

埋め込み境界法を用いた Lattice Kinetic スキームによる 非圧縮性粒子系混相流解析

LATTICE KINETIC SCHEME FOR SIMULATION OF INCOMPRESSIBLE PARTICLE-FLUID TWO PHASE FLOWS WITH AN IMMERSED BOUNDARY METHOD

瀬田 剛¹⁾, 金森 拓哉²⁾

Takeshi SETA and Takuya KANAMORI

1) 富山大学大学院理工学研究部 (工学) (〒 930-8555 富山市五福 3190, E-mail: seta@eng.u-toyama.ac.jp)

2) 富山大学工学部機械知能システム工学科 (〒 930-8555 富山市五福 3190, E-mail: s0770423@ems.u-toyama.ac.jp)

We verify the immersed boundary-lattice kinetic scheme (IB-LKS) by simulating different cases; a flow over a circular cylinder, a neutrally buoyant particle migration in a linear shear flow, and sedimentation of circular particles in a viscous fluid. Comparison between the numerical results and those of previous studies demonstrates the validity of the IB-LKS for calculation of vicious incompressible flow with suspended solid particles. The IB-LKS is one solution approach for the problem of the velocity slip that is observed in the cylindrical Couette flow simulation with the Immersed boundary-lattice Boltzmann method.

Key Words : Computational Fluid Dynamics, Lattice Kinetic Scheme, Immersed Boundary Method, Particulate Flows

1. はじめに

格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, LBM)⁽¹⁾ は, 等間隔のデカルト座標上に配置された粒子速度分布関数の運動により Navier Stokes (NS) 方程式が解析される. 近年, デカルト座標上に任意形状の境界を簡単に設定できる埋め込み境界法 (Immersed Boundary Method, IBM)⁽²⁾ を LBM に適用した Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method (IB-LBM) の研究が, 盛んに行われている^(3, 4, 5). しかし, IB-LBM では, クエット流れの計算において, 緩和時間が増加するにつれ境界近傍で流速分布の歪みが発生することが Le により報告された⁽⁶⁾. 一方, LBM が有するメモリ消費量の増大, 境界条件の設定問題などを解決した Lattice Kinetic Scheme (LKS) が稲室⁽⁷⁾ によって提案され, 正方キャピティ内の自然対流解析や, コンクリート内部の細孔構造内での物質移動現象解析⁽⁸⁾ に適用され, その有効性が示されている. LKS で用いられる運動方程式は, LBM に対し緩和時間を $\tau = 1$ とし, 分布関数を修正することで導出される. IB-LBM のクエット流れの計算で流速の歪が生じない条件 $\tau < 2$ を満足でき, 計算メモリを有効に活用できる等の利点が LKS にはある. 本研究では, 弾性係数等のパラメータ設定が不要で

ある Direct forcing method⁽⁹⁾ に基づく埋め込み境界法を用いる.

2. IB-LKS

IBM では, Fig.1 の白丸に示すように構造体の境界面を点の集合体として近似する. この境界上の点に適切な外力 \vec{F} を発生させることにより, NS 方程式は構造体の影響を受ける. Direct forcing method では, NS 方程式,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{g} + \vec{F}, \quad (1)$$

から外力が計算される. ここで, ρ は密度, \vec{u} は流速, p は圧力, \vec{g} は重力, ν は動粘性係数である. 式 (1) から外力は,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 \vec{u} - \vec{g} \\ &= \frac{\vec{u}^{(n+1)} - \vec{u}^{(n)}}{\delta t} - rhs, \end{aligned} \quad (2)$$

のように与えられる. ここで, rhs は,

2010 年 9 月 22 日受付, 2010 年 10 月 20 日受理

†Dedicated to the memory of Prof. Masataka TANAKA

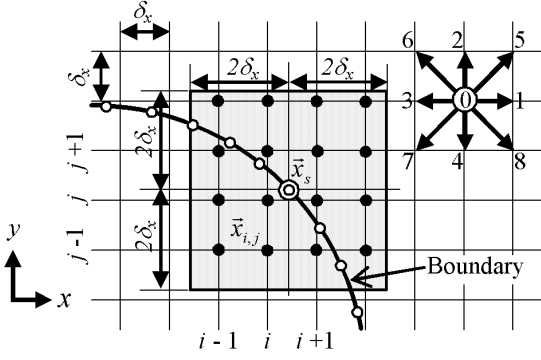


Fig.1 A schematic of the immersed boundary-lattice kinetic scheme.

