

3次元動弾性学の周期多重極法における Calderonの式に基づく前処理について

PRECONDITIONING BASED ON CALDERON'S FORMULAE FOR THE PERIODIC FMM FOR ELASTODYNAMICS IN 3D

飯盛 浩司¹⁾, 新納 和樹²⁾, 吉川 仁³⁾, 西村 直志⁴⁾

Hiroshi ISAKARI, Kazuki NIINO, Hitoshi YOSHIKAWA and Naoshi NISHIMURA

- 1) 京都大学大学院工学研究科 (〒 615-8540 京都市西京区京都大学桂 C, E-mail: isakari@basewall.kuciv.kyoto-u.ac.jp)
 2) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: niino@i.acs.kyoto-u.ac.jp)
 3) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: yoshikawa.hitoshi.5u@kyoto-u.ac.jp)
 4) 京都大学大学院情報学研究科 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: nchml@i.kyoto-u.ac.jp)

Preconditioning based on Calderon's formulae for the periodic FMM for elastodynamics in 3D is investigated. Two different formulations are proposed. The first one is a preconditioning by just appropriately ordering the coefficient matrix without multiplying the preconditioner. The second one uses the preconditioner constructed using the matrices which are also used in the FMM algorithm. We also make several numerical experiments with proposed preconditioners. Through the numerical results, we confirm the efficiency of the proposed methods. We also conclude that the preconditioning by just ordering the coefficient matrix is faster in respect to the computational time than other preconditioning methods discussed in this article.

Key Words: FMM, BIEM, Periodic Boundary Value Problem, Preconditioning

1. 研究背景・目的

境界積分方程式法(境界要素法)は、偏微分方程式の境界値問題の数値解法の一つである。境界積分方程式法は領域の境界のみを離散化すればよいという特徴を有し、無限遠における放射条件を自然に取り扱うことができるため、波動散乱問題の非常に有効な数値解法である⁽¹⁾。得られる係数行列が一般には密行列となることから、素朴な計算を行うとその計算コストが未知数 N に対して $O(N^2)$ となり、大規模問題には不向きであるとされてきた。しかしながら、高速多重極法⁽²⁾⁽³⁾と組み合わせることにより計算コストの軽減が可能となり、波動散乱問題の実用的な解法として発展しつつある。

近年、著者らのグループでは、高速多重極法の周期波動散乱問題への適用を試みている(周期多重極法)。周期波動散乱問題に対しても、高速多重極法は有効な解法であることがスカラー波動問題⁽⁴⁾、電磁波動問題⁽⁵⁾、弾性波動問題⁽⁶⁾等を扱ったこれまでの研究で明らかになってきた。周期構造に起因して特異な挙動を示す新しい材料として、フォトニック結晶、メタマテリアル等の光学材料やフォノン結晶などの

弾性波デバイス等を挙げるができる。周期多重極法はこういった材料の設計ツールとして有力な手法の一つである。

しかしながら、高速多重極法では、線形方程式のソルバーに反復法を用いることが必須であるため、その反復回数に解法全体の計算コストは大きく依存する。特に、周期波動問題を考える際には、Woodのanomaly周辺において反復法の反復回数が増大することが指摘されており⁽⁷⁾、反復回数を少なく抑えることが重要である。

線形方程式の反復法の反復回数を減らす手法として前処理を挙げるができる。前処理は様々な分野で研究が行われているが、境界積分方程式法で取り扱う線形方程式に非常に有効な前処理として、Calderonの式に基づく前処理が提案されている⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。新納 & 西村により、Calderonの式に基づく前処理はHelmholtz方程式における周期多重極法においても有効であることが示された⁽¹¹⁾。また、新納 & 西村⁽¹¹⁾はAntoine & Boubendir⁽¹⁰⁾の行列の並びが不適切であることを指摘し、適切な配置の行列を用いることでAntoine & Boubendirによる手法を改良した。本研究では、3次元動弾性学の周期多重極法におけるCalderonの式に基づく前処理の開発を行う。

2010年10月4日受付, 2010年11月2日受理

[†]Dedicated to the memory of Prof. Masataka TANAKA

2. 定式化

2.1. 3次元動弾性学の周期境界値問題

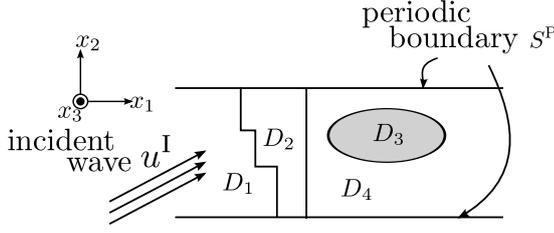


Fig. 1 Periodic boundary value problems

解析領域 D を

$$D = ((-\infty, \infty) \otimes [-\zeta_2/2, \zeta_2/2] \otimes [-\zeta_3/2, \zeta_3/2]) \quad (1)$$

