

# 電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッドトレフツ有限要素解法への混入解

## SPRIOUS SOLUTIONS OF HYBRID TREFFTZ FINITE ELEMENT METHOD WITH SAKURAI-SUGIURA PROJECTION METHOD FOR ELECTROMAGNETIC WAVEGUIDE EIGENVALUE PROBLEMS

嶋田 賢男<sup>1)</sup>, 森田 好人<sup>2)</sup>, 長谷川 弘治<sup>3)</sup>, 佐藤 慎悟<sup>4)</sup>

Takao SHIMADA, Yoshihito MORITA, Koji HASEGAWA and Shingo SATO

- 1) 津山工業高等専門学校電気電子工学科 (〒 708-8509 津山市沼 624-1, E-mail: shimada@tsuyama-ct.ac.jp)  
 2) 室蘭工業大学大学院工学研究科 (〒 050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: s1924209@mmm.muroran-it.ac.jp)  
 3) 室蘭工業大学大学院もの創造系領域 (〒 050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: khasegaw@mmm.muroran-it.ac.jp)  
 4) 北見工業大学工学部電気電子工学科 (〒 090-8507 北見市公園町 165, E-mail: s-sato@mail.kitami-it.ac.jp)

Hybrid Trefftz finite element method (HTFEM) with a nonlinear eigenvalue problem solver, Sakurai-Sugiura projection method (SSM), for electromagnetic wave propagation problems is inspected for finding a procedure for discarding nonphysical solutions and dependence of computed eigenvalues on parameters of SSM. Numerical results of TE- and TM-wave propagation constants on a three-layer-dielectric slab waveguide and a slab waveguide with periodic thin conductor show that estimating value of condition numbers of HTFEM matrices at computed solutions or changing an integral path in SSM may point out nonphysical solutions. Moreover, the three-layer-dielectric slab waveguide's results show that propagation constants computed by SSM with proper parameters converge.

**Key Words:** Hybrid Trefftz finite element method, Sakurai-Sugiura projection method, Electromagnetic waveguide, Propagation property, Nonlinear eigenvalue problem

### 1. はじめに

有限要素法は領域型解析法であるので、半無限領域の扱いになんらかの工夫が必要である。半無限領域を取り除き解析端で電磁波が無反射となるように、完全整合層で解析領域を囲んだり、吸収境界条件を領域端に適用するなどの方法がある。また半無限領域を取り扱う特殊な要素を採用する方法がある。本論文で扱うハイブリッドトレフツ有限要素法 (Hybrid Trefftz Finite Element Method:HTFEM) (1, 2, 3, 4) は、この特殊な要素を採用する一例である。HTFEM は要素境界上での連続条件をラグランジュの未定係数法で汎関数に組み込むので、補間関数の異なる要素の併用が可能であり、領域ごとに最適な補間関数を選ぶことができる。例えば、不均質領域に対しては多項式を用いる通常要素で分割を行い、一様均質領域に対しては系の支配方程式を満足する空間高調波展開を用いたトレフツ要素 1 つで分割できる (4)。この手法の利点として、吸収境界条件を設定する場合や完全整合層

を用いる場合のように接続境界を媒質から離す必要がないため、分割数を減らすことができる。しかし、伝搬定数を求める場合、非線形固有値問題に帰着する欠点がある (4)。

この非線形固有値問題の解法として、著者らは Sakurai-Sugiura 射影法 (SS 法) (4, 5, 6, 7) の適用を検討している。SS 法は、固有値を指定した複素領域内に存在する全固有値とその固有ベクトルを求めることができる。既に、周期的に完全導体を装荷した漏洩誘電体スラブ導波路を例に SS 法が適用可能なことを報告している (4)。しかし、SS 法のパラメータによっては、不要解が混入し、その解が物理的に意味のあるものかどうかを界分布のみから判定するのが容易ではない場合があった。

そこで、本論文では厳密解の存在する三層誘電体スラブ導波路を対象として、求まる解の判別手順を検討するとともに前報告 (4) では確認していない固有値の収束性を調べている。さらに、周期的に完全導体を装荷した漏洩誘電体スラブ導波路の不要解の判別を行い、SS 法を適用した HTFEM に基づ