$$rhs = -(\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 \tilde{u} - \tilde{g}), \quad (3)$$

を表す. Fig.1 の白丸で表される境界上の点 $\vec{x}_s = (x_s, y_s)$ においても, 式 (2) が成り立つことから,

$$\begin{aligned} \vec{F}_s &= \frac{\tilde{u}_s^{(n+1)} - \tilde{u}_s^{(n)}}{\delta t} - rhs_s \\ &= \frac{\tilde{u}_s^{(n+1)} - \tilde{u}_s}{\delta t} + \frac{\tilde{u}_s - \tilde{u}_s^{(n)}}{\delta t} - rhs_s = \frac{\tilde{u}_s^{(n+1)} - \tilde{u}_s}{\delta t}, \quad (4) \end{aligned}$$

となる. ここで, 添え字 s は \vec{x}_s 上の値を表す. \tilde{u}_s は, 外力 $\vec{F} = 0$ とした NS 方程式 (1) を満足する速度である. 時間 $n+1$ において $\tilde{u}^{(n+1)}$ は構造体の速度 \tilde{u}^d に等しいと仮定すると,

$$\vec{F}_s = \frac{\tilde{u}_s^{(n+1)} - \tilde{u}_s}{\delta t} = \frac{\tilde{u}^d - \tilde{u}_s}{\delta t}, \quad (5)$$

が得られる. IBM では, 式 (5) から求められる \vec{x}_s 上の外力 \vec{F}_s を補間し, Fig.1 の黒丸で示されるデカルト座標上の点 $\vec{x}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ における値 $\vec{F}_{i,j}$ を導出する. 補間された $\vec{F}_{i,j}$ を NS 方程式 (1) に代入し, 構造体と流体との連成問題が解かれる. Fig.1 の黒丸で示されたデカルト座標 $\vec{x}_{i,j}$ 上の値は,

$$\vec{F}_{i,j} = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s D(\vec{x}_{i,j} - \vec{x}_s) \cdot \Delta V_s, \quad (6)$$

により導出される. ここで, $D(\vec{x})$ はディラックのデルタ関数を平滑化した関数, N は境界を構成する点の総数, ΔV_s は各点に対する体積 (2次元では面積) を表し, 構造体が半径 R の円の場合 $\Delta V_s = 2\pi R \delta_x / N$ で与えられる. 本論文では, $D(\vec{x})$ に次式を適用する.

$$\begin{aligned} D(\vec{x}_{i,j} - \vec{x}_s) &= \frac{1}{\delta_x^2} \delta_h \left(\frac{x_{i,j} - x_s}{\delta_x} \right) \delta_h \left(\frac{y_{i,j} - y_s}{\delta_x} \right), \quad (7) \\ \delta_h(z) &= \begin{cases} \frac{1}{8} (3 - 2|z| + \sqrt{1 + 4|z| - 4z^2}) & 0 \leq |z| < 1, \\ \frac{1}{8} (5 - 2|z| - \sqrt{-7 + 12|z| - 4z^2}) & 1 \leq |z| < 2, \\ 0 & 2 \leq |z|. \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

式 (7), (8) は, 例えば, 二重丸で示された \vec{x}_s 上の値から, Fig.1 の網掛で示された $2\delta_x \times 2\delta_x$ の領域内に存在する格子点上の外力 $\vec{F}_{i,j}$ を補間する. 式 (5) より, 境界上の外力を求めるためには, 格子点 $\vec{x}_{i,j}$ 上の流速 $\tilde{u}_{i,j}$ から, 境界上の値 \tilde{u}_s を導出する必要がある. この補間に対しても, 式 (7), (8) の関数 $D(\vec{x})$ が用いられる. 境界上の値は,

$$\tilde{u}_s = \sum_{i,j} \tilde{u}_{i,j} D(\vec{x}_{i,j} - \vec{x}_s) \cdot \delta_x^2, \quad (9)$$

により求められる. 式 (9) から得られた \tilde{u}_s を, 式 (5) に代入することで, 境界上の外力が求められる.

