

Chandler タイプの多台参照追従モデルの安定性解析

Stability Analysis of Chandler-type Multi Vehicle Following Model

西山 翔¹⁾, 清水 光輝¹⁾, 脇田 佑希子¹⁾, 北 栄輔²⁾

Sho Nishiyama, Hikaru Shimizu, Yukiko Wakita, and Eisuke Kita

1) 名古屋大学大学院情報科学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町1)

2) 名古屋大学大学院情報科学研究科 (〒464-8601 名古屋市千種区不老町1, E-mail: kita@is.nagoya-u.ac.jp)

A car driver accelerates his vehicle according to the information from the vehicle ahead. The vehicle following model is based on this concept. In Chandler-type model, the acceleration rate is controlled according to the velocity difference from the vehicle ahead. In this study, we will consider the Chandler-type vehicle following models for one, two, three, and four leader vehicles. The stability analysis of the models reveals the reason why the traffic flow in the multi vehicle following model is more stable than that in the single vehicle following model.

Key Words: Chandler Model, Multi Vehicle Following Model, Stability Analysis.

1. はじめに

走行車両台数の増大にともなって、交通渋滞は、経済損失だけでなく環境汚染の点からも大きな社会問題となっている。交通渋滞の原因には、事故、道路工事等の明確なものと、合流・分岐、サグ、トンネル等の道路構造に起因する比較的わかりにくいものがある。ところで、通常、運転者は直前方車両からの情報だけに依りて自車両の行動を決定する。しかし、直前方車両だけでなく、さらに前方の車両からの情報が利用できれば、自車両の速度をより適切にコントロールできて、交通渋滞の緩和に効果的と考えられる。そこで、本研究では、直前方車両よりさらに前方の車両からの情報が、交通渋滞の緩和にどの程度効果があるかを理論解析とシミュレーションによって議論する。

交通シミュレーションで車両挙動を表現するために車両追従モデルの研究がなされている^(1, 2, 3, 4)。車両追従モデルでは、直前方車両からの情報(車間距離, 速度等)に応じて自車両の速度や加速度などを制御する。Chandler⁽¹⁾は、自車両の加速度を直前方車両との速度差に比例するように定義している。Newell⁽²⁾は、自車両の速度を直前方車両との車間距離の関数として定義している。Bierley⁽³⁾は、自車両の加速度を直前方車両との車間距離と速度差の両方に比例するように定義している。Bando⁽⁴⁾が提案している最適速度モデルでは、自車両の加速度を、直前方車両との車間距離の非線形関数である最適速度関数と自車両の速度の差に比例するように定義している。

本研究では、直前方車両よりさらに前方の車両からの情報

の影響を検討するために、Chandler⁽¹⁾の提案するモデルを、前方複数台を参照するモデルに拡張したものをを用いる。これを Chandler 型の多台参照追従モデルと呼ぶことにする。Bexelius⁽⁵⁾も Chandler⁽¹⁾のモデルを拡張し、2台の前方車両に従って自車両の加速度を制御する方法を示している。これに対して、本研究では、1,2,3,4台の前方車両を参照するモデルについてパラメータ設計を行い、それらを交通シミュレーションに適用する。Lenz⁽⁶⁾や HSasebe⁽⁷⁾は、最適速度モデルを用いて、前方の複数車両や後方車両からの影響を評価している。本研究では、最適速度モデルよりも単純な Chandler⁽¹⁾のモデルに基づいて車両速度制御を行う場合において、複数の前方車両からの影響を検討する。

本論文の構成は以下のようになっている。第2章では車両追従モデルとそのパラメータ設計について述べる。第3章ではシミュレーション結果を示し、第4章では結果についてまとめる。

2. 車両追従モデルの安定性解析

2.1. 車両追従モデル

本研究で扱う車両ダイナミクスは次式で定義される。

$$\ddot{x}_n(t + \Delta t) = \sum_{j=1}^m a_j (\dot{x}_{n-j}(t) - \dot{x}_n(t)) \quad (1)$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

ここで、 $x_n(t) > 0$ は n 番目の車両位置、 $a_j > 0$ は j 台前方の車両に対するドライバーの感受率、 $\Delta t > 0$ は遅れ時間、 N は全車両数、 m は参照車両台数である。 $n-1$ 番目車両は n 番目車両の直前車両となる。そして、 $m = 1$ のときは Chandler

ら⁽¹⁾のモデル, $m > 1$ のときは Bexelius⁽⁵⁾ や Wakita らが用いたモデル⁽⁸⁾となる.