とする。すなわち、本論文では二重周期問題を考え、 x_2 方向の周期は ζ_2 、 x_3 方向の周期は ζ_3 とする。Fig. 1 に示すように $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_N$ であるとする。領域 D に入射波 \mathbf{u}^I を入射する問題を考える。この時、各々の領域 D_m で変位 u_i は次の Navier-Cauchy の式を満たす。

$$\mu^{(m)} u_{i,jj} + (\lambda^{(m)} + \mu^{(m)}) u_{j,ij} + \rho^{(m)} \omega^2 u_i = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\rho^{(m)}$ は領域 D_m を構成する材料の密度、 $\lambda^{(m)}$ 、 $\mu^{(m)}$ は Lamé 定数であり、これを用いて弾性テンソル $C_{ijpq}^{(m)}$ は次のように定義される。

$$C_{ijpq}^{(m)} = \lambda^{(m)} \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu^{(m)} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp})$$

また、 ω は周波数である。

境界条件は $\partial D_k \cap \partial D_m$ (∂D_i は領域 D_i の境界) において、変位 u_i 及びトラクション $t_i = C_{ijpq}^{(m)} u_{p,q} n_j$ が連続であるとする。ここに、 n_j は $\partial D_k \cap \partial D_m$ 上の単位法線ベクトルである。さらに、散乱場に対し、無限遠において放射条件を課すものとする。

また、周期境界 S^P 上では以下のような周期境界条件が課されているとする。

$$X_i(x_1, \frac{\zeta_2}{2}, x_3) = e^{i\beta_2} X_i(x_1, -\frac{\zeta_2}{2}, x_3) \quad (3)$$

$$X_i(x_1, x_2, \frac{\zeta_3}{2}) = e^{i\beta_3} X_i(x_1, x_2, -\frac{\zeta_3}{2}) \quad (4)$$

ここに、 X_i は変位及びその勾配である。また、 $\beta_i = k_{L,T} p_i \zeta_i$ は位相差である (ここでは添字 i に対しては総和規約を用いないことに注意する)。ここに $k_{L,T}$ は入射波 \mathbf{u}^I の波数であり、添字 L,T は各々縦波、横波を表す。また、 \mathbf{p} は入射波 \mathbf{u}^I の伝播方向を表す単位ベクトルである。以降、簡単のため領域 D は D_1 、 D_2 の 2 領域からなるものとする。

2.2. 境界積分方程式

前小節の周期境界値問題に対応する境界積分方程式は以下のように書ける。

$$\begin{pmatrix} -(S^{(1)} + S^{(2)}) & (D^{(1)} + D^{(2)}) \\ -(D^{*(1)} + D^{*(2)}) & (N^{(1)} + N^{(2)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^I \\ \mathbf{t}^I \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここに、 \mathbf{u}^I 、 \mathbf{t}^I は入射波およびそれに対応するトラクションである。また、 $S^{(m)}$ 、 $D^{(m)}$ 、 $D^{*(m)}$ 、 $N^{(m)}$ は次式で表される積分作用素である (m は領域番号を表す)。

$$(S^{(m)} \mathbf{v})_i = \int_{\partial D} \Gamma_{ij}^{P(m)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v_j(y) dS_y \quad (6)$$

$$(D^{(m)} \mathbf{v})_i = \text{v.p.} \int_{\partial D} \Gamma_{Iij}^{P(m)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_j(y) dS_y \quad (7)$$

$$(D^{*(m)} \mathbf{v})_i = \text{v.p.} \int_{\partial D} T_{ij}^{(m)} \Gamma_{jk}^{P(m)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v_k(y) dS_y \quad (8)$$

$$(N^{(m)} \mathbf{v})_i = \text{p.f.} \int_{\partial D} T_{ij}^{(m)} \Gamma_{Ijk}^{P(m)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) v_k(y) dS_y \quad (9)$$

ここに、v.p. は主値、p.f. は発散積分の有限部分を表し、 $T_{ij}^{(m)} = C_{ipjq}^{(m)} n_p \partial_q$ である。 $\Gamma_{ij}^{P(m)}$ 、 $\Gamma_{Iij}^{P(m)}$ は周期境界条件を満たす Green 関数および二重層核である。

