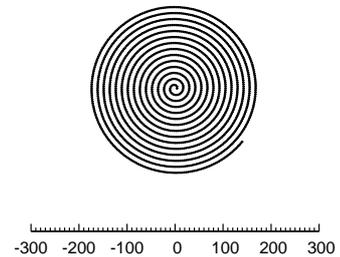


Fig.5 Geometrical distribution of particles (2000 particles).

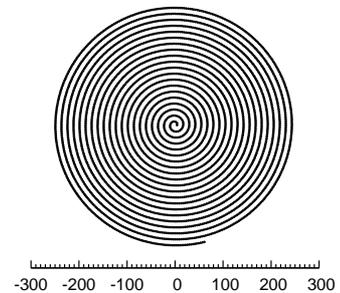


Fig.6 Geometrical distribution of particles (4000 particles).

#### 5. 結論

本研究ではFMBEMを電子写真の現像剤粒子の電場解析

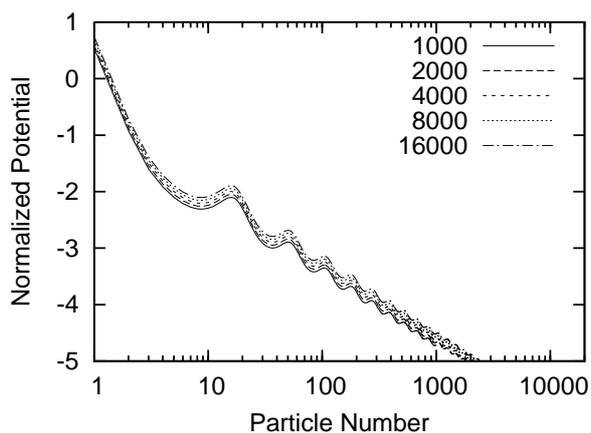


Fig. 7 Potential values on particles.

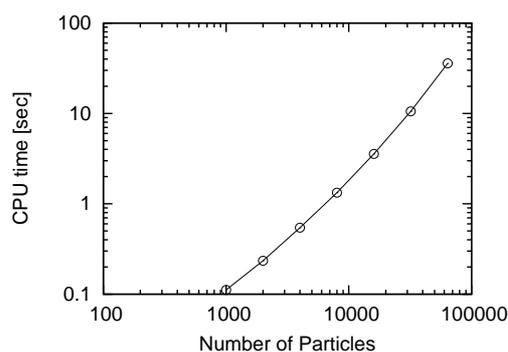


Fig. 8 CPU times for different number of particles.

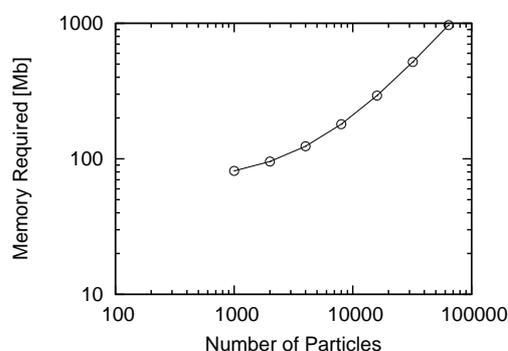


Fig. 9 Required memory for different number of particles.

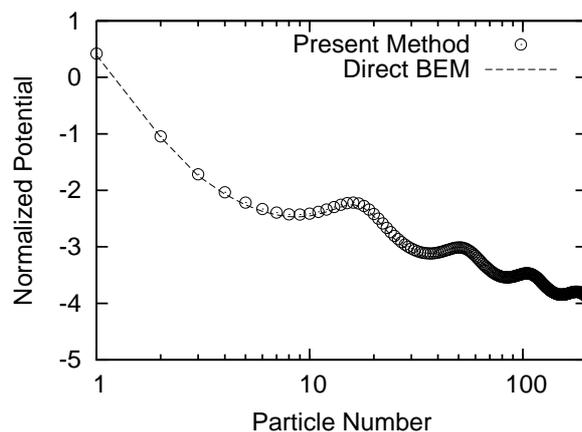


Fig. 10 Potential values on particles (comparison between DirectBEM and present method).