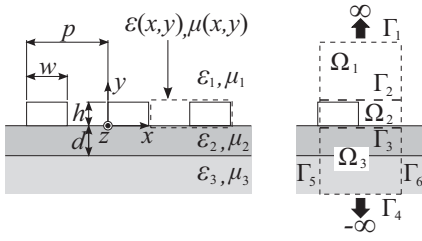


Fig. 1 Metallic grating on a dielectric slab waveguide

く電磁波伝搬問題の解析法の妥当性を示している。

## 2. 問題設定

Fig.1 に示すようなカバー層（比誘電率  $\epsilon_1$ ，比透磁率  $\mu_1$ ， $h < y$ ），完全導体電極による周期摂動部（比誘電率  $\epsilon(x, y)$ ，比透磁率  $\mu(x, y)$ ， $0 \leq y \leq h$ ），導波層（比誘電率  $\epsilon_2$ ，比透磁率  $\mu_2$ ， $-d \leq y < 0$ ），基板（比誘電率  $\epsilon_3$ ，比透磁率  $\mu_3$ ， $y < -d$ ）からなる周期構造漏洩誘電体スラブ導波路（構造周期  $p$ ，電極幅  $w$ ，電極厚み  $h$ ，導波層厚み  $d$ ）の伝搬問題を考える．電磁界を複素表示して時間依存性を  $\exp(j\omega t)$  とし， $z$  軸方向の界の変化を一様（ $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$ ）とする．構造が  $x$  軸方向に周期的なので，フロケの定理により電磁界の成分  $\phi(x, y, z)$  は，複素伝搬定数を  $\gamma = \beta - j\alpha$  とすると，周期関数  $\tilde{\phi}(x+p, y) = \tilde{\phi}(x, y)$  を用いて  $\phi(x, y, z, t) = e^{i(\omega t - \gamma x)} \tilde{\phi}(x, y)$  と表される．ここに， $\beta$  は位相定数， $\alpha$  は減衰定数である．また， $j$  は虚数単位であり， $\omega$  は角周波数である．構造の周期性から，導波路1周期分（ $x_0 \leq x \leq x_0 + p$ ）を解析する．無限遠方の境界  $\Gamma_1$ ， $\Gamma_4$  には放射条件，境界  $\Gamma_5(x = x_0)$ ， $\Gamma_6(x = x_0 + p)$  には周期条件を課す．なお，境界  $\Gamma_2$  は一様なカバー層と周期摂動部を含む領域との境界（線分  $y = h, x_0 \leq x \leq x_0 + p$ ）であり， $\Gamma_3$  は導波層と周期摂動部を含む領域との境界（線分  $y = 0, x_0 \leq x \leq x_0 + p$ ）である．

## 3. HTFEM による定式化

この問題に対する定式化は，既に報告した<sup>(4)</sup> ので，本論文では簡単に記述する．解析領域を Fig.1 に示すように半無限領域  $\Omega_1$ ， $\Omega_3$ ，周期摂動部を含む領域  $\Omega_2$  に分割する．領域  $\Omega_1$ ， $\Omega_3$  は放射条件と周期条件を満足する平面波解となるように空間高調波展開を補間関数とするトレフツ要素各1個で分割する．不均質領域  $\Omega_2$  を Fig.2 に示す4節点4辺矩形要素<sup>(8)</sup> で分割し，各要素内での電界の  $x$ ， $y$ ， $z$  成分を

$$E_i = \{U_i\} \{\hat{E}_i\}, \quad i = x, y, z \quad (1)$$

と多項式近似する．ここに， $\{U_i\}$  は要素の補間関数ベクトルであり， $\{\hat{E}_x\}$ ， $\{\hat{E}_y\}$  は要素内における各辺上の電界ベクトルの  $x$ ， $y$  成分， $\{\hat{E}_z\}$  は要素内における各節点での電界ベクトルの  $z$  成分である．

ここで領域  $\Omega_2$  とトレフツ要素を接続するために，本手法で用いるトレフツ要素の境界上の電界と領域  $\Omega_2$  の境界上の電界が一致するように離散化すると，最終的に解くべき非線

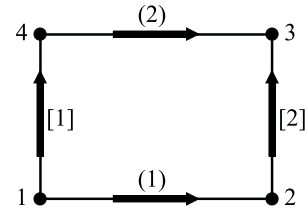


Fig. 2 Rectangular element with 4-edges and 4-nodes

形固有値問題の行列方程式は，

$$[T(\gamma)]\{\hat{E}\} = \{0\} \quad (2)$$

と得られる．ここで， $\{\hat{E}\}$  は離散化した領域  $\Omega_2$  の電界未知列ベクトル， $N$  行  $N$  列の  $[T(\gamma)] \in \mathbb{C}^{N \times N}$  は  $\gamma$  について正則な行列関数であり，

$$[T(\gamma)] = [A_0] + [A_+]e^{-j\gamma p} + [A_-]e^{j\gamma p} + [g_{kl}(\gamma)] \quad (3)$$

である．行列  $[A_0]$ ， $[A_+]$ ， $[A_-]$  は，定数を要素とする正方行列であり，4節点4辺矩形要素による汎関数評価に起因する． $[g_{kl}(\gamma)]$  は， $k$  行  $l$  列要素が  $\gamma$  に関する代数関数，有理関数，指数関数を含む正方行列であり，トレフツ要素に起因する．

## 4. 周回積分を用いた非線形固有値問題の解法 (SS 法)

本章では，数値計算に必要なパラメータを説明するために，Asakura らの文献<sup>(6)</sup> に従い解法の概略を述べる．なお SS 法には，近接した固有値計算が可能なように改良したブロック版が提案されているが，本論文ではプログラム作成が容易な非ブロック版を用いる．

