

Helmholtz 場-弾性場連成問題のための周期多重極法

A periodic FMM for Helmholtz–elastodynamics coupled problems

飯盛 浩司¹⁾, 吉川 仁²⁾, 西村 直志³⁾

Hiroshi ISAKARI, Hitoshi YOSHIKAWA and Naoshi NISHIMURA

- 1) 京都大学大学院工学研究科 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C, E-mail: isakari@basewall.kuciv.kyoto-u.ac.jp)
 2) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: yoshikawa.hitoshi.5u@kyoto-u.ac.jp)
 3) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@i.kyoto-u.ac.jp)

An FMM for periodic boundary value problems of Helmholtz–elastodynamics coupled field is investigated as an extension of studies on periodic FMMs. Both Helmholtz and elastodynamic fields are solved by FMM. The efficiency and accuracy of the proposed method are confirmed through three kinds of basic numerical tests. The materials dealt with are a polymethyl methacrylate slab, a periodically perforated tungsten slab and periodically set spherical elastic inclusions, all of which are immersed in water. The numerical results are well verified with analytical solutions or results from previous studies.

Key Words: BIEM, FMM, Periodic Boundary Value Problem, Phononic Crystal

1. 緒言

近年、周期構造によってストップバンド等の特異な現象を示すフォトニック結晶やメタマテリアルなどの光学材料、フォノニック結晶⁽¹⁾等の弾性波デバイスが注目を集めている。特に動弾性学においては、新しい防音材料、弾性波フィルタ等への適用が期待されている。こういった新しい材料の設計・開発のためには、周期波動散乱問題の高精度・高速な解法の開発が不可欠である。

これまで著者らは、高速多重極境界積分方程式法を用いた周期波動散乱問題の解法の開発を進めてきた(周期多重極法)。これまでの研究により、周期波動散乱問題に対しても高速多重極法は有効であることが、Helmholtz 方程式⁽²⁾や Maxwell 方程式⁽³⁾、動弾性問題⁽⁴⁾において明らかとなってきた。特に弾性波動問題に対しては、母材、介在物ともに固体で構成されるフォノニック結晶に対する周期多重極法を開発した⁽⁴⁾。また、線形方程式の求解に際して用いる前処理として、Calderon の式に基づく前処理^(5, 6, 7)を適用することにより、多層からなるフォノニック結晶による波動散乱問題を現実的な計算時間で解析することが可能となった。これにより、ストップバンド現象を数値的に再現することに成功した⁽⁷⁾。

一方で、周期構造による特異な現象が発生するためには、母材と介在物の材料定数が大きく異なる必要がある。このため、母材を流体(水、水銀など)、介在物を固体(樹脂、金属など)とすることが有効である場合がある⁽¹⁾。さらに、防音

材料への応用を見据えると、フォノニック結晶による音波の散乱問題を取り扱うことは重要である。しかしながら、従来の動弾性学の周期多重極法を流用して、こういった問題を取り扱うことは適当ではない。というのも、流体中では横波は存在しえず、したがってせん断弾性定数が零となり、それに伴って横波の波数が無限大となってしまうためである。

こういった場合には、流体中では音圧が Helmholtz 方程式に、弾性体中では変位が Navier–Cauchy の式に支配される場として定式化を行うのが自然である。本論文では、著者らがこれまで開発してきた Helmholtz 方程式及び動弾性学における周期多重極法を組み合わせ、Helmholtz 場-弾性場連成問題のための周期多重極法を開発を行う。開発した手法を用いて幾つかの例題を解き、その精度、計算効率について検討する。

2. 定式化

本節では、Helmholtz 場-弾性場連成問題の定式化及びその境界積分方程式法による解法を示す。定式化は周波数域において行う。なお、時間依存は $e^{-i\omega t}$ とする。ここに ω は周波数である。また、数式の記述には Einstein の総和規約を用い、 $(\cdot)_{,i}$ は x_i による微分を表すものとする。