ドライバーは, 近くにある車両に対して強く反応すると考えられる. そこで, 感受率には以下の関係が成り立つ.

$$a_1 > a_2 > \dots > a_m \quad (2)$$

a_j は添え字 j が小さいほど近い車両に対する感受率を示している. したがって, 式(2)は直前車両に対する感受率が最も強いことを意味している.

2.2. 安定性解析

ダイナミクス(1)において定常状態 $x = x_0$ を考え, その近傍の微小なズレ y_n について考える.

$$x_n = x_0 + y_n \quad (3)$$

式(3)をダイナミクス(1)へ代入すると次式を得る.

$$\ddot{y}_n(t + \Delta t) = \sum_{j=1}^m a_j (\dot{y}_{n-j}(t) - \dot{y}_n(t)) \quad (4)$$

y_n のフーリエ級数として以下のものが考えられる.

$$y_k(n, t) = \exp(i\alpha_k n + zt), \quad (5)$$

$$\alpha_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (6)$$

式(5)を $z = u + iv$ としてダイナミクス(4)へ代入すると, 以下の式を得る.

$$e^{\Delta tz} z - \sum_{j=1}^m a_j (e^{j\alpha_k} - 1) = 0 \quad (7)$$

テイラー展開 ($e^{\Delta tz} \cong 1 + \Delta tz$) を用いると, 式(7)は以下のようになる.

$$\Delta tz^2 + z - \sum_{j=1}^m a_j (e^{j\alpha_k} - 1) = 0 \quad (8)$$

式(8)の解である z の実部が正 ($u > 0$) のとき, 式(5)を吟味すると y_k の値は時間経過により発散してしまうため, ダイナミクス(1)は不安定になってしまう. z の実部が負 ($u < 0$) のとき, 式(5)を吟味すると y_k の値は時間経過により0に収束するため, ダイナミクス(1)は安定である. z の実部が0 ($u = 0$) のとき, ダイナミクス(1)は臨界状態である.

ダイナミクス(1)の安定条件を求めるために, まず臨界点を求めることにする. 臨界点では z の実部が0 ($u = 0$), つまり z は純虚数となる. $z = ip$ とし, 式(8)に代入すると以下の式を得る.

$$(-\Delta tp^2 + \sigma_c) + i(p - \sigma_s) = 0 \quad (9)$$

ただし

$$\sigma_c = \sum_{j=1}^m a_j (1 - \cos(\alpha_k j)), \quad \sigma_s = \sum_{j=1}^m a_j \sin(\alpha_k j) \quad (10)$$

式(9)より, 以下の連立方程式を得る.

$$\begin{cases} -\Delta tp^2 + \sigma_c = 0 \\ p - \sigma_s = 0 \end{cases} \quad (11)$$

連立方程式(11)より p を消去すると以下の条件を得る.

$$\Delta t = \frac{\sigma_c}{\sigma_s^2} \quad (12)$$

$\Delta t = 1$ とすると式(12)は以下のようになる.

$$1 = \frac{\sigma_c}{\sigma_s^2} \quad (13)$$

$m = 1$ の場合 式(13)は以下のようになる.

$$a_1 = \frac{1}{2 \cos^2(\alpha_k/2)} \quad (14)$$

式(14)を極座標系でプロットした特異曲線を図1に示す. 図1の極座標平面において特異曲線が安定領域と不安定領域との境界線となり, これより左側が安定領域となる. ここで, 式(8)の解が安定となるためには, すべての α_k に対して z の実部である u が $u < 0$ となる必要がある. 図1より式(8)の右辺において $\alpha_k = 0$ とすると, それが a_1 の上限を与える. つまり安定条件は以下のようになる.

$$a_1 < \frac{1}{2} \quad (15)$$

また, 式(12)において, 同様に $\alpha_k = 0$ として安定条件を求めると以下のようになる.