非線形固有値問題の式 (2) を解くことを考える．

$\dot{\Gamma}$  を正の向きをもつ複素平面上の Jordan 曲線とし， $\lambda_l (l = 1, 2, \dots, m)$  を  $\dot{\Gamma}$  内にある式 (2) の相異なる固有値とする．零ベクトルでない  $N$  行 1 列の列ベクトル  $\{V\} \in \mathbb{C}^N$  に対して関数  $f(\gamma)$ ，複素モーメント  $\mu_k$  を

$$f(\gamma) = \{V\}^H [T(\gamma)]^{-1} \{V\} \quad (4)$$

$$\mu_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{\dot{\Gamma}} \gamma^k f(\gamma) d\gamma, \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1 \quad (5)$$

と定義する．ここで，上添字 H は共役転置行列を表す．

数値計算の簡単化のために積分路  $\dot{\Gamma}$  を，中心  $o$ ，半径  $\rho$  の円とし，台形公式で式 (5) を数値積分すると，

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{N_s} \sum_{h=0}^{N_s-1} \left( \frac{c_h - o}{\rho} \right)^{k+1} f(c_h), \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1 \quad (6)$$

となる．ここに標本点  $c_h$  は，円周上の  $N_s$  個の等間隔点

$$c_h = o + \rho e^{\frac{2\pi i}{N_s}(h+1/2)}, \quad h = 0, 1, \dots, N_s-1 \quad (7)$$

とし，関数値を

$$f(c_h) = \{V\}^H [T(c_h)]^{-1} \{V\}, \quad h = 0, 1, \dots, N_s-1 \quad (8)$$

としている．ただし，積分路  $\tilde{\Gamma}$  を単位円に移してある．この単位円上で近似評価した Hankel 行列を

$$[\hat{H}_m] = [\hat{\mu}_{i+j-2}]_{i,j=1}^m \quad (9)$$

$$[\hat{H}_m^<] = [\hat{\mu}_{i+j-1}]_{i,j=1}^m \quad (10)$$

とすると，求める  $[T(\gamma)]$  の近似固有値  $\hat{\lambda}_l$  は，一般化固有値問題

$$\{[\hat{H}_m^<] - \zeta[\hat{H}_m]\}\{\hat{w}\} = \{0\} \quad (11)$$

の固有値  $\hat{\zeta}_l (l = 1, 2, \dots, m)$  から

$$\hat{\lambda}_l = o + \rho \hat{\zeta}_l, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (12)$$

と求まり，固有ベクトル  $\{\hat{x}_l\}$  は

$$\{\hat{x}_l\} = [\{\hat{s}_0\}, \{\hat{s}_1\}, \dots, \{\hat{s}_{m-1}\}]\{\hat{w}_l\}, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

と求まる．ここに， $\{\hat{w}_l\}$  は一般化固有値問題  $\{[\hat{H}_m^<] - \zeta[\hat{H}_m]\}\{\hat{w}\} = \{0\}$  の  $\hat{\zeta}_l$  に対応する固有ベクトルで，

$$\{\hat{s}_k\} = \frac{1}{N_s} \sum_{h=0}^{N-1} \left( \frac{c_h - o}{\rho} \right)^{k+1} [T(c_h)]^{-1} \{V\} \quad (14)$$

である．

Hankel 行列の次数は，積分路内の固有値の個数  $m$  である．しかしながら， $M \geq m$  である  $M$  を推定し， $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_M$  を Hankel 行列  $[\hat{H}_M]$  の特異値， $\delta$  を小さな値として  $K$  個の特異値が  $\sigma_i \geq \delta (i = 1, 2, \dots, K)$ ，残りの  $M - K$  個が  $\sigma_i < \delta (i = K + 1, \dots, M)$  となる  $K$  を定め，本節の手続き中の  $m$  を  $K$  に置き換えると，十分な精度の固有値が得られる<sup>(5)</sup>．

以上から，非ブロック版 SS 法の実行に必要な設定値は，以下となる． $\gamma$  の複素平面上の積分径路の中心  $o$  と半径  $\rho$ ，積分の標本点数  $N_s$ ，最終的に解く Hankel 行列の次数  $K$  を定めるための整数  $M$  と値  $\delta$  である．なお列ベクトル  $\{V\}$  の成分は，ランダム関数で発生させて良い．