周期多重極法は境界積分方程式 (5) に表れる積分 (6)~(9) を高速に計算する手法である。したがって、積分方程式を離散化して得られる代数方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ のソルバーに $A\mathbf{x}$ の計算を使う反復解法を用いることが不可欠である。紙面の制約のため、周期多重極法の定式化及びアルゴリズムについてはここでは省略する。Otani & Nishimura⁽⁵⁾、飯盛ら⁽⁶⁾ を参照されたい。なお、本論文では低周波多重極法を用いる。

2.3. Calderon の式とそれに基づく前処理

\mathcal{I} を恒等写像とすると、積分作用素 (6)~(9) について、次の Calderon の式が成立する。

$$\frac{\mathcal{I}}{4} = -S^{(m)} N^{(m)} + D^{(m)} D^{(m)} \quad (10)$$

$$0 = S^{(m)} D^{*(m)} - D^{(m)} S^{(m)} \quad (11)$$

$$\frac{\mathcal{I}}{4} = D^{*(m)} D^{*(m)} - N^{(m)} S^{(m)} \quad (12)$$

$$0 = -D^{*(m)} N^{(m)} + N^{(m)} D^{(m)} \quad (13)$$

Calderon の式は次のように書き換えることができる。

$$\begin{pmatrix} D^{(m)} & -S^{(m)} \\ N^{(m)} & -D^{*(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{(m)} & -S^{(m)} \\ N^{(m)} & -D^{*(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{I}}{4} & 0 \\ 0 & \frac{\mathcal{I}}{4} \end{pmatrix} \quad (14)$$

したがって、式 (5) と等価な積分方程式

$$\begin{pmatrix} D^{(1)} + D^{(2)} & -(S^{(1)} + S^{(2)}) \\ N^{(1)} + N^{(2)} & -(D^{*(1)} + D^{*(2)}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^I \\ \mathbf{t}^I \end{pmatrix} \quad (15)$$

を選点法で離散化して得られる線型方程式の係数行列 A は、領域 1、2 の材料定数が全て等しいとき、係数行列が自身の逆行列となっている。以降では、領域 1、2 の材料定数が異なる場合に、係数行列自身が有効な前処理行列となっているか検証を行う。

2.3.1. $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$ の場合

$\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$ の場合には、各作用素の主シンボル⁽¹²⁾を用いて計算することにより、

$$A^2 = cI + K \quad (16)$$

となることを示すことができる。ここに、 I は単位行列、 K はコンパクト作用素を離散化して得られる行列、 c は Lamé 定数によって決まる定数である。したがって、 A^2 を離散化す

る前の作用素の固有値の集積点は c のみとなり、係数行列自身を前処理行列として用いることで反復回数の減少が期待される。本論文では、係数行列自身を前処理行列とする前処理を「 A^2 型前処理」と呼ぶことにする。

さらに、GMRES⁽¹³⁾ 等の Krylov 部分空間法を用いる場合、一旦式 (15) のように係数行列を並び替えると、前処理行列を乗じず、前処理無しでそのまま GMRES を実行したほうが速く収束することを示すことができる⁽¹¹⁾。すなわち、係数行列 A を適切に並び替えることが非常に有効な「前処理」となっていると考えることができる。本論文では、係数行列を式 (15) のように並び替える前処理を「 A 型前処理」と呼ぶことにする。「 A 型前処理」が「 A^2 型前処理」よりも計算時間に関して速く収束することは、次のようにして理解することができる。GMRES は毎反復ごとに Krylov 部分空間

$$\text{span}\{\mathbf{r}, M^{-1}A\mathbf{r}, (M^{-1}A)^2\mathbf{r}, \dots, (M^{-1}A)^{n-1}\mathbf{r}\} \quad (17)$$

で残差を最小化する手法である (左前処理の場合、 \mathbf{r} は初期残差であり、 $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ 、 \mathbf{x}_0 は初期残差、 M は前処理行列)。ここで、 $2n$ 回行列ベクトル積演算後の「 A 型前処理」及び「 A^2 型前処理」の Krylov 部分空間 $\mathcal{K}(A)_{2n}$ 、 $\mathcal{K}(A^2)_n$ は各々 (同一回数行列ベクトル積演算後に反復回数異なることに注意する)、

$$\mathcal{K}(A)_{2n} = \text{span}\{\mathbf{r}, A\mathbf{r}, A^2\mathbf{r}, \dots, A^{2n-2}\mathbf{r}, A^{2n-1}\mathbf{r}\} \quad (18)$$

$$\mathcal{K}(A^2)_n = \text{span}\{\mathbf{r}, A^2\mathbf{r}, \dots, A^{2n-1}\mathbf{r}\} \quad (19)$$