$$a_1 < \frac{1}{2\Delta t} \quad (16)$$

$m = 2$ の場合 式(13)は以下のようになる.

$$1 = \frac{a_1 + 2a_2(1 + \cos \alpha_k)}{2(a_1 + 2a_2 \cos \alpha_k)^2 \cos^2(\alpha_k/2)} \quad (17)$$

ここで, $a_2/a_1 = 1/2$ とすると, 式(17)は以下のようになる.

$$a_1 = \frac{2 + \cos \alpha_k}{2(1 + \cos \alpha_k)^2 \cos^2(\alpha_k/2)} \quad (18)$$

式(18)を極座標系でプロットした特異曲線を図2に示す. 図2より式(18)の右辺において $\alpha_k = 0$ とすると, それが a_1 の上限を与える. つまり安定条件は以下のようになる.

$$\left. \begin{aligned} a_1 &< \frac{3}{8} \\ a_2 &< \frac{3}{16} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式(19)より, 以下の安定条件が得られる.

$$a_1 + a_2 < \frac{9}{16} \quad (20)$$

また, 式(12)において, 同様に $\alpha_k = 0$ として安定条件を求めると以下のようになる.

$$\frac{(a_1 + 2a_2)^2}{a_1 + 4a_2} < \frac{1}{2\Delta t} \quad (21)$$

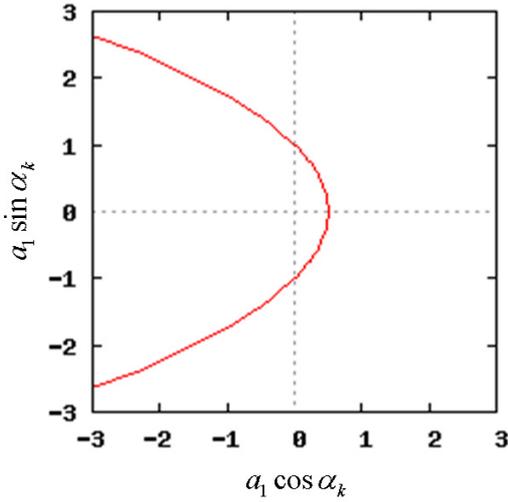


Fig. 1 Characteristic curve ($m = 1$)

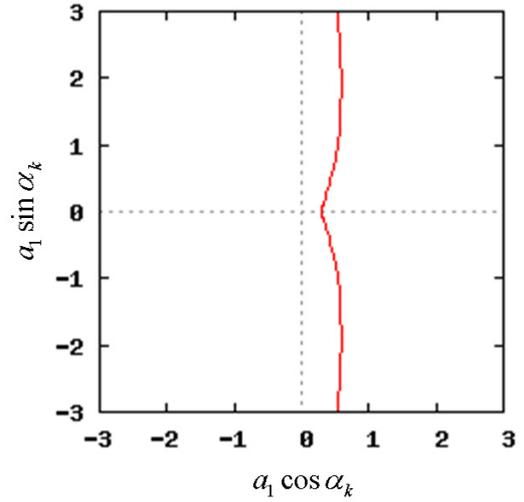


Fig. 3 Characteristic curve ($m = 3$)

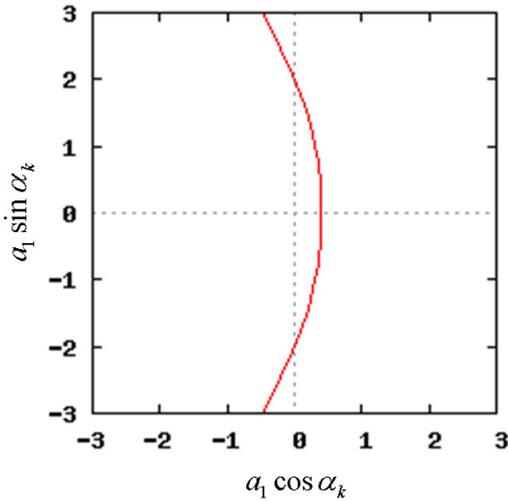


Fig. 2 Characteristic curve ($m = 2$)