## 5. 不要解の判定手続きの検討

### 5.1. 三層誘電体スラブ導波路の解析

Fig.1 の完全導体電極による周期摂動部を除去した Fig.3 の三層誘電体スラブ導波路 ( $k_0 p = 2.1$ ,  $d = 0.5p$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1.0$ ,  $\varepsilon_2 = 11.8$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1.0$ ) の伝搬問題を例に解の判定を考える．ここに， $k_0$  は真空中の波数である．この導波路の  $TM_0$  モード， $TE_0$  モード， $TE_1$  モードの伝搬定数  $\gamma$  はそれぞれ， $\gamma p = 4.33015$ ,  $6.07580$ ,  $2.30491$  と解析的に求まる．領域  $\Omega_1$ ,  $\Omega_3$  をトレフツ要素各 1 個で分割し，トレフツ要素の接続境界を 32 等分割，空間高調波展開の打ち切り次数  $M_c$  を 32 とし， $-32$  次から 32 次までの空間高調波を用いている．SS 法のパラメータを  $M = 8$ ,  $\delta = 10^{-11}$  とし，式 (12) の固有値  $\hat{\lambda}_{lp}$  とその場合の行列  $[T(\hat{\lambda}_{lp})]$  の条件数  $C([T(\hat{\lambda}_{lp})])$  を計算した結果を Table 1 に示す．条件数は，2 ノルムを用いて，行列  $[T(\hat{\lambda}_{lp})]$  の最小特異値  $\sigma_{\min}$  と最大特異値  $\sigma_{\max}$  の比  $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$  で算出した．特異値分解には Intel<sup>®</sup> Math Kernel Library の `zgesvd` を用いた．ここに，(a), (b)

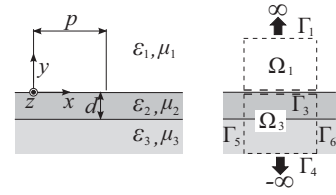


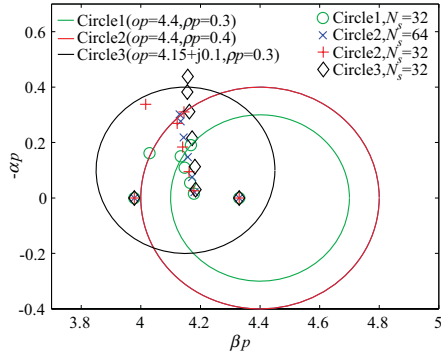
Fig. 3 A three-layer-dielectric slab waveguide

は積分路の円内に  $TM_0$  あるいは  $TE_0$  モードの  $\gamma p$  を含む各 3 円の結果である．また，求まった固有値  $\hat{\lambda}_{lp}$  の複素平面  $\gamma p$  上の位置を Fig.4 に示す．

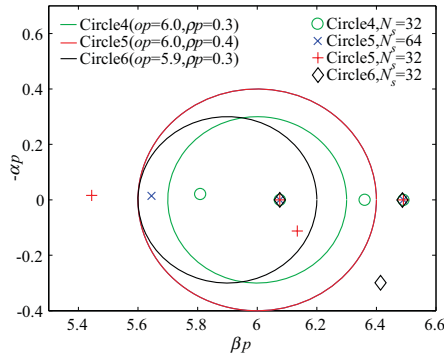
Table 1(a) の 3 円では， $K = 8$  となり， $TM_0$  モードの解 ( $l = 1$ ) の他に 7 個の解があると判定した．しかしながら解析解から，この円内には  $TM_0$  モードのみが存在する．周期構造導波路として解析して求まった解の内  $l = 1, 2$  の解は解析的に求めた値と小数点以下 4 桁程度一致しており，ここでは示さないが界分布からも  $+x$  軸方向に伝搬する  $TM_0$  モードの解， $-x$  軸方向に伝搬する  $TE_1$  モードの解である．なお  $l = 2$  の解  $\hat{\lambda}_{lp}$  は， $\Re(\hat{\lambda}_{lp}) - 2\pi = -2.30491$  であり，周期構造として解析したために求まったものである．また  $l \geq 3$  の解では， $[T(\hat{\lambda}_{lp})]$  の条件数が  $l = 1, 2$  と比べ  $10^2$  と小さいことから式 (2) の解ではないと考えられる．ここで，行列  $[T(\hat{\lambda}_{lp})]$  の条件数が円 1 では  $10^4$ ，円 2 ( $N_s = 64$ ) では  $10^7$  程度と異なるが，円 1 では伝搬定数が複素数となっており， $TE_1$  モードの伝搬する解の近似度が低いため条件数が小さくなっている．このように，大小判定の閾値が不明であるものの条件数が大きくないものは，SS 法に由来するものと考えられる．また， $N_s = 32$  とした 3 円の  $\hat{\lambda}_{lp} (l \geq 3)$  の値は，Fig.4(a) からわかるように，円 1 と円 2，円 2 と円 3，円 3 と円 1 のいずれでも異なっており，積分路に依存することから SS 法に由来することがわかる．さらに，円 2 の  $N_s = 32, 64$  の結果から，数値積分の標本点数  $N_s$  が異なると SS 法に由来して混入する解は異なることがわかる．

Table 1(b) の円では，3 個から 5 個の解が得られている． $l = 2$  の解  $\hat{\lambda}_{lp}$  は， $\Re(\hat{\lambda}_{lp}) - 4\pi = -6.07578$  なので  $-x$  軸方向に伝搬する  $TE_0$  モードであり，界分布からも確認できる．またこの解  $\hat{\lambda}_{lp}$  は，その場合の行列  $[T(\hat{\lambda}_{lp})]$  の条件数が円 4 では  $10^6$ ，円 5 ( $N_s = 64$ ) では  $10^7$  程度となっており， $l \geq 3$  の解に比べ条件数が大きい．なおこの解は，Fig.4(b) からわかるように，SS 法に指定した求解範囲外であるので，条件数等の判定を行わずに解から除去して良い．また円 1，円 2 で求まる  $TE_1$  モードの解 ( $l = 2$ ) も求解範囲外なので求める解から除去して良い．