となり、 $\mathcal{K}(A)_{2n} \supset \mathcal{K}(A^2)_n$ であることが分かる。したがって、同一回数の行列ベクトル積演算を行えば、「 A 型前処理」を用いた場合は「 A^2 型前処理」を用いた場合に比べ、より広い空間から解を探すことができる。したがって、同一許容誤差に対しては、「 A 型前処理」を用いると「 A^2 型前処理」よりも必ず速く収束することが分かる。

2.3.2. $\mu^{(1)} \neq \mu^{(2)}$ の場合

$\mu^{(1)} \neq \mu^{(2)}$ の場合には、 $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$ の場合と異なり、式 (16) は成り立たず、

$$A^2 = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix} + K \quad (20)$$

となることが主シンボルを用いた計算により示される。ここに、 A' 、 A'' は特異作用素を離散化して得られる行列、 K はコンパクト作用素を離散化して得られる行列である。したがって、 $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$ の場合と比べると、係数行列自身が有効な前処理行列となっていない可能性がある。しかしながら、式 (20) の特異部分の固有値は Lamé 定数によって決まる 2 つの定数 c_1 、 c_2 のいずれかであることを示すことができる。すなわち、 A^2 を離散化する前の作用素の固有値の集積点は c_1 、 c_2 の 2 つのみとなる。したがって、「 A 型前処理」及び「 A^2 型前処理」は $\mu_1 \neq \mu_2$ の場合にも、有効な前処理であることが分かる。

また、式 (20) の A' 、 A'' の影響を取り除くような前処理行列を考えることもできる。式 (20) の右辺第一項は block

diagonal な行列であるから、同様の構造の行列によってその特異性を除去することができると考えられる。すなわち、

$$A^2M = cI + K \quad (21)$$

を (c は Lamé 定数によって決まる定数) 満たすような

$$M = \begin{pmatrix} M' & 0 \\ 0 & M'' \end{pmatrix} \quad (22)$$

を構成することを考える。多重極法で用いる作用素を離散化して得られる行列を用いて構成できる行列

$$M' = I + c(D^{(1)} + D^{(2)})(D^{(1)} + D^{(2)}) \quad (23)$$

$$M'' = I + c(D^{*(1)} + D^{*(2)})(D^{*(1)} + D^{*(2)}) \quad (24)$$

が、式 (22) を満たすことを示すことができる。ここに、 c は Lamé 定数によって決まる定数である。また、 $D^{(m)}$ 、 $D^{*(m)}$ は各々式 (7)、式 (8) を選点法で離散化して得られる影響係数である。しかしながら、このように構成した M は見かけの固有値に相当する周波数において非正則となる可能性があるため、次のように修正する。

$$\tilde{M}' = I + c(\tilde{D}^{(1)} + \tilde{D}^{(2)})(\tilde{D}^{(1)} + \tilde{D}^{(2)}) \quad (25)$$

$$\tilde{M}'' = I + c(\tilde{D}^{*(1)} + \tilde{D}^{*(2)})(\tilde{D}^{*(1)} + \tilde{D}^{*(2)}) \quad (26)$$

$\tilde{D}^{(m)}$ 、 $\tilde{D}^{*(m)}$ は $D^{(m)}$ 、 $D^{*(m)}$ の static の極限であり、見かけの固有値問題が問題とならないような十分周波数の低いもので代用してもよい。このような \tilde{M} に対しても式 (21) は成立する。さらに、 \tilde{M} とベクトルとの積は多重極法を用いて高速に計算することができる。したがって、以上のようにして構成した \tilde{M} を用いると $A\tilde{M}$ が有効な右前処理行列となる。ここではこの前処理を「 A^2M 型前処理」と呼ぶことにする。

3. 数値実験

本節では、2.3 節で示した並び替えによる前処理の効果を数値実験により検証する。取り扱った解析モデルは Fig. 2、Fig. 3 に示すとおり、球形の散乱体が平面 2 重周期的に配置された領域に、平面波を入射する問題である。

また、すべての解析において、選点法、一定要素を用いて積分方程式の離散化を行った。離散化に際してはユニットセル (周期の繰り返し単位 1 つを含む長方形領域) 内の介在物の球面 ∂D を $N = 18000$ 分割した。したがって、問題の全体の自由度は 108000DOF である。

3.1. $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$ の場合

まずはじめに、 $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$ の場合について、 A 型、 A^2 型前処理の性能を評価する。ここでは前処理として、前節に示した Calderon の式に基づく前処理 (A 型、 A^2 型) と、前処理行列として多重極法の直接計算部分を全て用いる前処理 (従来法) の計 3 種類の前処理について、次の 2 つのケースについて反復回数及び計算時間の比較を行った。いずれの前処理を用いた場合も、収束判定条件は 10^{-5} とした。なお、従来法を用いる場合、係数行列 A は式 (5) を離散化して得られる