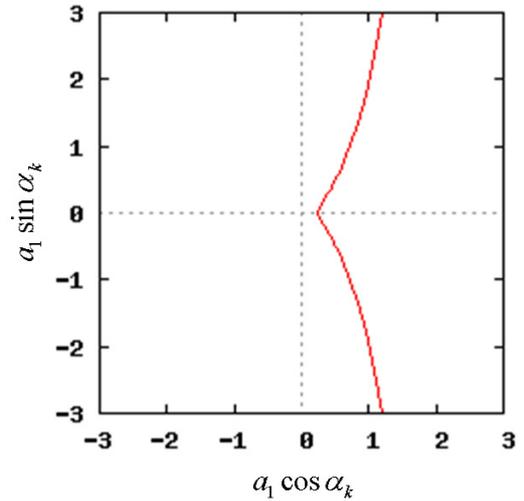


Fig. 4 Characteristic curve ($m = 4$)

$m = 3$ の場合 式 (13) は以下ようになる .

$$1 = \frac{a_1 + 2a_2(1 + \cos \alpha_k) + a_3(4 \cos^2 \alpha_k + 4 \cos \alpha_k + 1)}{2\{a_1 + 2a_2 \cos \alpha_k + a_3(4 \cos^2 \alpha_k - 1)\}^2 \cos^2(\alpha_k/2)} \quad (22)$$

ここで, $a_2/a_1 = 2/3$, $a_3/a_1 = 1/3$ とすると, 式 (22) は以下のようになる .

$$a_1 = \frac{1 + \frac{4}{3}(1 + \cos \alpha_k) + \frac{1}{3}(4 \cos^2 \alpha_k + 4 \cos \alpha_k + 1)}{2\{1 + \frac{4}{3} \cos \alpha_k + \frac{1}{3}(4 \cos^2 \alpha_k - 1)\}^2 \cos^2(\alpha_k/2)} \quad (23)$$

式 (23) を極座標系でプロットした特異曲線を図 3 に示す . 図 3 より式 (23) の右辺において $\alpha_k = 0$ とすると, それが a_1 の上限を与える . つまり安定条件は以下のようになる .

$$\left. \begin{array}{l} a_1 < \frac{3}{10} \\ a_2 < \frac{1}{5} \\ a_3 < \frac{1}{10} \end{array} \right\} \quad (24)$$

式 (24) より以下の安定条件が得られる .

$$a_1 + a_2 + a_3 < \frac{3}{5} \quad (25)$$

また, 式 (12) において, 同様に $\alpha_k = 0$ として安定条件を求めると以下のようになる .

$$\frac{(a_1 + 2a_2 + 3a_3)^2}{a_1 + 4a_2 + 9a_3} < \frac{1}{2\Delta t} \quad (26)$$

$m = 4$ の場合 式 (13) は以下のようになる .

$$1 = \frac{a_1 + 2a_2(1 + \cos \alpha_k) + a_3(4 \cos^2 \alpha_k + 4 \cos \alpha_k + 1) + 4a_4(1 + \cos \alpha_k)(1 + \cos 2\alpha_k)}{2\{a_1 + 2a_2 \cos \alpha_k + a_3(4 \cos^2 \alpha_k - 1) + 4a_4 \cos \alpha_k \cos 2\alpha_k\}^2 \cos^2(\alpha_k/2)} \quad (27)$$

Table 1 Sensitivities with respect to lead vehicles

$m = 1$	$a_1 = 0.40$
$m = 2$	$a_1 = 0.26667, a_2 = 0.13333$
$m = 3$	$a_1 = 0.20, a_2 = 0.13333, a_3 = 0.06667$
$m = 4$	$a_1 = 0.16, a_2 = 0.12, a_3 = 0.08, a_4 = 0.04$

ここで, $a_2/a_1 = 3/4, a_3/a_1 = 2/4, a_4/a_1 = 1/4$ とすると, 式 (27) は以下ようになる.

$$a_1 = \frac{1 + \frac{3}{2}(1 + \cos \alpha_k) + \frac{1}{2}(4 \cos^2 \alpha_k + 4 \cos \alpha_k + 1)}{(1 + \cos \alpha_k)(1 + \cos 2\alpha_k)} \\ \frac{2\{1 + \frac{3}{2} \cos \alpha_k + \frac{1}{2}(4 \cos^2 \alpha_k - 1) + \cos \alpha_k \cos 2\alpha_k\}^2 \cos^2(\alpha_k/2)}{(28)}$$