以上から，求解円盤領域  $C_o$  と同じ中心で半径が大きな円盤領域  $C_L$  で SS 法により解を計算し，条件数が大きく領域依存性が小さな解を物理的解，条件数が小さく求解領域が異なると一致するものがない解を SS 法の適用により混入する解と本論文では判定することにする．なお条件数は必ずしも調べる必要はなさそうであるが，求解領域への解依存性が小さいという判定基準が不明であるため，利用する．



(a) TM<sub>0</sub> mode



(b) TE<sub>0</sub> mode

Fig. 4 Distribution of computed eigenvalues of a three-layer dielectric slab waveguide in case of  $M = 8$  and  $\delta = 10^{-11}$

## 5.2. 周期構造漏洩三層誘電体スラブ導波路の解析

前節5.1の三層誘電体スラブ導波路に完全導体 ( $w/p = 0.5$ ,  $h/p = 0.5$ ) を周期的に装荷した Fig.1 に示す問題を考える. 領域  $\Omega_2$  には, Fig.2 に示す矩形要素を用い,  $x$ ,  $y$  軸方向に 32 等分割する. 領域  $\Omega_1$ ,  $\Omega_3$  のトレフツ要素ならびに SS 法のパラメータを Fig.3 の三層誘電体スラブ導波路と同じ設定とし, 計算した結果を Table 2 に示す. また, 求めた固有値の複素平面上の分布を Fig.5 に示す. 求める解は, TE 波ならびに TM 波に対応する  $\gamma p = 5.70243 - j0.03545$ ,  $\gamma p = 5.40284 - j0.33514$  の 2 つである (4, 9). この求める 2 つの解は, いずれの円でも正しく求められており, 円 7 と円 8 ( $N_s = 64$ ) の  $[T(\hat{\lambda}_i p)]$  の条件数は  $10^{13}$  以上と十分大きくなっている. その他の解, すなわち円 7 での 5 個, 円 8 と円 9 での 6 個の解は, Fig.5 から値が異なっていることがわかり, また  $\hat{\lambda}_i p$  に対応する条件数も  $10^4$  程度と大きくはなく, SS 法に由来するものと考えられる.

以上の 2 例から,  $M$ ,  $\delta$  の設定によって  $K$  が真の固有値数より大きくなった場合でも, 円の半径を大きくした領域と求解領域で求まる解の移動を調べることで, 移動しない物理的解と SS 法の適用により混入する移動する解の判別が可能であると考えられる.

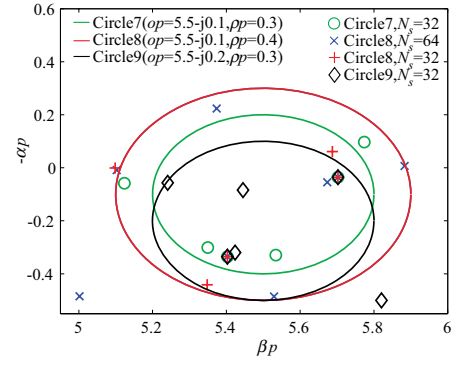


Fig. 5 Distribution of computed eigenvalues of metallic grating on a dielectric slab waveguide in case of  $M = 8$  and  $\delta = 10^{-11}$

## 6. 伝搬定数の収束性

5.1 節で考えた三層誘電体スラブ導波路を考える. ここに導波路構造ならびにトレフツ要素の接続境界の分割を同様とする. 解に大きな影響を与えるのは近似 Hankel 行列の要素値と考えられるので, 積分路の円の形状 (半径  $\rho p$  と中心位置  $op$ ) と数値積分標本点数  $N_s$  の影響を調べる. 残りの SS 法のパラメータは推定固有値数  $M$  と固有値数を判定するパラメータ  $\delta$  である.  $\delta$  の値は, 近似 Hankel 行列の次数  $K$  に関係するため, 線形固有値問題の求解精度に影響を与える.