2.1. Helmholtz 場-弾性場連成場における周期境界値問題 解析領域 D を

$$D = ((-\infty, \infty) \otimes [-\zeta_2/2, \zeta_2/2] \otimes [-\zeta_3/2, \zeta_3/2]) \quad (1)$$

とする。すなわち、3次元領域における2重周期問題を考え、 x_2 軸方向の周期は ζ_2 、 x_3 軸方向の周期は ζ_3 であるとする。

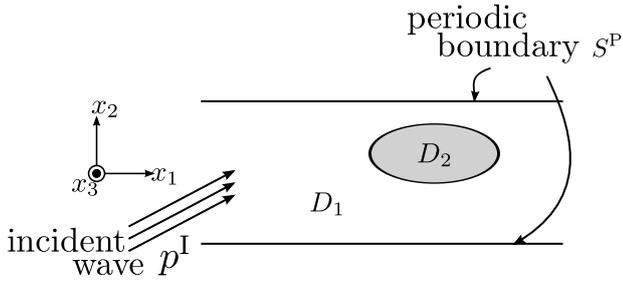


Fig. 1 Periodic boundary value problems

ここでは簡単のため、2領域問題を考え、Fig. 1 に示すように $D = D_1 \cup D_2$ であるとする。さらに、領域 D_1 は非粘性流体、 D_2 は弾性体であるとする。

領域 D に音圧 p^I を入射する問題を考える。領域 D_1 において、音圧 p は次の Helmholtz 方程式を満たす。

$$p_{,jj} + k^{(1)2} p = 0 \quad (2)$$

ここに、 $k^{(1)} = \omega \sqrt{\frac{\rho^{(1)}}{\lambda^{(1)}}}$ は波数、 $\lambda^{(1)}$ は体積弾性係数、 $\rho^{(1)}$ は領域 D_1 を構成する材料の密度である。また、領域 D_2 において、変位 u_i は次の Navier-Cauchy の式を満たす。

$$\mu^{(2)} u_{i,jj} + (\lambda^{(2)} + \mu^{(2)}) u_{j,ij} + \rho^{(2)} \omega^2 u_i = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\rho^{(2)}$ は領域 D_2 を構成する材料の密度、 $\lambda^{(2)}$ 、 $\mu^{(2)}$ は Lamé 定数であり、これを用いて弾性テンソル $C_{ijpq}^{(2)}$ は次のように定義される。

$$C_{ijpq}^{(2)} = \lambda^{(2)} \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu^{(2)} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp})$$

境界条件として、力の釣り合い

$$t_i = -pn_i \quad (4)$$

及び法線方向変位速度の連続性

$$-i\omega u_i n_i = v_i n_i \quad (5)$$

を $\partial D_1 \cap \partial D_2$ (∂D_i は領域 D_i の境界) において課す。ここに、 $t_i = C_{ijpq}^{(2)} u_{p,q} n_j$ は領域 D_2 におけるトラクション、 n_i は $\partial D_1 \cap \partial D_2$ 上の単位法線ベクトル (D_1 から見て外向きを正と定める)、 v_i は領域 D_1 における粒子速度である。ここで、非粘性流体を対象としているため、式 (4) より、トラクションの接線方向成分は零となることに注意する。

一方で、粒子速度 v_i は、 D_1 における運動方程式

$$\rho^{(1)} \frac{\partial v_i}{\partial t} = -p_{,i} \quad (6)$$

を考慮すると、音圧 p と次式で関連づけられる。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = i\rho^{(1)} \omega v_i n_i \quad (7)$$