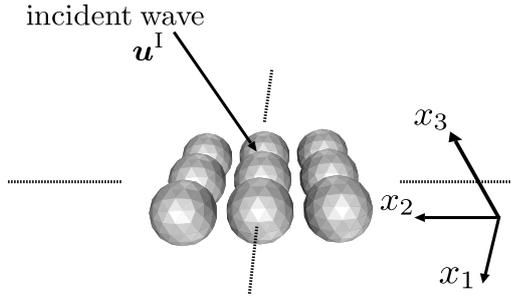


Fig. 2 Analyzed domain

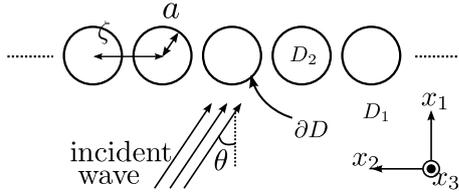


Fig. 3 Analyzed domain

行列を用い、前処理行列の逆は GMRES を用いて近似的に作用させた (Flexible GMRES⁽¹³⁾)。その収束判定条件は 10^{-1} とし、収束条件を満たすか、あるいは反復回数が 10 回に達するかのいずれかの場合に反復計算を打ち切った。

1. 介在物の Lamé 定数 $\lambda^{(2)}$ が変化した場合 (ケース 1)
2. 介在物の密度 $\rho^{(2)}$ が変化した場合 (ケース 2)

なお、入射波は P 波、入射角は 0° 、周波数 ω は 8.0 とし、周期長 $\zeta_2 = \zeta_3 = 2.0 (= \zeta とおく)$ 、内部介在球の半径を $a = 0.31\zeta$ とした。

まず、ケース 1 の場合について、 $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = 1.0$ 、さらに外部領域の $\lambda^{(1)}$ を $\lambda^{(1)} = 1.0$ 、外部領域、内部介在物の密度を $\rho^{(1)} = \rho^{(2)} = 1.0$ で固定し、内部介在物の $\lambda^{(2)}$ を 0.1 から 10.0 まで変化させて解析を行った。Fig. 4 に各々の手法を用いた場合の反復回数を、Fig. 5 に各々の手法を用いた場合の計算時間を示す。従来法を用いた場合に比べて計算時間が大幅に短縮されていることが見てとれる。Calderon に基づく 2 つの手法を比べるため、Fig. 4、Fig. 5 を拡大した図を Fig. 6、Fig. 7 に各々示す。「 A^2 型前処理」の方が「 A 型前処理」よりも少ない反復回数で収束しているが、「 A^2 型前処理」では 1 回反復毎に 2 回の行列ベクトル積演算が必要になるため、計算時間を比べると「 A 型前処理」の方が必ず速く収束していることが分かる。

次に、ケース 2 の場合について、すべての Lamé 定数を 1.0、外部領域の密度を $\rho^{(1)} = 1.0$ で固定し、内部介在物の密度 $\rho^{(2)}$ を 0.1 から 3.0 まで変化させて解析を行った。Fig. 8、Fig. 9、Fig. 10、Fig. 11 にケース 1 の場合の Fig. 4、Fig. 5、Fig. 6、Fig. 7 に相当するグラフを示す。ケース 2 の場合についても、ケース 1 の場合と同様に、Calderon の式に基づく 2 種類の前処理は従来法に比べ著しく収束速度が改善すること、「 A^2 型前処理」に比べ「 A 型前処理」は必ず少ない

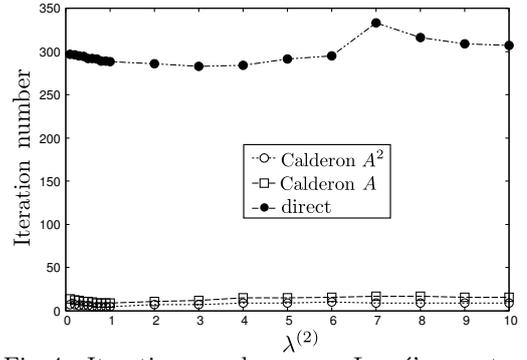


Fig. 4 Iteration number v.s. Lamé's constant $\lambda^{(2)}$ of the inclusion in the case of $\omega = 8.0$, $a = 0.31\zeta$.

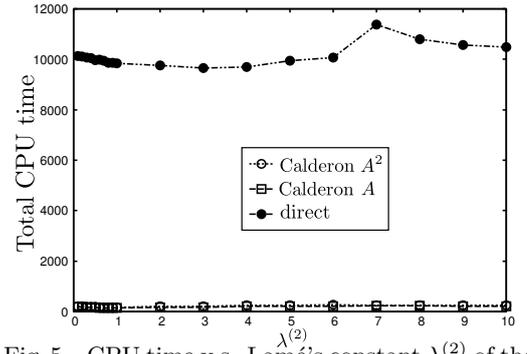


Fig. 5 CPU time v.s. Lamé's constant $\lambda^{(2)}$ of the inclusion in the case of $\omega = 8.0$, $a = 0.31\zeta$.