Fig.6 は, 求めた複素伝搬定数  $\hat{\gamma} p$  の相対誤差  $\left| \frac{\hat{\gamma} p}{\gamma_{ap}} - 1 \right|$  の  $op$  ならびに  $K$  依存性を調べたものである. ここに  $\rho p = 0.4$  とした. また  $\gamma_{ap}$  は, 解析的に求めた厳密解である. TE<sub>0</sub> モードの  $K = 1$  の場合には, 標本点数が 60 以下と少ない場合に解の精度の円の中心位置  $op$  依存性は大きい, 他方同じ TE<sub>0</sub> モードの  $K = 2$  の場合と TM<sub>0</sub> モードの  $K = 8$  の場合での中心位置  $op$  依存性は小さい. これは,  $K = 1$  とするために設定する  $\delta$  が  $10^{-5}$  程度となっており, ハンケル行列の線形固有値問題の次元数を不適切に小さく置き換えたためと考えられる. これは, TM<sub>0</sub> モードの場合の  $K = 4$  の場合にも起きており, この場合には円の位置  $op$  により収束値が異なっている. この結果は, 物理的な解の個数  $m$  を  $K$  に設定するよりも, 小さな値  $\delta$  から  $K$  を決定して線形固有値問題を解き, SS 法により混入する解を除去する方が解の精度の点からは望ましいことを示唆している. TE<sub>0</sub> モードの  $K = 2, 4, 8$ , TM<sub>0</sub> モードの  $K = 8, 12$  の場合に, 標本点数  $N_s$  が 20 程度の小さいところで不規則な振動がみられるが,  $N_s$  が 30 程度と大きくなると, どちらのモードの伝搬定数も一定値に収束していることがわかる. 解が一定値となり厳密解に近付かないのは, トレフツ要素の接続境界の分割数  $D = 32$  と空間高調波展開の打ち切り次数  $M_c = 32$  を一定値としているためである.

次に, この三層誘電体スラブ導波路の HTFEM 解析でトレフツ要素の接続境界の分割数  $D$  ならびに空間高調波展開の打ち切り次数  $M_c$  を変え, 求まる伝搬定数の相対誤差のトレフツ要素の接続境界の分割数依存性を調べる. SS 法の

Table 1 Eigenvalues  $\hat{\lambda}_{lp}$  and condition number  $C([T(\hat{\lambda}_{lp})])$  in eq.(3) of a three layer dielectric slab waveguide

(a) TM<sub>0</sub> mode

$l$	Circle1( $op=4.4, \rho p=0.3$ )		Circle2( $op=4.4, \rho p=0.4$ )		Circle3( $op=4.15+j0.1, \rho p=0.3$ )		
	$N_s=32$		$N_s=64$		$N_s=32$		
	$\hat{\lambda}_{lp}$	$C(T[\hat{\lambda}_{lp}])$	$\hat{\lambda}_{lp}$	$C(T[\hat{\lambda}_{lp}])$	$\hat{\lambda}_{lp}$	$C(T[\hat{\lambda}_{lp}])$	
1	4.33021+j0.00000	$2.667 \times 10^9$	4.33021+j0.00000	$8.875 \times 10^7$	4.33021+j0.00000	$2.268 \times 10^7$	$4.052 \times 10^6$
2	3.97835-j0.00039	$2.898 \times 10^4$	3.97827+j0.00000	$1.546 \times 10^7$	3.97828+j0.00000	$6.741 \times 10^6$	$5.224 \times 10^7$
3	4.16801+j0.19025	$1.543 \times 10^2$	4.13004+j0.30175	$1.546 \times 10^2$	4.01621+j0.33791	$1.548 \times 10^2$	$1.558 \times 10^2$
4	4.13399+j0.15044	$1.542 \times 10^2$	4.13366+j0.27615	$1.545 \times 10^2$	4.14498+j0.31048	$1.547 \times 10^2$	$1.552 \times 10^2$
5	4.02895+j0.16155	$1.542 \times 10^2$	4.14358+j0.21831	$1.544 \times 10^2$	4.12204+j0.26928	$1.545 \times 10^2$	$1.547 \times 10^2$
6	4.14690+j0.10923	$1.542 \times 10^2$	4.15754+j0.14733	$1.542 \times 10^2$	4.14046+j0.18374	$1.543 \times 10^2$	$1.544 \times 10^2$
7	4.16534+j0.05466	$1.542 \times 10^2$	4.17189+j0.07512	$1.542 \times 10^2$	4.16208+j0.09478	$1.542 \times 10^2$	$1.542 \times 10^2$
8	4.17810+j0.01533	$1.542 \times 10^2$	4.18023+j0.02057	$1.542 \times 10^2$	4.17799+j0.02596	$1.542 \times 10^2$	$1.542 \times 10^2$

(b) TE<sub>0</sub> mode

$l$	Circle4( $op=6.0, \rho p=0.3$ )		Circle5( $op=6.0, \rho p=0.4$ )		Circle6( $op=5.9, \rho p=0.3$ )			
	$N_s=32$		$N_s=64$		$N_s=32$			
	$\hat{\lambda}_{lp}$	$C(T[\hat{\lambda}_{lp}])$	$\hat{\lambda}_{lp}$	$C(T[\hat{\lambda}_{lp}])$	$\hat{\lambda}_{lp}$	$C(T[\hat{\lambda}_{lp}])$		
1	6.07576+j0.00000	$1.102 \times 10^{13}$	6.07576+j0.00000	$1.088 \times 10^{14}$	6.07576+j0.00000	$1.465 \times 10^{12}$	6.07576+j0.00000	$1.940 \times 10^{13}$
2	6.49059+j0.00002	$1.218 \times 10^6$	6.49059-j0.00000	$6.472 \times 10^7$	6.49059-j0.00000	$1.136 \times 10^{11}$	6.48742-j0.00069	$6.252 \times 10^3$
3	6.36066+j0.00031	$1.834 \times 10^2$	5.64518+j0.01443	$1.545 \times 10^2$	5.44460+j0.01599	$4.272 \times 10^2$	6.41385-j0.29928	$1.550 \times 10^2$
4	5.80848+j0.02111	$1.600 \times 10^2$	-	-	6.13452-j0.11240	$2.153 \times 10^2$	-	-
5	4.79873-j0.00660	$1.544 \times 10^2$	-	-	-	-	-	-