に適用した手法を開発した．電子写真の現像剤粒子の電場解析は静電場ポテンシャル問題として取り扱うことができる．本手法では 粒子の形状が円形であることを利用して各粒子の表面における電位のモーメントを直接未知数とした．各粒子の中心に極をもつ調和関数を重み関数として境界積分方程式を構成した．重み関数には支配方程式の基本解の多重極展開の基底関数を用いた．この重み関数を用いることにより高速多重極法の適用が容易となった．また定式化およびプログラミングにおいても高速多重極法の知見がそのまま適用できる利点がある．本手法は要素分割を必要としないので粒子が刻々と移動する現像剤の解析に有効である．簡単な計算例を用いて本手法の有効性を検証した．本論文では 2 次元問題に対して定式化について述べたが今後は 3 次元問題の定式化を行う予定である．

#### 謝辞

本研究の解析例で用いた数値計算プログラミングの構築に University of Cincinnati の Yijun Liu 教授と京都大学の西村直志教授の開発した高速多重極境界要素法プログラム<sup>(18)</sup>を参考にさせていただきました．ここに謝意を示します．

#### 参考文献

- (1) The Imaging Society of Japan : Electrophotography – Process and Simulation –, (2004), Tokyo denki university press .
- (2) T. Ito and N. Nakayama : Technology to Product Development of Electrophotography , Journal of the Imaging Society of Japan , **49**(2010) , pp. 191–199.
- (3) P. A. Cundall , O. D. L. Strack : A discrete numerical model for granular assemblies , Geotechnique , **47**(1979) , pp. 47–65.
- (4) 粉体工学会 : 粉体シミュレーション入門 , (1998) , 産業図書 .

- (5) T. Seko : Design of Electrophotographic Development Process by Numerical Simulation , Journal of the Imaging Society of Japan , **43**(2004) , pp. 164–170.
- (6) H. Mio : Simulation of Particle Behavior in Development Process by Numerical Simulation , Journal of the Imaging Society of Japan , **49**(2010) , pp. 167–173.
- (7) N. Nakayama and Youichi Watanabe and Yasuaki Watanabe and H. Kawamoto : Experimental and Numerical Study on the Bead–Carry–Out in Two Component Development Process in Electrophotography , The Journal of Imaging Science and Technology , **49**(2005) , pp. 539–544.
- (8) H. Mio and Y. Matsuoka and A. Shimosaka and Y. Shirakawa and J. Hidaka : Analysis of Developers Behavior in Electrophotographic System by large–scale Discrete Element Method , Imaging Conference JAPAN 2006 , (2006) , pp. 263–266.
- (9) T. Watanabe : Development of 3–D particle simulator for analysis of phenomena in electrophotography , Japan Hard copy 2004 Proceedings , (2003) , pp. 269–272.
- (10) T. Watanabe : Numerical Simulation of Carrier Behavior in Two-component Developer, Unit in Electrophotography , Journal of the Imaging Society of Japan , (2006) , pp. 424–428.
- (11) T. Seko, T. Shimada, N. Hirooka, N. Nakayama : High Scalable Parallel Computing Algorithm for Developer Particle Simulation based on Distict Element Method , Journal of the Imaging Society of Japan , **49**(2010) , pp. 391–397.
- (12) 芝田兆史 : 個別要素法による粉体現象の数値計算法 , 電子写真学会誌 , **34**(1995) , pp. 391–397.
- (13) N. Nakamura, H. Mukai : Numerical simulation of compression of a toner layer in electrophotography process , ASME special volume, Advances in Information Storage Systems , **10**(1999) , pp. 223–236.
- (14) N. Nakamura, H. Mukai : Numerical Simulation of Electrostatic Transfer Process Using Discrete Element Method , Pan-Pacific Imaging Conference / Japan Hardcopy '98 , (1998) , pp. 261–264.
- (15) 井ノ上裕人 : 電子写真システムのシミュレーション , シミュレーション , **17**(1998) , pp. 261–264.
- (16) 井ノ上裕人, 横田康夫, 相澤昌宏, 林一雅 : DC ジャンピング現象におけるトナー飛翔解析 ( 第 1 報 ) , Japan Hardcopy '92 , (1992) , pp. 117.
- (17) 小林昭一編著 : 波動解析と境界要素法 , 京都大学学術出版会 , ( 2000 )
- (18) Y.J. Liu, N. Nishimura: The fast multipole boundary element method for potential problems, A tutorial, Engineering Analysis with Boundary Elements, **30**, 5, (2006), pp. 371–381.