

誘電体ランダム配置系におけるレーザ発振の有限要素解析

FINITE ELEMENT ANALYSIS FOR LASER OSCILLATION IN RANDOM SYSTEM CONSISTING OF HETEROGENEOUS DIELECTRIC MATERIALS

藤井 雅留太¹⁾, 松本 敏郎²⁾, 高橋 徹³⁾, 植田 毅⁴⁾

Garuda FUJII, Toshiro MATSUMOTO, Toru TAKAHASHI and Tsuyoshi UETA

- 1) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: g.fujii@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 2) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: t.matsumoto@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 3) 名古屋大学大学院工学研究科 (〒 464-8603 名古屋市千種区不老町, E-mail: ttaka@nuem.nagoya-u.ac.jp)
 4) 千葉大学総合メディア基盤センター (〒 263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33, E-mail: ueta@faculty.chiba-u.jp)

Random lasings are light amplifying phenomena, caused by multiple scattering and interference effect, in disordered dielectric structures. Random lasers have some unique properties which no conventional laser devices have and received much attentions as new phenomena. Lasing mechanisms in disordered dielectric systems are complex and the localization regimes of laser modes are not known completely. This paper presents detailed analyses of random lasings by means of a finite element method. We calculate the amplification of Poynting vector and investigate the states of the distributions of the electric field intensity of the laser modes.

Key Words: Random Laser, Multiple Scattering, FEM, Maxwell's Equations

1. はじめに

誘電体が空間に不規則に配置された構造を光学利得媒質で満たした系ではランダムレーザ⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾と呼ばれるレーザ発振現象が起こり得る。ランダムレーザはその不規則な構造によって広い周波数帯で多くのレーザモードをもち、白色光を発光することが可能である。さらに、レーザ光の射出方向が広角に渡り、3次元ランダムレーザでは立体角 4π に渡って光を射出することができる。このような誘電体がランダムに配置された系でのレーザ発振現象は誘電体の不規則構造内での光の多重散乱と干渉効果により光のアンダーソン局在⁽⁴⁾と呼ばれる局在現象が起こることに起因している。

誘電体の不規則な構造内での局在現象を扱った数値シミュレーションの先行研究として、Caoら⁽²⁾のFDTD法によるランダムな構造内での光の拘束の数値シミュレーションがある。さらにSebbahら⁽³⁾によって光学的にアクティブでない系と、4準位をもつ原子によるアクティブな媒体で誘電体ランダム配置構造を満たした系において、誘電体ロッドのサイズ、体積充填率と電磁場の強度の依存性が、それぞれFDTD法による数値計算によって示されている。

これらの先行研究から誘電体の不規則な構造内での局在現象は系内で広範囲に渡って光が存在する extended mode と、系内の局所的な範囲の電場強度が非常に高くなる localized mode に分類される。上記の先行研究では誘電体ランダム配置構造内の局在の強さに注目しており、電磁場の強度と局在現象の関係に重点を置いた研究である。ランダム構造内での

光の局在とレーザ発振は非常に密接な関わりを持つてはいるが、一方で、これらの先行研究ではレーザ発振、つまりポインティングベクトルの増減に関しては触れられておらず、誘電体をランダムに配置した構造によるレーザ発振の解析は十分であるとは言えない。さらに、上記の2つの局在モードにおいて、いずれの局在モードもレーザ発振を起こす可能性があるが、どちらの局在モードによってレーザ発振が起こっているかもいまだ明らかではない。

そこで、本研究では誘電体をランダムに配置した系において、TMモードでのレーザ発振の数値解析を行った。系内に光学利得媒質を満たした場合とそうでない場合の系外に流れるポインティングベクトルを有限要素法により計算し、光学利得媒質によるポインティングベクトルの増幅率を求めると、ランダムレーザのレーザ発振の数値シミュレーションを行った。さらにレーザ発振が起こっている状況における電場強度分布を計算し、localized mode、extended modeのどちらでレーザ発振が起こるかを明らかにした。また、各局在現象での光の放射方向を調べることで、局在とランダムレーザの放射方向の関係を調べた。

本論文の構成を次に記す。第2節ではマクスウェル方程式から導かれる電磁波散乱問題の定式化を行い、本研究で計算する増幅率を定義した。第3節では本研究で解析を行った誘電体をランダムに配置したモデルの詳細および、モデルの有限要素分割に関して記述した。第4節ではロッドの間の空間を光学利得媒質で満たした系、およびロッドを光学利得媒質で作った系におけるレーザ発振の数値シミュレーション結果をそれぞれ示し、レーザ発振を起こす電場強度分布とその放