Table 2 Eigenvalues  $\hat{\lambda}_{lp}$  and condition number  $C([T(\hat{\lambda}_{lp})])$  in eq.(3) of metallic grating on a dielectric slab waveguide

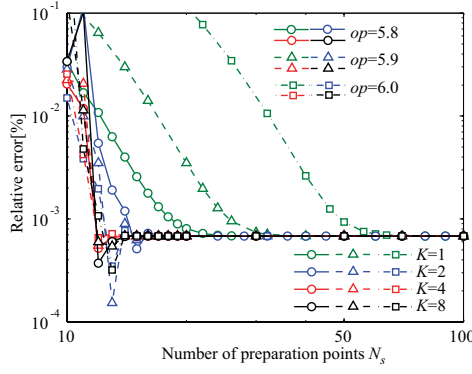
$l$	Circle7( $op=5.5-j0.1, \rho p=0.3$ )		Circle8( $op=5.5-j0.1, \rho p=0.4$ )		Circle9( $op=5.5-j0.2, \rho p=0.3$ )			
	$N_s=32$		$N_s=64$		$N_s=32$			
	$\hat{\lambda}_{lp}$	$C(T[\hat{\lambda}_{lp}])$	$\hat{\lambda}_{lp}$	$C(T[\hat{\lambda}_{lp}])$	$\hat{\lambda}_{lp}$	$C(T[\hat{\lambda}_{lp}])$		
1	5.40284-j0.33514	$1.993 \times 10^{16}$	5.40284-j0.33514	$7.196 \times 10^{16}$	5.40284-j0.33514	$1.990 \times 10^{16}$	5.40284-j0.33514	$8.800 \times 10^{16}$
2	5.70243-j0.03545	$5.539 \times 10^{14}$	5.70243-j0.03545	$8.000 \times 10^{13}$	5.70243-j0.03545	$2.238 \times 10^{14}$	5.70243-j0.03545	$5.018 \times 10^{14}$
3	5.34973-j0.30079	$3.093 \times 10^4$	5.10266-j0.00893	$1.366 \times 10^4$	5.34785-j0.44106	$1.629 \times 10^4$	5.42371-j0.31973	$7.477 \times 10^4$
4	5.53415-j0.32942	$1.469 \times 10^4$	5.37354+j0.22353	$1.366 \times 10^4$	5.09843-j0.00086	$1.366 \times 10^4$	5.44507-j0.08417	$1.366 \times 10^4$
5	5.12355-j0.05814	$1.366 \times 10^4$	5.67347-j0.05446	$1.366 \times 10^4$	6.97366-j0.16473	$1.366 \times 10^4$	5.24100-j0.05698	$1.366 \times 10^4$
6	5.77381+j0.09689	$1.366 \times 10^4$	5.00209-j0.48473	$1.366 \times 10^4$	5.68743+j0.06103	$1.366 \times 10^4$	5.96372+j0.86781	$1.366 \times 10^4$
7	3.60659-j0.16208	$1.366 \times 10^4$	5.88296+j0.00694	$1.366 \times 10^4$	4.10983+j0.07105	$1.366 \times 10^4$	4.65607-j0.09855	$1.366 \times 10^4$
8	-	-	5.52906-j0.48525	$1.366 \times 10^4$	7.05048+j0.97921	$1.366 \times 10^4$	5.82036-j0.49987	$1.366 \times 10^4$

ラメータを  $\rho p = 0.4$ ,  $M = 8$  と設定して, 複素伝搬定数  $\hat{\gamma}_p$  の相対誤差  $|\frac{\hat{\gamma}_p}{\gamma_{ap}} - 1|$  を調べたものを Fig.7 に示す. Fig.7(a) に示す TE<sub>0</sub> モードでは, 積分路の円の中心を  $op = 6.0$ ,  $\delta$  は  $K = 1, 8$  となるようにしており, Fig.7(b) に示す TM<sub>0</sub> モードでは  $op = 4.4$ ,  $\delta$  は  $K = 8, 12$  となるように設定した. Fig.6 に示した収束していない解に当たる不適切な  $K$  と  $N_s$  の組に対応する TE<sub>0</sub> モードの  $K = 1, N_s = 32$  の場合と TM<sub>0</sub> モードの  $K = 8, N_s = 16$  の場合には, トレフツ要素の接続境界の分割数  $D$  あるいは空間高調波展開の打ち切り次数  $M_c$  を増やしても図示した範囲からは, 解は厳密解に収束しないと考えられる. 他方, Fig.6 の収束値を与える適切な  $K$  と  $N_s$  の組では, TE<sub>0</sub> モード, TM<sub>0</sub> モードともに  $M_c$  が  $D$  と同じ