さらに、散乱場に対し、無限遠において放射条件を課すものとする。

また、周期境界 $S^P = \{\mathbf{x} \mid |x_2| = \frac{\zeta_2}{2} \text{ or } |x_3| = \frac{\zeta_3}{2}\}$ 上では以下のような周期境界条件が課されているとする。

$$p(x_1, \frac{\zeta_2}{2}, x_3) = e^{i\beta_2} p(x_1, -\frac{\zeta_2}{2}, x_3) \quad (8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2}(x_1, \frac{\zeta_2}{2}, x_3) = e^{i\beta_2} \frac{\partial p}{\partial x_2}(x_1, -\frac{\zeta_2}{2}, x_3) \quad (9)$$

$$p(x_1, x_2, \frac{\zeta_3}{2}) = e^{i\beta_3} p(x_1, x_2, -\frac{\zeta_3}{2}) \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3}(x_1, x_2, \frac{\zeta_3}{2}) = e^{i\beta_3} \frac{\partial p}{\partial x_3}(x_1, x_2, -\frac{\zeta_3}{2}) \quad (11)$$

ここに、 $\beta_i = k_i \zeta_i$ ($i = 2, 3$) は入射波の位相差、 \mathbf{k} は入射波の波数ベクトルである。

2.2. 境界積分方程式

前小節の周期境界値問題に対応する境界積分方程式は以下のように書ける。外部領域においては、見かけの固有値問題を回避するため、Burton-Miller 法を用いる。

$$\frac{1}{2} \left(p + \alpha \frac{\partial p}{\partial n_x} \right) = p^I + \alpha \frac{\partial p^I}{\partial n_x} + (S^{(1)} + \alpha D^{*(1)}) \frac{\partial p}{\partial n_y} - (D^{(1)} + \alpha N^{(1)}) p \quad (12)$$

$$-\frac{1}{2} \mathbf{u} = S^{(2)} \mathbf{t} - D^{(2)} \mathbf{u} \quad (13)$$

ここに、 α は Burton-Miller 法の結合定数、 $S^{(i)}$ 、 $D^{(i)}$ 、 $D^{*(i)}$ 、 $N^{(i)}$ は次式で表される積分作用素である。

$$S^{(1)} v = \int_{\partial D} G^{P(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v(\mathbf{y}) dS_y \quad (14)$$

$$D^{(1)} v = \int_{\partial D} \frac{\partial G^{P(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_y} v(\mathbf{y}) dS_y \quad (15)$$

$$D^{*(1)} v = \int_{\partial D} \frac{\partial G^{P(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x} v(\mathbf{y}) dS_y \quad (16)$$

$$N^{(1)} v = \text{p.f.} \int_{\partial D} \frac{\partial^2 G^{P(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial n_x \partial n_y} v(\mathbf{y}) dS_y \quad (17)$$

$$(S^{(2)} \mathbf{v})_j = \int_{\partial D} \Gamma_{jk}^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v_k(\mathbf{y}) dS_y \quad (18)$$

$$(D^{(2)} \mathbf{v})_j = \text{v.p.} \int_{\partial D} \Gamma_{Ijk}^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v_k(\mathbf{y}) dS_y \quad (19)$$

ここに、v.p. は主値、p.f. は発散積分の有限部分を表す。また、 $G^{P(1)}$ は 3次元 Helmholtz 方程式の周期境界条件 (式 (8)–(11)) を満たすグリーン関数、 $\Gamma_{jk}^{(2)}$ 、 $\Gamma_{Ijk}^{(2)}$ は 3次元動弾性学の基本解および二重層核であり、各々次式で表される。

$$G^{P(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{\omega \in \mathcal{L}(R)} \frac{e^{ik^{(1)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}-\omega|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y} - \omega|} e^{i\beta \cdot \omega} \quad (20)$$

$$\Gamma_{ij}^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{e^{ik_T^{(2)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^{(2)2}} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{e^{ik_T^{(2)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - \frac{e^{ik_L^{(2)}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \right) \right] \quad (21)$$

$$\Gamma_{ij}^{(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_l} \Gamma_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) C_{klmj}^{(2)} n_m(y) \quad (22)$$

ここに、 $k_L^{(2)}$ 、 $k_T^{(2)}$ は各々、 D_2 における縦波、横波の波数である。また、 \mathcal{L} は次式で表される格子点である。

$$\mathcal{L}(R) = \{(0, \omega_2, \omega_3) | \omega_2 = p\zeta, \omega_3 = q\zeta, |p|, |q| \leq R, p, q \in \mathbb{Z}\} \quad (23)$$