構造体の重心に働く外力 \vec{F}_p とトルク \vec{T}_p は,

$$\vec{F}_p = - \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \Delta V_s, \quad (10)$$

$$\vec{T}_p = - \sum_{s=1}^N (\vec{x}_s - \vec{x}_p) \times \vec{F}_s \cdot \Delta V_s, \quad (11)$$

である. ここで, \vec{x}_p は, 粒子の重心位置を表す. 構造体の重心速度 u_p , 重心周りの角速度 ω_p に対する運動方程式は,

$$m_s \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \vec{F}_p + \vec{F}_f + (\rho_s - \rho_f) V_s \vec{g} \quad (12)$$

$$I_s \frac{d\vec{\omega}_p}{dt} = \vec{T}_s + \vec{T}_f, \quad (13)$$

で記述される. ここで, ρ_f は流体の密度, ρ_s は粒子の密度, V_s は粒子の体積 (面積), m_s は粒子の質量, I_s は粒子の慣性モーメント, \vec{F}_f, \vec{T}_f は, それぞれ, 構造体内部の流体による運動量変化とトルクの変化を表す. 半径 R の粒子の体積 (面積) は $V_s = \pi R^2$, 粒子の重さは $m_s = \rho_s \pi R^2$, 慣性モーメントは $I_s = \frac{1}{2} \rho_s \pi R^4$ である. Ladd⁽¹⁰⁾ は粒子の運動方程式を安定に解析する条件,

$$\frac{\rho_s}{\rho_f} > 1 + \frac{10}{R}, \quad (14)$$

を提案した. 式 (14) は, 流体に対する粒子の密度が小さくなった場合, 粒子半径を大きくしなければならないことを意味しており, 密度比が小さい粒子の計算には, 十分な解像度

が必要になる．この問題に対し Feng⁽¹²⁾ は，

$$\vec{F}_f = \rho_f V_s \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \rho_f V_s \frac{\vec{u}_p^n - \vec{u}_p^{n-1}}{\delta t}, \quad (15)$$

$$\vec{T}_f = \rho_f V_s \frac{d\vec{\omega}_p}{dt} = \rho_f V_s \frac{\vec{\omega}_p^n - \vec{\omega}_p^{n-1}}{\delta t}, \quad (16)$$

を用い，

$$\vec{u}_p^{n+1} = \left(1 + \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \vec{u}_p^n - \frac{\rho_f}{\rho_s} \vec{u}_p^{n-1} + \frac{(\vec{F}_p + (m_s - m_f)\vec{g})\delta t}{m_s}, \quad (17)$$

$$\vec{\omega}_p^{n+1} = \left(1 + \frac{\rho_f}{\rho_s}\right) \vec{\omega}_p^n - \frac{\rho_f}{\rho_s} \vec{\omega}_p^{n-1} + \frac{\vec{T}_p}{I_s} \delta t, \quad (18)$$

と離散化し，密度比が小さい粒子の運動を安定に計算した．ここで， m_f は体積 V_s に対する流体の質量である．

LKS では，Fig.1 において黒丸で示される格子点 $\vec{x}_{i,j}$ に定義された分布関数 f_k から，密度 ρ ，流速 \vec{u} が，

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_{k=0}^8 f_k(\vec{x} - \vec{c}_k \delta x, t - \delta t), \quad (19)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\rho_0} \sum_{k=0}^8 \vec{c}_k f_k(\vec{x} - \vec{c}_k \delta x, t - \delta t), \quad (20)$$

のように求められる．ここで， ρ_0 は定密度を表す．He によって提案された非圧縮性流体解析に対するアプローチ⁽¹¹⁾ を適用した D2Q9 モデルに対する f_k は，

$$f_k = \omega_k \left[\rho + \rho_0 \left(3c_{k\alpha} u_\alpha + \frac{9}{2} c_{k\alpha} c_{k\beta} u_\alpha u_\beta - \frac{3}{2} u_\alpha u_\alpha + A \delta x \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} \right) c_{k\alpha} c_{k\beta} \right) \right], \quad (21)$$

で与えられる．ここで， $f_k(\vec{x}, t)$ は，場所 \vec{x} ，時間 t における離散速度 \vec{c}_k に対する粒子速度分布関数を表す． δt は，仮想粒子が隣の格子点まで移動する時間と等しくなるように選ぶ⁽⁸⁾． ω_k は重み係数を表し， $\omega_0 = 4/9$ ， $\omega_{1,2,3,4} = 1/9$ ， $\omega_{5,6,7,8} = 1/36$ である．圧力と動粘性係数は，

$$p = \rho/3, \quad \nu = \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{9} A \right) \delta x, \quad (22)$$