式 (28) を極座標系でプロットした特異曲線を図 4 に示す. 図 4 より式 (28) の右辺において $\alpha_k = 0$ とすると, それが a_1 の上限を与える. つまり安定条件は以下ようになる.

$$\left. \begin{aligned} a_1 &< \frac{1}{4} \\ a_2 &< \frac{3}{16} \\ a_3 &< \frac{1}{8} \\ a_4 &< \frac{1}{16} \end{aligned} \right\} (29)$$

式 (29) より, 以下の安定条件が得られる.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 < \frac{5}{8} (30)$$

また, 式 (12) において, 同様に $\alpha_k = 0$ として安定条件を求めると以下ようになる.

$$\frac{(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4)^2}{a_1 + 4a_2 + 9a_3 + 16a_4} < \frac{1}{2\Delta t} (31)$$

2.3. 考察

安定条件 (15), (20), (25), (30) より, 参照する車両が増えるにしたがって特異曲線が右へ膨らみ, 安定領域が大きくなっていることがわかる.

また, 式 (16), (21), (26), (31) より安定条件を一般化すると以下ようになる.

$$\frac{(\sum_{j=1}^m j a_j)^2}{\sum_{j=1}^m j^2 a_j} < \frac{1}{2\Delta t} (32)$$

3. 数値解析例

前方車両に対する感度は, 第 2 章で述べた条件に従って定める. まず, 遅れ時間を $\Delta t = 1$ とする. 式 (16) より, $m = 1$ のときの感度 a_1 は次式を満足しなければならない.

$$a_1 < 0.5 (33)$$

そこで, ここでは $a_1 = 0.4$ を採用する. $m = 2, 3, 4$ の場合については, 前方車両に対する感度の総和は, $m = 1$ における前方車両に対する感度 $a_1 = 0.4$ と等しいとする. つまり,

$$\sum_{i=1}^m a_i = 0.40 \quad (m = 1, 2, 3, 4) (34)$$

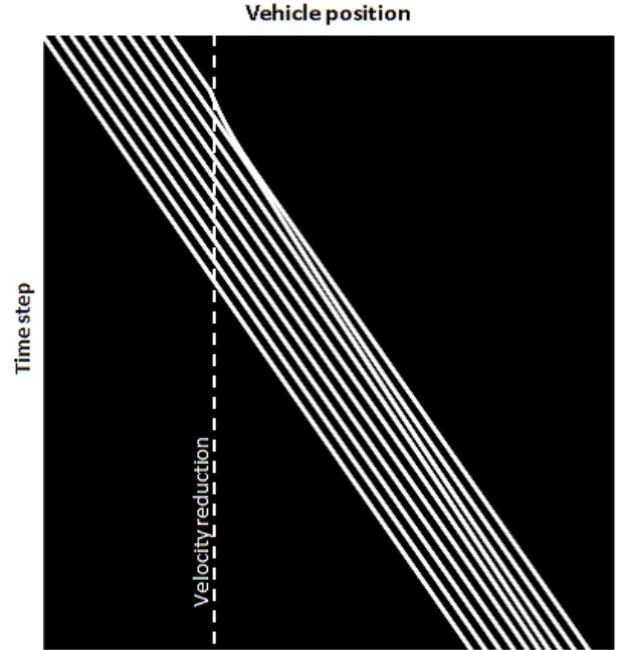


Fig. 5 The growth of traffic jam ($m = 1$)