計算時間で収束することが分かる。

3.2. $\mu^{(1)} \neq \mu^{(2)}$ の場合

次に、 $\mu^{(1)} \neq \mu^{(2)}$ の場合について、提案手法の性能を評価する。ここでは前処理として前節に示した Calderon の式に基づく前処理と前処理行列として多重極法の直接計算部分を全て用いる前処理 (従来法) について、反復回数及び計算時間の比較を行った。従来法は前節で用いたものと同じ条件により計算を行った。

解析に用いた材料定数は適当に無次元化を施し、Table 1 に示すものを用いた。ここでは内部介在物として鉄、外部領域としてポリエステルを想定している。周期長は $\zeta_2 = \zeta_3 = 2.0 (= \zeta とおく)$ とし、 $a = 0.15\zeta$ 、 0.31ζ の場合について解析を行った。入射波は平面 P 波とし、入射角は $\theta = 0^\circ$ とした。周波数を 0.0 から 8.2 まで 0.1 毎に変化させ解析を実行した。

Table 1 Material parameters used in analyses

	Inclusion (steel)	Exterior matrix (polyester)
Density ρ	6.393	1.000
Lamé's constant λ	1.496	2.453
Lamé's constant μ	47.02	1.000

$a = 0.15\zeta$ の場合の反復回数、計算時間を Fig. 12、Fig. 13

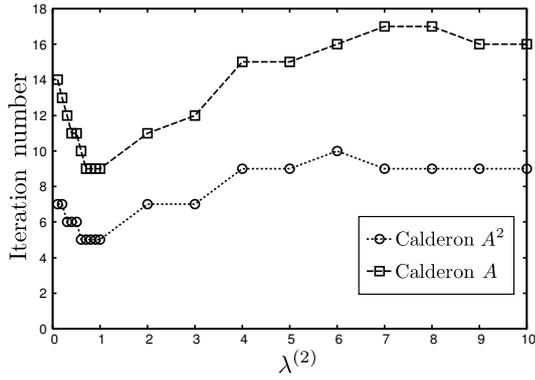


Fig. 6 Iteration number v.s. Lamé's constant $\lambda^{(2)}$ of the inclusion in the case of $\omega = 8.0$, $a = 0.31\zeta$.

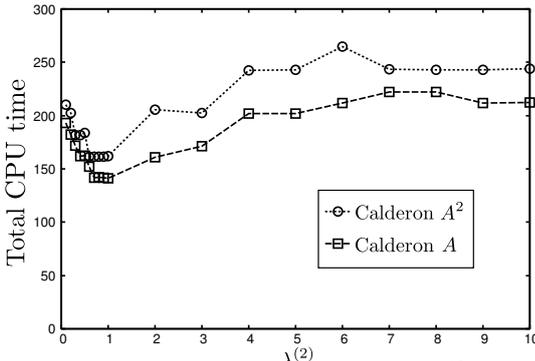


Fig. 7 CPU time v.s. Lamé's constant $\lambda^{(2)}$ of the inclusion in the case of $\omega = 8.0$, $a = 0.31\zeta$.

に、 $a = 0.31\zeta$ の場合の反復回数、計算時間を Fig. 14、Fig. 15 に、各々示す。いずれの場合も、従来法に比べて収束速度が著しく改善していることが見てとれる。また、Calderon の式に基づく 3 種類の前処理に注目すると、「 A^2 型前処理」及び「 A^2M 型前処理」の方が「 A 型前処理」よりも少ない反復回数で収束しているが、「 A^2 型前処理」及び「 A^2M 型前処理」では 1 回反復毎に複数回の行列ベクトル積演算が必要になるため、計算時間を比べると「 A 型前処理」の方が必ず速く収束していることが分かる。さらに、「 A^2 型前処理」と「 A^2M 型前処理」の反復回数は同程度である。このことから、式 (20) は特異な項を含んでいるにもかかわらず、十分に性質の良い行列であることが分かる。

4. 結言

従来法に比べて、Calderon の式を考慮した方法では、収束速度が著しく改善することがわかった。特に 2 領域問題について、係数行列自身が逆行列と等しくなるように行列を並び替えるだけで前処理行列を乗ずることなく、収束性を大幅に改善することができることが分かった。