で与えられる．外力項 F_k は，重力 \vec{g} を含み，

$$F_k = \rho_3 \omega_k \vec{c}_k \cdot (\vec{g} + \vec{F}), \quad (23)$$

で与えられる．この外力項 F_k は， $\sum_{k=0}^8 F_k = 0$ ， $\sum_{k=0}^8 F_k \vec{c}_k =$

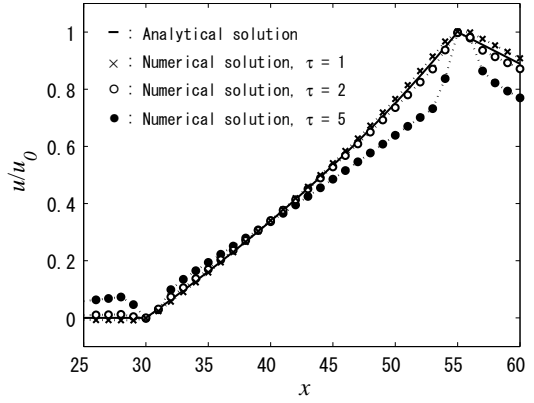


Fig.2 Profiles of the velocity at the horizontal central plane.

$\rho(\vec{g} + \vec{F})$ の関係を満足する．IB-LBM における式 (23) の外力項の有効性は，Feng らによる剛体球の沈降の計算によって実証された⁽⁴⁾．

埋め込み境界法を適用した LKS のアルゴリズムは，以下のようなになる．

- Step 1. 初期条件 $\rho_{i,j}^{(1)}$ ， $\vec{u}_{i,j}^{(1)}$ を式 (21) を代入し，分布関数の初期条件 $f_k^{(1)}$ を与える．
- Step 2. 各離散速度方向に沿って，隣接格子点まで $f_k^{(n)}$ を移動し， $f_k^{(n+1)}$ を計算する．式 (19)，(20) から $\rho_{i,j}^{(n+1)}$ ， $\vec{u}_{i,j}^{(n+1)}$ を求める．
- Step 3. 式 (9) を用い， $\vec{u}_{i,j}^{(n+1)}$ から境界上の速度 $\vec{u}_s^{(n+1)}$ を求める．
- Step 4. 式 (5) より，境界上の外力 $\vec{F}_s^{(n+1)}$ を求める．
- Step 5. 式 (10)，(11) より，重心に働く外力 \vec{F}_p とトルク \vec{T}_p を求める．
- Step 6. 式 (17)，(18) より， \vec{u}_p^{n+1} ， $\vec{\omega}_p^{n+1}$ を求め，オイラー法により時間 $n+1$ における構造体の新たな位置と傾きを計算する．
- Step 7. 式 (6) より，デカルト座標上の $\vec{F}_{i,j}^{(n+1)}$ を求める．
- Step 8. Step 7 で求めた $\vec{F}_{i,j}^{(n+1)}$ ， \vec{g} を式 (23) に代入し，

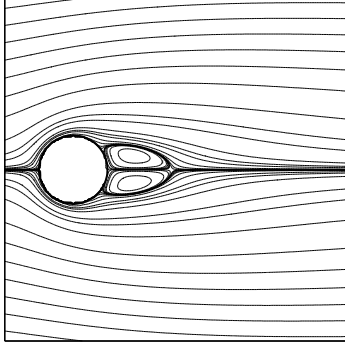
$$f_k^{(n+1)} = f_k^{(n+1)} + \delta t F_k^{(n+1)}, \quad (24)$$