問題の解を求める際には、境界積分方程式 (12)、(13) 及び境界条件 (式 (4)、(5)) を次のように連立して解けばよい。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(p + \alpha \frac{\partial p}{\partial n_x} \right) \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^I + \alpha \frac{\partial p^I}{\partial n_x} \\ 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^{(1)} + \alpha D^{*(1)} & -D^{(1)} - \alpha N^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\rho^{(1)} \omega^2 \mathbf{n}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & S^{(2)} & -D^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{n} & I & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial n} \\ p \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (24)$$

ここに、 $S^{(i)}$ 、 $D^{(i)}$ 、 $D^{*(i)}$ 、 $N^{(i)}$ は積分作用素 (14)–(19) を離散化して得られる影響係数行列、 I は単位行列である。

周期多重極法は積分方程式 (12)、(13) に表れる積分 (14)–(19) を高速に計算する手法である。したがって、積分方程式を離散化して得られる代数方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ のソルバーに $A\mathbf{x}$ の計算を使う反復解法を用いることが不可欠である。紙面の制約のため、周期多重極法の定式化及びアルゴリズムについてはここでは省略する。Otani and Nishimura⁽³⁾、飯盛ら⁽⁴⁾ を参照されたい。

3. 数値解析例

本節では、提案手法による数値計算例を幾つか示し、その妥当性及び精度、計算効率等についての検証を行う。まず初めに、全ての数値計算例に共通する事項について述べる。

- 境界積分方程式の離散化には選点法、一定要素を用いた。
- 線形方程式のソルバには (F)GMRES を使い、その収束判定条件は 10^{-5} とした。
- 特に断らない限り、多重極法の直接計算部分の全てと、式 (4)、(5) を表す部分により構成される前処理行列 M を用いて前処理を行った。前処理行列の逆 M^{-1} を係数行列に作用させる際には GMRES を使い、その収束判定条件は 10^{-1} とし、収束条件を満たすか、あるいは反復回数が 10 回に達するかのいずれかの場合に反復計算を打ち切った。

- 計算には京都大学学術情報メディアセンターの thin クラスタを用いた。また、数値計算コードは OpenMP により並列化を行い、16 コアを用いた。

3.1. 水中のスラブによる散乱問題

まず初めに、提案手法の精度を検証するため、解析解の求まる簡単な問題を取り扱った。すなわち、Fig. 2 に示すような、水中に設置されたスラブによる平面音波の散乱問題を考えた。スラブとして、アクリルガラス (Polymethyl methacrylate; PMMA) を想定した。適当に無次元化を施し、Table 1 に示す材料定数を用いた。周波数 ω を 8.0 とし、入射角を 0° (垂直入射) から 89° まで 1° 毎に変化させ、解析を行った。本問題は任意周期長の周期問題として取り扱うことが出来るが、ここでは周期 $\zeta_{2,3} = 1.000$ とした。また、スラブの厚さは 0.800 とした。水と PMMA の界面を単位波長あたり 20 要素あるいは 40 要素に分割した。単位波長あたり 20(40) 要素に分割した場合の総要素数は 4096(16384) であり、問題の自由度は 32768(131072) である。なお、本問題は各々の領域 D_i の補領域が無次元を含むため、見かけの固有値問題は発生し得ない。したがって、ここでは Burton-Miller 法の結合定数は $\alpha = 0$ とした。また、本問題に対しては前処理は使用していない。

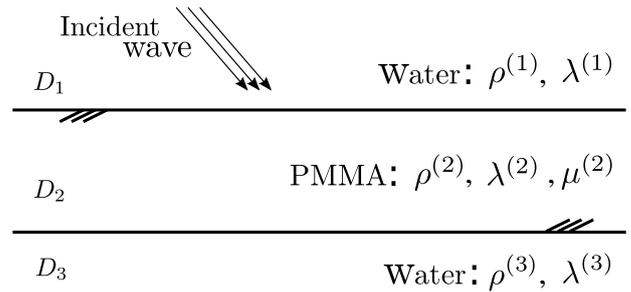


Fig. 2 Slab immersed in water.