今後の課題としては、Maxwell 方程式を支配方程式とする問題に対して、Calderon の式に基づく前処理を検証すること等が挙げられる。

謝辞 本研究は、科学研究費補助金 (特別研究員奨励費) の補助を受けた。ここに謝意を表す。

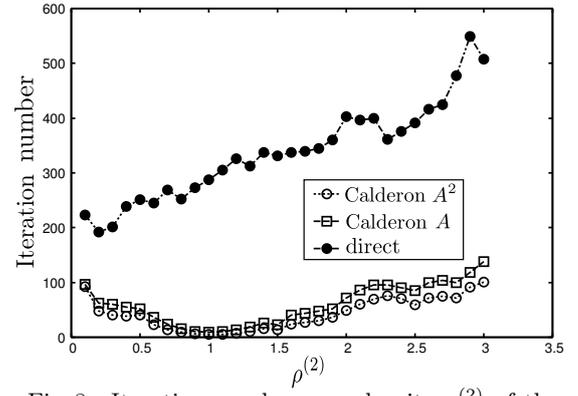


Fig. 8 Iteration number v.s. density $\rho^{(2)}$ of the inclusion in the case of $\omega = 8.0$, $a = 0.31\zeta$.

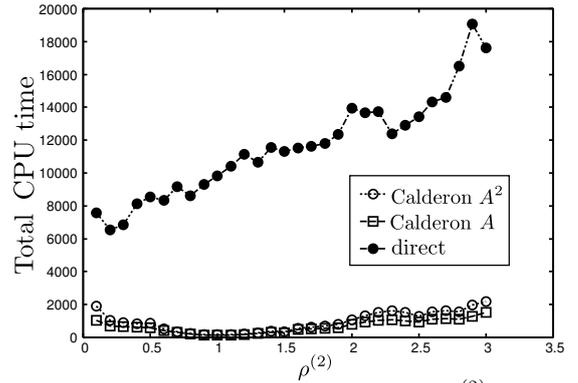


Fig. 9 CPU time v.s. Lamé's density $\rho^{(2)}$ of the inclusion in the case of $\omega = 8.0$, $a = 0.31\zeta$.

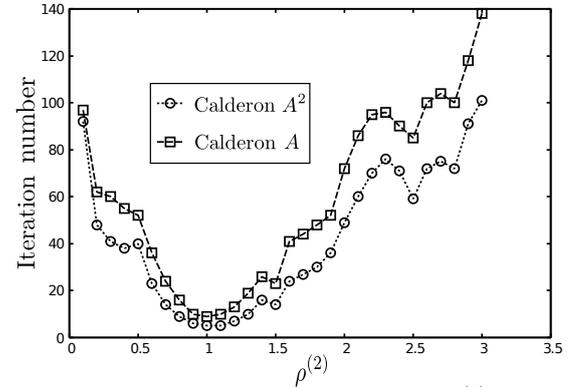


Fig. 10 Iteration number v.s. density $\rho^{(2)}$ of the inclusion in the case of $\omega = 8.0$, $a = 0.31\zeta$.

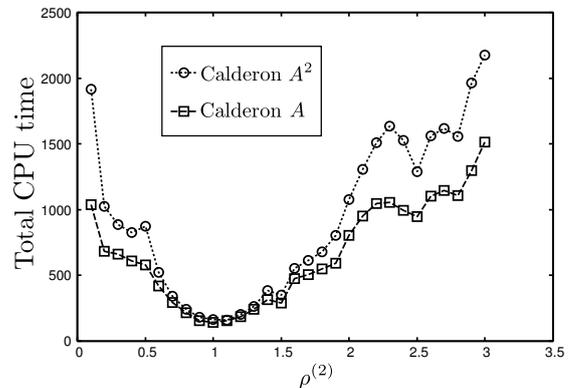


Fig. 11 CPU time v.s. Lamé's density $\rho^{(2)}$ of the inclusion in the case of $\omega = 8.0$, $a = 0.31\zeta$.