を計算することで， $f_k^{(n+1)}$ を更新する．

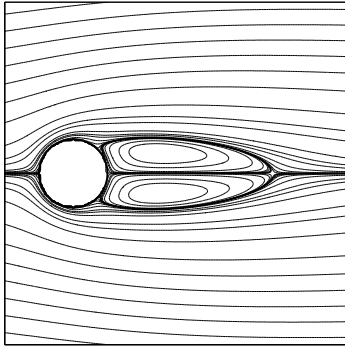
- Step 9. 1 タイムステップ δt 進め Step 2 に戻る．

3. 数値計算

最初に，埋め込み境界法を格子ボルツマン法に適用した場合の問題点を示す．外円は静止し，内円が一定の速度 $u_0 = 0.01$ で回転する同心円筒間のクエット流れを IB-LBM により計算する．内円の半径は $R_i = 45$ ，外円の半径は $R_o = 70$ ，計算領域は 200×200 ， $y = 100$ の断面における流速分布を Fig.2 に示す．緩和時間 $\tau = 1, 2, 5$ に対する流速分布を \times, \circ, \bullet で，次式で与えられる厳密解を実線で Fig.2 に示す．



(a) Re = 20



(b) Re = 40

Fig. 3 Flow past a circular cylinder.

$$\hat{u}(R) = u_0 \frac{R/R_o - R_o/R}{R_i/R_o - R_o/R_i}. \quad (25)$$

周期境界条件を適用し，収束判定条件は，

$$\max(|u|^{n+1} - |u|^n) \leq 10^{-8}, \quad (26)$$

とした．緩和時間が増加するにつれ，境界近傍で流速分布の歪みが発生することが Fig.2 より分かる．Le は剪断流を対象に，IB-LBM による境界近傍の速度の誤差を理論的に導出し，計算条件として $\tau < 2$ を提案した⁽⁶⁾．ただし， $\tau = 5$ の条件は IB-LBM の特性を明確化するために用いており，通常，LBM で $\tau > 1$ が用いられることはなく，IB-LBM による固液混相流の計算において τ に対する条件が問題になることはほとんどない．

従来の IBM の運動方程式に対し緩和時間を $\tau = 1$ とすることで LKS の運動方程式が導出される．IB-LBM を用いたクエット流れの計算で示された計算条件 $\tau < 2$ を LKS は満足する．IB-LKS を用い，レイノルズ数が $Re = 20$ ， $Re = 40$ における円柱周り流れを計算し，結果を Fig.3 に示す．格子点数は 1601×1601 ，円柱の直径は $D = 40$ ，円柱の中心は位置 (641,801) に固定し，代表速度は $u_0 = 0.1$ ，動粘性係数は $\nu = Du_0/Re$ より計算し，係数 A は式 (22) を用い

Table 1 Comparison of drag coefficients and circulating length ($2L/D$) with previous studies.

Re	Method	C_D	L_w
20	Present	2.167	1.90
	Dennis (FDM) ⁽¹³⁾	2.045	1.88
	He (LBM) ⁽¹⁴⁾	2.152	1.92
	Niu (IB-LBM) ⁽⁵⁾	2.144	1.89
40	Present	1.607	4.80
	Dennis (FDM) ⁽¹³⁾	1.522	4.69
	He (LBM) ⁽¹⁴⁾	1.499	4.49
	Niu (IB-LBM) ⁽⁵⁾	1.589	4.69

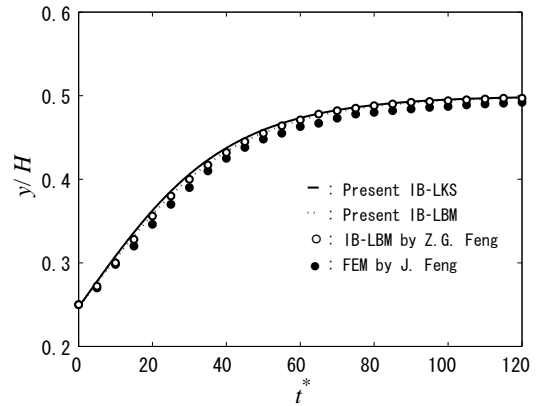


Fig. 4 The lateral migration of the particle.