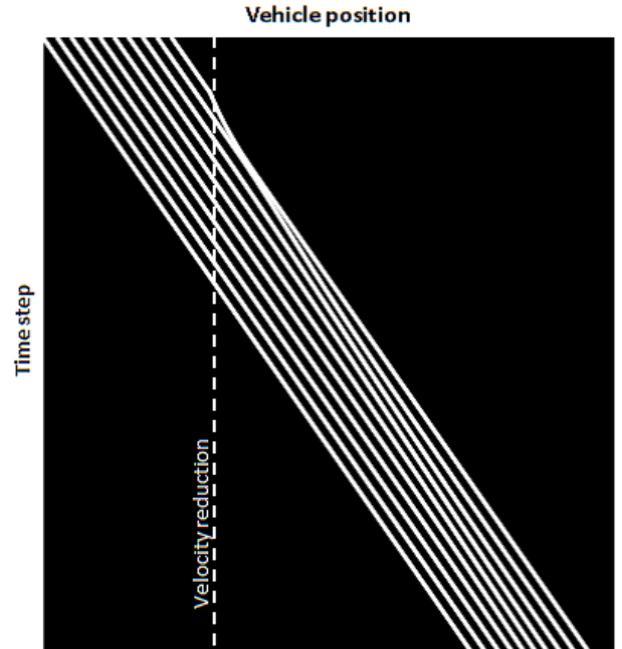


Fig. 6 The growth of traffic jam ($m = 2$)

さらに, 感度の間には式 (2) の関係を仮定している. 以上のことから, 感度を表 1 に示すように定めてシミュレーションを行う.

シミュレーション対象として, 片側 1 車線道路を 10 台の車両が連なって走行する状態を考える. 各車両の初期速度を 15(m/s) とする. 先頭車両は, 時刻 $t = 1$ において突然速度を 10(m/s) まで減速する. その後, 加速度 $0.5(m/s^2)$ で 15(m/s) まで再加速したあと, 等速度運動する. $m = 1$ の場合, 先頭

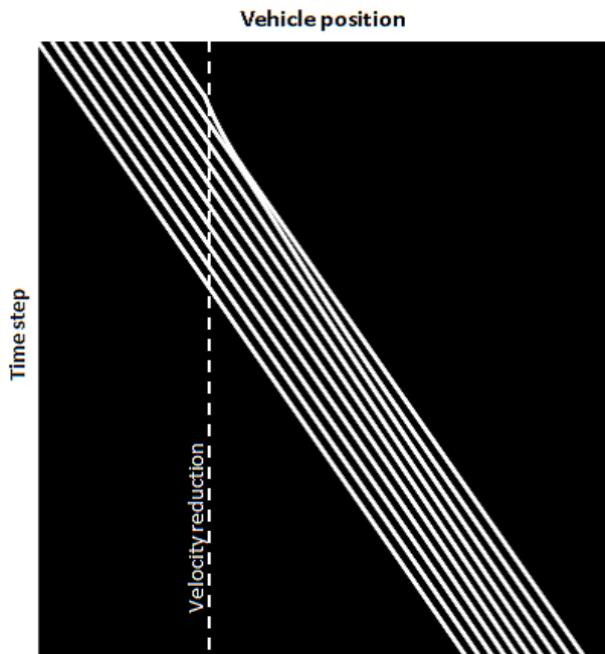


Fig. 7 The growth of traffic jam ($m = 3$)

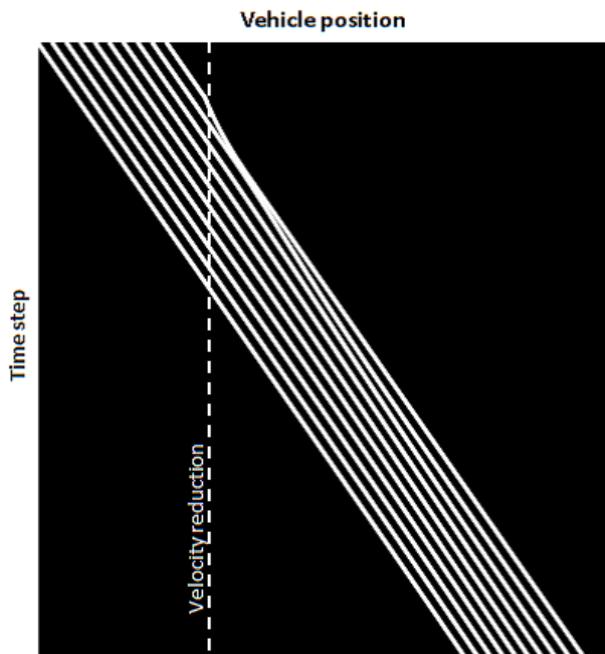


Fig. 8 The growth of traffic jam ($m = 4$)