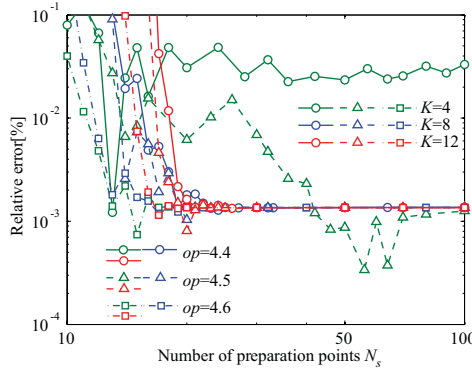
場合に誤差が最も少なく, いずれの  $M_c$  でも  $D$  が大きくなると誤差が減少している.  $M_c = D$  の場合の誤差は, この図示した4点で直線近似すると, TE, TM モードでそれぞれ, およそ分割数  $D$  の 3.0 乗, 2.9 乗で収束していることがわかる.

## 7. むすび

本論文では, 三層誘電体スラブ導波路, 周期的に完全導体を装荷した漏洩誘電体スラブ導波路を例に SS 法を用いた HTFEM より求まる解の判別方法を検討した. また求まる固有値の収束性を調べた. SS 法に起因して混入する解は, HTFEM から導かれる非線形固有値問題の係数行列の条件数の大きさと積分路の変更による解の変化により, 求める物理



(a) TE<sub>0</sub> mode



(b) TM<sub>0</sub> mode

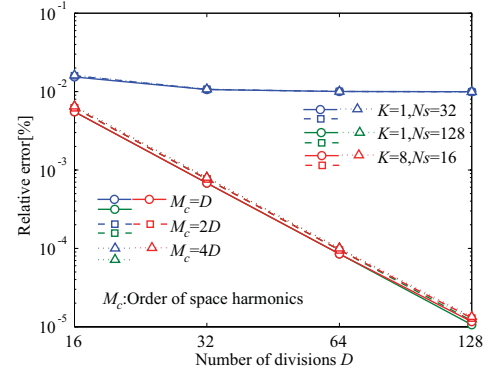
Fig. 6 Dependence of relative error of the propagation constant  $\gamma p$  on number of preparation points  $N_s$  for  $\rho p = 0.4$

的な解と判別可能であることを確認した。また、本 HTFEM 解析法により求めた伝搬定数の誤差は、分割数と空間高調波展開の打ち切り次数を増やすと単調に減少することを確認した。

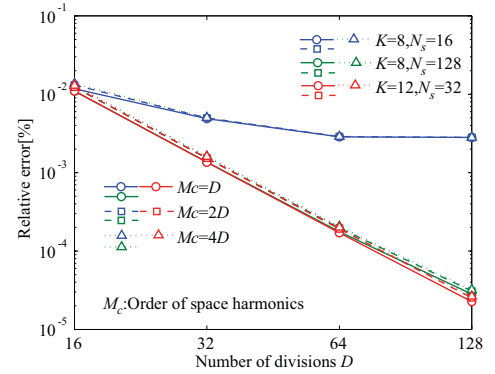
今後は、SS 法により解が混入する原因の検討を行い、除去方法を確立する必要がある。

#### 参考文献

- (1) A.P. Zielinski and O.C. Zienkiewicz : Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **21**(1985), pp. 509–528.
- (2) Q.-H. Qin : *The Trefftz Finite and Boundary Element Method*, (2000), WIT Press.
- (3) O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.Z. Zhu : *The Finite Element Method Its Basis & Fundamentals 6th Edition*, (2005), Butterworth-Heinemann.
- (4) 森田好人, 嶋田賢男, 長谷川弘治, 佐藤慎悟 : 開放型電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッド・トレフツ有限要素解析法, *計算数理工学論文集*, **10**(2010), pp. 87–92.



(a) TE<sub>0</sub> mode



(b) TM<sub>0</sub> mode

Fig. 7 Dependence of relative error of the propagation constant  $\gamma p$  on number of divisions  $D$  and the highest order of space harmonic expansion  $M_c$

- (5) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura : A numerical method for polynomial eigenvalue problems using contour integral, *Tech. Report Department Comput. Sci. Univ. Tsukuba*, **CS-TR-08-15**(2008).
- (6) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura : A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, *Jpn. SIAM Lett.*, **1**(2009), pp. 52–55.
- (7) T. Ikegami, T. Sakurai and U. Nagashima : A filter diagonalization for generalized eigenvalue problems based on the Sakurai-Sugiura projection method, *J. Comput. Appl. Math.*, **233**(2009), pp. 1927–1936.
- (8) X.Q. Sheng and S. Xu : An efficient high-order mixed-edge rectangular element method for lossy anisotropic dielectric waveguides, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, **45**(1997), pp. 1009–1013.
- (9) M. Matsumoto, M. Tsutsumi and N. Kumagai : Radiation characteristics of a dielectric slab waveguide periodically loaded with thick metal strips, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, **MTT-35**(1987), pp. 89–95.