$A = 9(1/6 - \nu/\delta_x)/2$ によって算出する．式 (21) の $\partial u_\alpha/\partial x_\beta$ の離散化には二次精度中心差分近似，境界上は二次精度片側差分近似を用いる．埋め込み境界法で設定された円柱に 1600 個の点を用いる．抵抗係数 C_D ，渦長さ L_w に関する計算結果を Table 1 にまとめる．他の計算結果との比較から，適切な値が IB-LKS により得られたことが分かる．

次に，剪断流中に存在する移動粒子の挙動を解析する．幅 $W = 2000$ ，高さ $H = 80$ のチャンネル内に，半径 $R=10$ ，初速度 0 の粒子を高さ 20 の位置に設定する．粒子を構成する点の数は，360 個である．流体と粒子の密度はともに $\rho_f = \rho_s = 1$ とし，上下壁は互いに逆方向に $u_0/2 = 1/120$ の速さで移動し，流入流出境界には周期境界条件を適用する．動粘性係数は $\nu=1/30$ ， $Re = u_0H/\nu=40$ であり，重力は働かない．時刻幅は $\delta_t = H/u_0$ で与えられる．移動する粒子の高さの時間変化を Fig.4 に示す．高い弾性係数を用いることで構造体から流体に作用する外力を計算する Penalty method に基づく IB-LBM⁽³⁾ の結果を \circ で，FEM⁽¹⁵⁾ の結果を \bullet で，著者による Direct forcing method に基づく IB-LKS と IB-LBM の結果を実線と点線で，それぞれ示す．Fig.4 から IB-LKS による本計算結果が他の計算結果とよい一致を示しており，剪断流中の粒子挙動が IB-LKS によって適切に計算されることが分かる．

重力加速度 $g = 981$ [cm/s^2] を考慮し，チャンネル内の粒子の

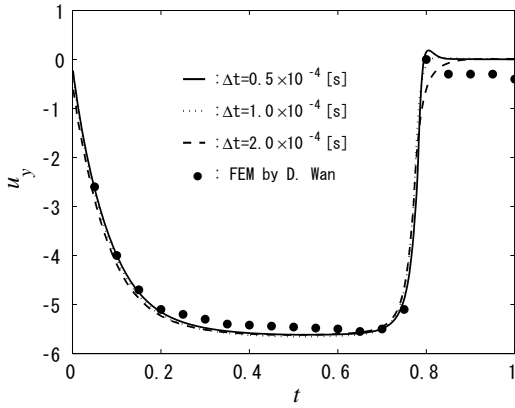


Fig. 5 Translational velocity of a particle in a channel.

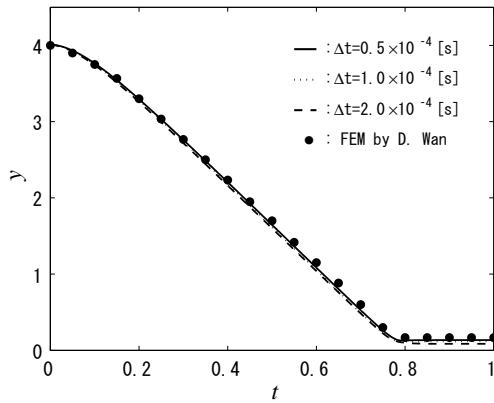


Fig. 6 Longitudinal coordinates of a particle in a channel.

沈降の計算を行う。粒子同士の衝突および粒子と壁との衝突には Glowinski によって提案された反発力を用いる⁽¹⁶⁾。チャンネル幅は 2 [cm]、高さは 6 [cm]、動粘性係数 ν_r は 0.1 [cm²/s]、流体の密度は 1.0 [g/cm³]、粒子の密度は 1.25 [g/cm³]、半径は 0.125 [cm] とし、粒子は 4 [cm] の高さに配置する。格子点数は 201 × 601、粒子を構成する点の総数は 360 とし、粒子は 25 格子で覆われる。時間刻み δ_t は LKS で導出される動粘性係数 $\nu = (1/6 - 2A/9)\delta_x$ を使い、 $\delta_t = \delta_x^2 \nu / \nu_r$ によって計算される。空間刻み $\delta_x = 0.01$ [cm] とし、時間刻みを $\delta_t = 0.5 \times 10^{-4}$ [s] ($A = 0.525$)、 $\delta_t = 1.0 \times 10^{-4}$ [s] ($A = 0.3$)、 $\delta_t = 2.0 \times 10^{-4}$ [s] ($A = -0.15$) のように変更した場合の速度と位置の時間変化を、実線、点線、破線で、Fig.5 と Fig.6 に、それぞれ、示す。Fig.5, Fig.6 において ● で示された Wan による参照解⁽¹⁷⁾ との比較から、動粘性係数の関係式から算出される時間刻みにより、粒子の沈降が適切に計算されることが分かる。なお、Wan は粒子が壁に接触すると反発力が二次関数から一次関数に切り替わるように Glowinski の反発力を修正し、式 (12), (13) で示される粒子内部の流体による粒子運動への運動量とトルクの影響 \vec{F}_f, \vec{T}_f を考慮していないため、粒子が壁に衝突した後の粒子の挙動に関し、本計算と Wan の参照解との間にわずかな差異が観察される。