車両以外のすべての追従車両は、前方車両と自車両の速度差に応じて自車両の加速度を制御する。 $m = 2$ の場合、先頭車両の直後の追従車両は $m = 1$ のルールに、そのほかの追従車両は $m = 2$ のルールに応じて自車両の加速度を制御する。同様にして、 $m = 3, 4$ の場合においても、追従車両は参照できる前方車両台数に応じた加速度制御を行うこととする。1 タイムステップは実時間で $0.1(s)$ としてシミュレーションを行う。

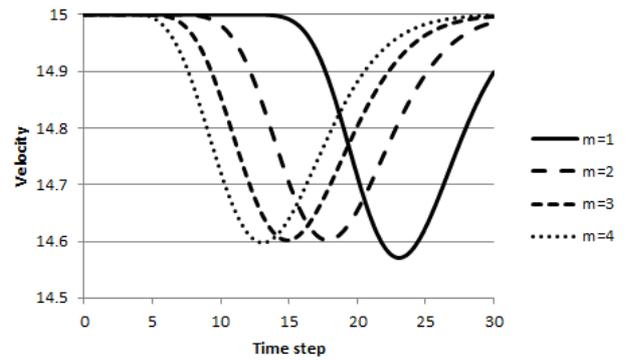


Fig. 9 Rear-most vehicle velocity

交通流のシミュレーション結果を図5から8に示す。これらの図で、横軸は車両位置を、縦軸はタイムステップを示している。どの場合においても、先頭車両の速度が大きく低下したとき、先頭車両の直後の追従車両が大きく先頭車両に近づいていることがわかる。しかし、追従車両とその直前方車両との車間距離は、 m が大きくなるにしたがって変化が小さくなっている。これは、 m が大きいほど、追従車両の速度低下の開始時点が早まっていることを示している。

そこで、10台目の車両の速度変動の比較を図9に示す。横軸にはタイムステップを、縦軸には速度を示す。 $m = 1$ と比べて、 $m = 2, 3, 4$ では最低速度が大きくなっていることがわかる。また、 m が大きいほど速度低下が最大となるタイムステップが早まっており、そのため、もとの速度に回復するまでの時間も早まっていることがわかる。

4. おわりに

本論文では、前方の複数車両を参照できるときに、その交通流の安定化に与える影響を検討した。そのために、交通流を Chandler タイプの多台参照追従モデルによって表現した。

最初に、モデルについて安定性解析を行い、参照する前方車両の台数を増やせば交通流がより安定することを理論的に確認した。つづいて、10台の車両が連続して走行する交通シミュレーションを行った。その結果、参照車両台数が大きいほど、後続する追従車両は早い段階で速度制御を始めるので、交通流を安定して制御できることがわかった。

今後は、前方車両に対する感度の取り方を変更した場合の交通流への影響についてさらに検討を進めたいと考えている。

参考文献

- (1) R. E. Chandler, R. Herman, and E. W. Montroll. Traffic dynamics; studies in car-following. *Operations Research*, 6(2):165-184, 1958.
- (2) G. F. Newell. Nonlinear effects in the dynamics of car following. *Operations Research*, 9(2):209-229, 1961.
- (3) R. L. Bierley. Investigation of an intervehicle spacing display. *Highway Research Record*, (25):58-75, 1963.

- (4) M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama. Phenomenological study of dynamical model of traffic flow. *Journal of Physics I France*, 5:1389–1399, 1995.
- (5) S. Bexelius. An extended model for car-following. *Transportation Research*, 2(1):13–21, 1968.
- (6) H. Lenz, C.K. Wagner, and R. Sollacher. Multi-anticipative car-following model. *The European Physical Journal B*, 7(2):331–335, 1999.
- (7) K. Hasebe, A. Nakayama, and Y. Sugiyama. Dynamical model of a cooperative driving system for freeway traffic. *Physical Review E*, 68(2):026102, Aug 2003.
- (8) Y. Wakita, T. Iguchi, H. Shimizu, T. Tamaki, and E. Kita. Comparison of zipper and non-zipper merging patterns near merging point of roads. *International Journal of Natural Computing Research*, 1(3):19–29, 2010.