Table 1 Material parameters for the slab problem.

	Density ρ	λ	μ
PMMA	1.000	2.161	0.540
Water	1.000	1.000	–

Table 2 に界面における音圧 p 及び変位 \mathbf{u} の式 (25)、(26) によって計算される誤差の最大値を示す。ここに、 $p_{i,j}^{\text{num}/\text{ana}}$ 、 $u_{i,j}^{\text{num}/\text{ana}}$ は各々、 j 番目の要素における音圧及び変位の i 成分の数値解/解析解、 N は要素数である。Table 2 より、音圧、変位ともに十分な精度で計算できていることが分かる。なお、計算時間の最大値は単位波長あたり 20(40) 要素の場合

合、157 sec (548 sec) であった。

$$\text{err}(p) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N |p_{i;j}^{\text{num}} - p_{i;j}^{\text{ana}}|^2}{\sum_{j=1}^N |p_{i;j}^{\text{ana}}|^2}} \quad (25)$$

$$\text{err}(\mathbf{u}) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^3 |u_{i;j}^{\text{num}} - u_{i;j}^{\text{ana}}|^2}{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^3 |u_{i;j}^{\text{ana}}|^2}} \quad (26)$$

Table 2 The maximum value of average error of pressure and displacement for the slab problem.

The num. of elem. per unit wave length	pressure p	displacement \mathbf{u}
20	2.000×10^{-2}	1.084×10^{-2}
40	1.065×10^{-2}	5.648×10^{-3}

3.2. 孔あきスラブによる散乱問題

次に、周期的に円形に穿孔されたスラブ (円孔の半径: 0.1875、厚さ: 0.3750、周期: $\zeta_{2,3} = 1.000$) による音波の散乱問題を考える (Fig. 3)。ここでは、母材として水、スラブとしてタングステンを想定する。タングステンは水と比べて極端に材料定数の異なる材料である (Table 3)。垂直入射を考え、周波数 ω を 3.0 から 16.0 まで 0.1 毎に変化させ、解析を実行した。水とタングステンの界面を 14948 分割した (Fig. 4)。この時、問題の自由度は 119584 となる。ここでも、Burton-Miller 法の結合定数は $\alpha = 0$ とした。

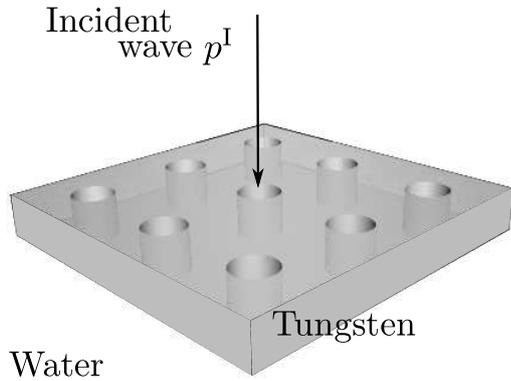


Fig. 3 Perforated slab immersed in water.

Fig. 5 に、得られた透過エネルギーを示す。横軸は周期長で除して無次元化した入射波の波長 $\frac{\Lambda}{\zeta_{2,3}} = \frac{2\pi}{k^{(1)}\zeta_{2,3}}$ である。参照解として、Hard-solid limit、すなわち、スラブを剛体としたモデルによる解⁽⁸⁾を重ねてプロットしている。スラブを剛体としたモデルとの比較であるため、低周波側で若干ずれが見られるものの、提案手法による数値解は参照解と概ねよく一致している。

Table 3 Material parameters for the perforated slab problem.