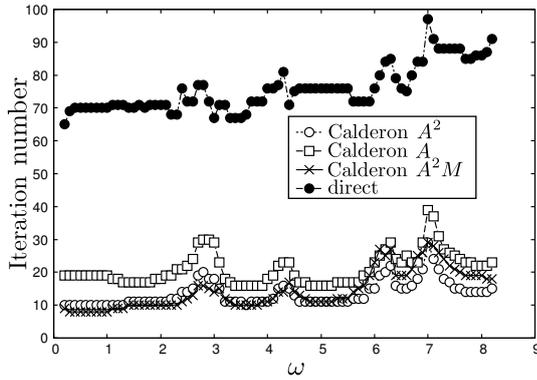


Fig. 12 Iteration number v.s. frequency ω in the case of $a = 0.15\zeta$

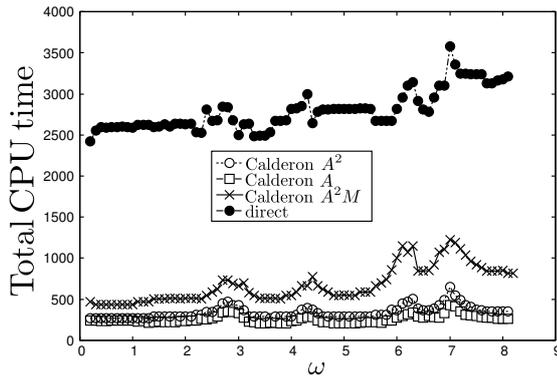


Fig. 13 CPU time v.s. frequency ω in the case of $a = 0.15\zeta$

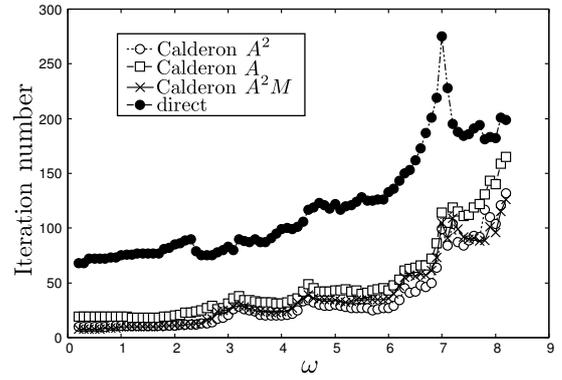


Fig. 14 Iteration number v.s. frequency ω in the case of $a = 0.31\zeta$

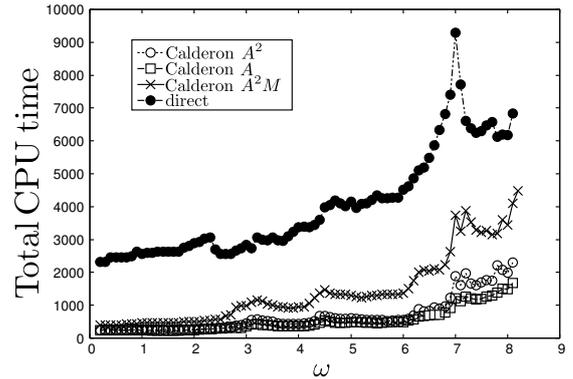


Fig. 15 CPU time v.s. frequency ω in the case of $a = 0.31\zeta$

参考文献

- (1) 小林昭一他. 波動解析と境界要素法. 京都大学学術出版会, 2000.
- (2) Rokhlin V. Rapid solution of intergral equations of classical potential theory. *Journal of Computational Physics*, Vol. 60, pp. 187–207, 1985.
- (3) Nishimura N. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 55, pp. 299–322, 2004.
- (4) Otani Y, Nishimura N. An FMM for periodic boundary value problems for clacs for Helmholtz' equation in 2D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, pp. 381–406, 2007.
- (5) Otani Y, Nishimura N. A periodic FMM for Maxwell's equations in 3D and its applications to problems related to photonic crystals. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 4630–4652, 2008.
- (6) 飯盛浩司, 吉川仁, 西村直志. 3次元動弾性学における周期多重極法とその平面2周期構造による散乱問題への適用. *応用力学論文集*, Vol. 13, pp. 169–178, 8 2010.
- (7) 大谷佳広, 西村直志. Woodの異常回折周辺における周期高速多重極法の挙動について. *計算数理工学論文集*, Vol. 7-2, pp. 303–308, 2008.
- (8) O. Steinbach and WL Wendland. The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method. *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 9, No. 1, pp. 191–216, 1998.
- (9) S.H. Christiansen and J.C. Nédélec. A preconditioner for the electric field integral equation based on Calderon formulas. *SIAM journal on numerical analysis*, Vol. 40, No. 3, pp. 1100–1135, 2003.
- (10) X. Antoine and Y. Boubendir. An integral preconditioner for solving the two-dimensional scattering transmission problem using integral equations. *International Journal of Computer Mathematics*, Vol. 85, No. 10, pp. 1473–1490, 2008.
- (11) 新納和樹, 西村直志. 2次元 Helmholtz 方程式の1周期境界値問題に対する Calderon の式に基づく前処理について. *計算数理工学論文集*, Vol. 9, pp. 1–6, 2009.
- (12) S. Kobayashi and N. Nishimura. Green's tensors for elastic half spaces –An application of boundary integral equation method–. *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ*, pp. 228–241, 1980.
- (13) Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2003.