最後に、重力下でのチャンネル内の二粒子の沈降の計算を行う。チャンネル幅は 2 [cm]、高さは 8 [cm]、動粘性係数は

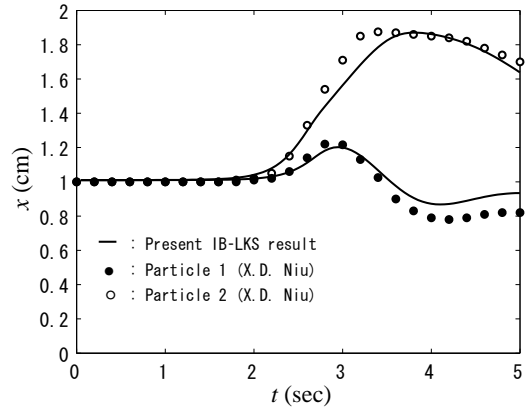


Fig. 7 Transverse coordinates of the centers of the two particles.

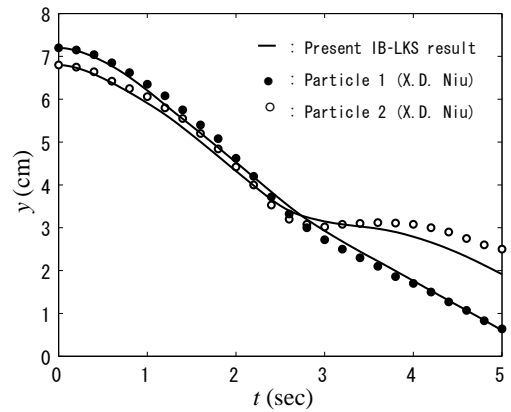


Fig. 8 Longitudinal coordinates of the centers of the two particles.

0.01 [cm²/s]、流体の密度は 1.0 [g/cm³]、粒子の密度は 1.01 [g/cm³]、半径は 0.1 [cm] とし、粒子 1 (Particle 1) は (0.999[cm], 7.2[cm]) に、粒子 2 (Particle 2) は (1[cm], 6.8[cm]) に配置する。時間刻みは 5.0×10^{-4} [s] である。Fig.7 に粒子位置の水平方向の時間変化を、Fig.8 に粒子位置の垂直方向の時間変化を、Fig.9 に $t = 0.5$ [s], 1.5 [s], 2.5 [s], 3.0 [s], 4.5 [s] における粒子位置を示す。Fig.7, Fig.8 から、IB-LKS による本計算結果が、Niu らの参照解⁽⁵⁾ と良い一致を示していることが分かる。また、Fig.9 から、計算の初期において粒子間の距離が一定であったが、粒子 1 が粒子 2 に追いついた後、二つの粒子がチャンネル中心からゆっくり離れ、回転しながら離れていく DKT (Drafting, Kissing, Tumbling) 現象⁽⁵⁾ を再現できることが分かる。ただし、Niu は粒子内部の流体による粒子運動への影響を考慮しておらず、粒子同士の衝突および粒子と壁との衝突に Lennard-Jones potential 型の反発力を用いているため、本計算で得られた結果は、二粒子が近付いた時刻から参照解とわずかに異なっている。

4. おわりに

Direct forcing method に基づく IB-LBM を用い同心回転円筒間のクエット流れを計算し、IB-LBM には緩和時間が増大するにつれ、境界近傍で速度に歪みが発生する問題がある

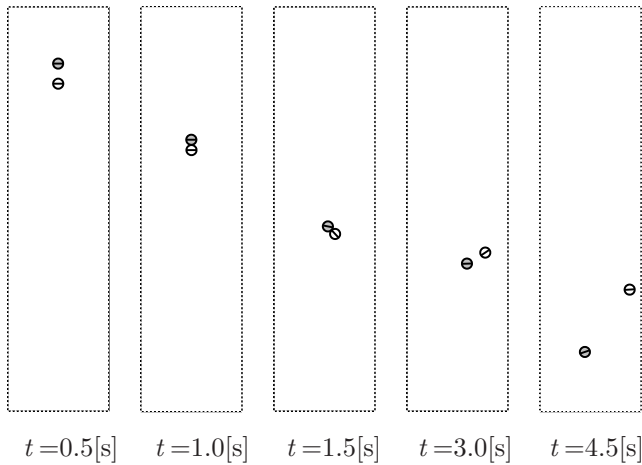


Fig. 9 Sedimentation of two particles in a channel.