	Density ρ	λ	μ
Tungsten	13.80	145.6	64.85
Water	1.000	1.000	-

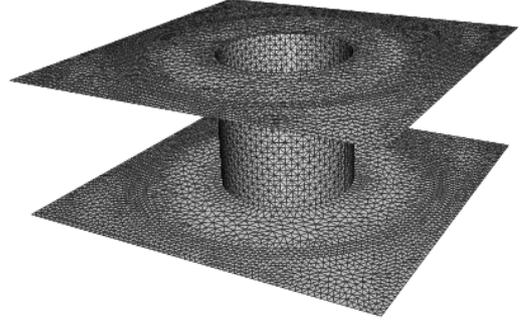


Fig. 4 The boundary element mesh for the perforated slab problems. The surface in the unitcell is divided into 14948 triangular elements.

本問題に対しては見かけの固有値が発生しないとは言いきれないが、スラブに穴がない場合には $\Lambda/\zeta_{2,3}$ が 0.75 (スラブの厚さの倍) 以上では見かけの固有値は発生せず、穴がある場合には、この限界値がさらに小さくなるのが容易に分かる。したがって Fig. 5 に示した多くのケースでは $\alpha = 0$ とした事は合理的である。また、今回取り扱った各ケースにおいては、短波長の場合を含めて精度の悪化は見られず、 $\alpha = 0$ として解析を行ったことは妥当であったと考えられる。なお、反復回数及び計算時間の最大値は 1205 回、11604sec であった。

3.3. 球形介在物による散乱問題

最後に、流体中に周期的に配置された球形介在物による散乱問題を考える (Fig. 6)。周期は $\zeta_{2,3} = 1.000$ 、球の半径は 0.450 とした。介在物の表面を 18000 要素で分割した。このとき、問題の自由度は 144000DOF となる。外部領域、介在弾性体の材料定数として、Table 4 に示した値を用いた。垂直入射を考え、周波数 ω を 0.1 から 10.0 まで 0.1 毎に変化させて解析を行った。なお、Burton-Miller 法の結合定数は $\alpha = -\frac{i}{k^{(1)}}$ とした。

数値計算の結果、介在物表面におけるトラクションの接線方向成分の最大値は 3.263×10^{-5} であった。また、散乱場のエネルギーの総和の入射エネルギーに対する相対誤差の最大値は 3.800% であった。以上 2 点から、物理的に正しい解が得られたと判断できる。この結果から、Burton-Miller 法の結合定数が非零である場合においても、提案手法の妥当性を

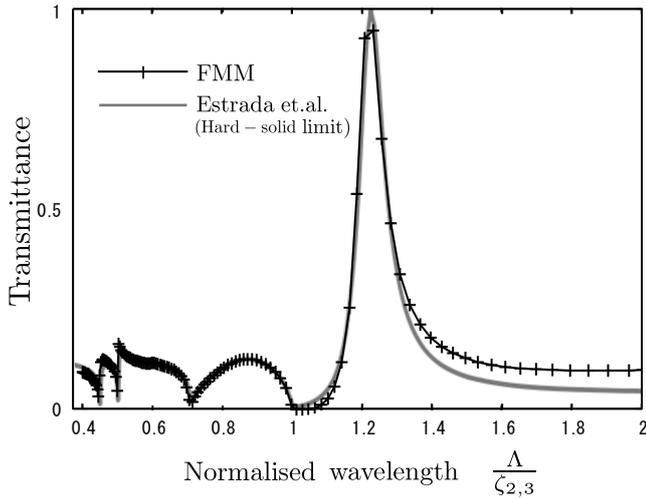


Fig. 5 Transmittance versus normalised frequency in the case of the perforated slab problem.