ことが明らかになった。IB-LBM の緩和時間 $\tau = 1$ に相当する IB-LKS を用い、円柱周り流れ、剪断流内の粒子挙動解析、粒子の沈降の計算を行った。各計算において、参照解と良い一致が得られ、粒子の沈降の計算においては DKT 現象が確認された。なお、本研究の実施に当たり、大変貴重なご意見を頂いた東京工業大学高橋亮一名誉教授、富山大学竹越栄俊名誉教授、富山大学奥井健一名誉教授に深謝する。

参考文献

- (1) Chen, S. , Doolen, G. D. : Lattice Boltzmann method for fluid flows , *Annu. Rev. Fluid Mech.* , **30**(1998) , pp. 329–364 .
- (2) Peskin, C. S. : Flow patterns around heart valves: A numerical method , *J. Comput. Phys.* , **10**(1972) , pp. 252–271 .
- (3) Feng, Z-G. , Michaelides, E. E. : The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems , *J. Comput. Phys.* , **195**(2004) , pp. 602–628 .
- (4) Feng, Z-G. , Michaelides, E. E. : Proteus: A direct forcing method in the simulations of particulate flows , *J. Comput. Phys.* , **202**(2005) , pp. 20–51 .
- (5) Niu, X. D. , Shu, C. , Chew, Y. T. , Peng Y. : A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows , *Phys. Lett. A* , **354**(2006) , pp. 173–182 .
- (6) Le, G. , Zhang, J. : Boundary slip from the immersed boundary lattice Boltzmann models , *Int. J. Multiphase Flow* , **79**(2009) , pp. 026701 .
- (7) Inamuro, T. : A lattice kinetic scheme for incompressible viscous flows with heat transfer , *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* , **360**(2002) , pp. 477–484 .
- (8) 吉野正人, 村山寿郎, 松崎彰啓, 人見尚: 二成分系 Lattice Kinetic スキームを用いたコンクリート内におけるカルシウムの物質移動解析, *機論 B* , **73**(2007) , pp. 973–980 .
- (9) Uhlmann, M. : An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows , *J. Comput. Phys.* , **209**(2005) , pp. 448–476 .
- (10) Ladd, A. J. C. , Verberg, R. : Lattice-Boltzmann Simulations of Particle-Fluid Suspensions , *J. Stat. Phys.* , **104**(2001) , pp. 1191–1251 .
- (11) He, X. , Luo, L.S. : Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier-Stokes Equation , *J. Stat. Phys.* , **88**(1997) , pp. 927–944 .
- (12) Feng, Z-G. , Michaelides, E. E. : Robust treatment of no-slip boundary condition and velocity updating for the lattice-Boltzmann simulation of particulate flows , *Comput. Fluids* , **38**(2009) , pp. 370–381 .
- (13) Dennis, S. C. R. , Chang, G.-Z. : Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100 , *J. Fluid Mech.* , **42**(1970) , pp. 471–489 .
- (14) He, X. , Doolen, G. : Lattice Boltzmann Method on Curvilinear Coordinates System: Flow around a Circular Cylinder , *J. Comput. Phys.* , **134**(1997) , pp. 306–315 .
- (15) Feng, D. J. , Hu, H. H. , Joseph, D. D. : Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a Newtonian fluid. Part2. Couette and Poiseuille flows , *J. Fluid Mech.* , **277**(1994) , pp. 271–301 .
- (16) Glowinski, R. , Pan, T.-W. , Hesla, T. I. , Joseph, D. D. : A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows , *Int. J. Multiphase Flow* , **25**(1999) , pp. 755–794 .
- (17) Wan, D. , Turek, S. : Direct numerical simulation of particulate flow via multigrid FEM techniques and the fictitious boundary method , *Int. J. Numer. Methods Fluids* , **51**(2006) , pp. 531–566 .