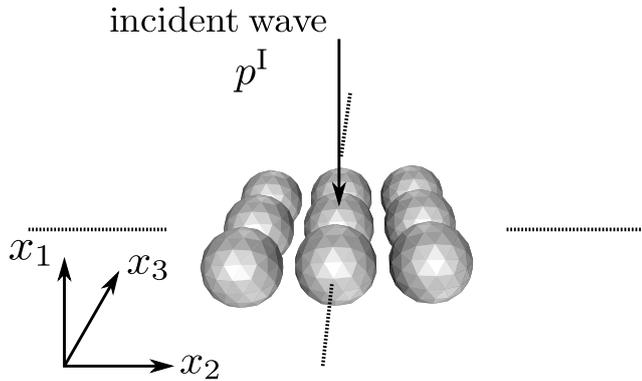


Fig. 6 Scattering by periodic spheres

Table 4 Material parameters for the sphere problem

	Density ρ	λ	μ
Inclusion	1.000	1.000	1.000
Exterior matrix	1.000	1.000	—

検証できたと言える。

しかしながら、比較的単純な形状の問題であるにも関わらず、反復回数、計算時間の最大値は各々1556回、17797secと非常に計算コストが大きいことが分かった。本問題に対する反復法の反復回数が先の2つの問題におけるそれと比べて非常に多い理由としては、線形方程式の係数行列の非対角ブロックに超特異積分に由来する項が並ぶため(式(24))、Burton-Miller法の結合定数 α が零の場合と比べると係数行列が著しく悪条件になっている可能性が考えられる。

4. 結言

母材が非粘性流体、内部介在物が弾性体で構成されるフォノンニック結晶に対する、周期多重極法を用いた解法について検討を行った。幾つかの簡単なモデルを用いて、解法の妥当性を示すことができた。

しかしながら、領域の形状が複雑な場合及びBurton-Miller法の結合定数が非零の場合には反復法の反復回数が非常に多く、計算効率の面では課題が残る結果となった。したがって、本問題に対する効果的な前処理を開発することが必須であると考えられる。今後は、本問題に対して、Calderonの式に基づく前処理^(5, 6, 7)の適用について検討する予定である。具体的には、著者らがこれまで開発してきたCalderonの式に基づく前処理はPMCHWT formulation⁽⁹⁾に関連付けられるため、まず、本問題に対するPMCHWT formulationの開発を行う。その後、境界積分方程式に現れる積分作用素に対し、これをコンパクト作用素を法として固有値の集積点が高々数個である作用素に変換する作用素を用いる前処理を開発する予定である。

参考文献

- (1) Y. Pennec, J.O. Vasseur, B. Djafari-Rouhani, L. Dobrzynski, and P.A. Deymier. Two-dimensional phononic crystals: Examples and applications. *Surface Science Reports*, 2010.
- (2) Y. Otani and N. Nishimura. An FMM for periodic boundary value problems for clacs for Helmholtz' equation in 2D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, pp. 381–406, 2007.
- (3) Y. Otani and N. Nishimura. A periodic FMM for Maxwell's equations in 3D and its applications to problems related to photonic crystals. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 4630–4652, 2008.
- (4) 飯盛浩司, 吉川仁, 西村直志. 3次元動弾性学における周期多重極法とその平面2周期構造による散乱問題への適用. *応用力学論文集*, Vol. 13, pp. 169–178, 8 2010.
- (5) O. Steinbach and WL Wendland. The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method. *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 9, No. 1, pp. 191–216, 1998.
- (6) K. Niino and N. Nishimura. Preconditioning based on Calderon's formulae for periodic fast multipole methods for Helmholtz' equation. *Journal of Computational Physics*, Vol. 231, pp. 66–81, 2012.
- (7) H. Isakari, K. Niino, H. Yoshikawa and N. Nishimura. Calderon's preconditioning for periodic FMM for elastodynamics in 3D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (accepted).

- (8) H. Estrada, V. Gómez-Lozano, A. Uris, P. Candelas, F. Belmar, and F. Meseguer. Sound transmission through plates perforated with two periodic subwavelength hole arrays. *Journal of Physics: Condensed Matter*, Vol. 23, p. 135401, 2011.
- (9) W.C. Chew, E. Michielssen, JM Song, and JM Jin. *Fast and efficient algorithms in computational electromagnetics*. Artech House, Inc., 2001.