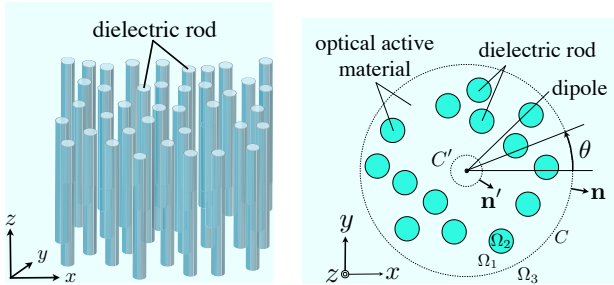
射方向の結果を記した。第5節では本研究で明らかになったことをまとめ、結言とした。

2. 定式化

本研究では有限要素法を用いて、電磁波開領域散乱問題を解く。ランダムレーザに関する数値解析は有限差分時間領域 (FDTD) 法がよく利用されるが、FDTD 法は正方形のグリッドに空間を分割するため、異なる物体間の湾曲した境界に沿った分割ができず、階段誤差が生じる。それに対し、有限要素法は境界に沿った要素分割を行うため、空間を分割する際の誤差を最小限にすることが可能であり、精度の点で有利であると考えられる。

本研究では境界条件として PML 吸収境界条件⁽⁵⁾を用いた。この境界条件は物理領域の外に PML 吸収層を設定し、PML 吸収層内で電場と磁場を減衰させ、物理境界上での数値反射を防ぐことで開領域問題をシミュレートすることを目的とした境界条件である。

図 1(a) は本研究で解析した 2 次元誘電体ランダム配置系のイメージ図であり、図 1(b) は z 方向から見たランダムレーザの概念図である。2 次元誘電体ランダム配置系を囲む円を C 、レーザの光源であるソースを囲む微小な円を C' と定義し、 x 軸との角度を θ とした。さらに、誘電体ロッドの間の空間、誘電体ロッド、 C 外の領域をそれぞれ Ω_1 、 Ω_2 、 Ω_3 と定義した。本研究ではロッド間の空間に利得媒質を与えた系と、ロッドを利得媒質で作った系を想定し、円形領域 Ω_1 、または誘電体ロッドを表す領域 Ω_2 が光学利得媒質となる。



(a) An image of a 2D disordered dielectric structure. (b) A concept of a 2D random laser.

Fig. 1 2D disordered dielectric structure.

2.1. 支配方程式

本研究ではソースとして、ランダムに配置された誘電体ロッドによって構成される系の中心 \mathbf{x}_0 に角振動数 ω で振動する双極子をおいた。このように時間変動する双極子による分極 \mathbf{P}_d は以下のように表される。

$$\mathbf{P}_d(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}_d \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \exp(-i\omega t) \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{D}_d は 1 つの双極子がつくる負電荷から正電荷の方向を持つ分極ベクトルであり、 $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ はディラックのデルタ関数である。時間振動する双極子による分極 \mathbf{P}_d を以下のように電束密度 \mathbf{D} に加える。

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{P}_d(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{E} は電場、 $\epsilon(\mathbf{x})$ は場所に依存する比誘電率である。

本研究では電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ と磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ が双極子と等しい角振動数で振動し、以下のような調和振動をしていると仮定する。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t) \quad (3)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t) \quad (4)$$

式 (2)、(3)、(4)、そして真空中の透磁率 μ_0 を用いて表される磁束密度と磁場の関係式 $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x})$ をそれぞれマクスウェル方程式に代入すると電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{H} に関する以下の方程式が導出される。

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = i\omega \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) = -i\omega [\epsilon_0 \epsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_d \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] \quad (6)$$

式 (5)、(6) から次の電場 \mathbf{E} に関する非斉次方程式が得られる。

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x})] - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{D}_d \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (7)$$

ここで、 c は真空中の光速である。電場 \mathbf{E} を領域 Ω_1 、 Ω_2 の誘電率が領域 Ω_3 と同じ場合、つまり散乱がない場合の放射場 \mathbf{E}_i とそれ以外の場、すなわち散乱場 \mathbf{E}_s に分けて考えるとする。このとき次のように全電場を分けて表すことができる。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_s(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \quad (8)$$

式 (8) を式 (7) に代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla \times [\nabla \times [\mathbf{E}_s(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_i(\mathbf{x})]] - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\mathbf{x}) [\mathbf{E}_s(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_i(\mathbf{x})] \\ = \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{D}_d \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

が導かれ、この式を両辺整理すると、次の方程式となる。

$$\begin{aligned} \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{x})] - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}_s(\mathbf{x}) \\ = - \left\{ \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{x})] - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \right\} \\ + \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{D}_d \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、ソースによる電場 $\mathbf{E}_i(\mathbf{x})$ は次の非斉次方程式を満たさねばならない。

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_i(\mathbf{x})] - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_i \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) = \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{D}_d \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (10)$$

ここで ϵ_i は散乱体がない領域 Ω_3 の比誘電率を表す。式 (9) の右辺に式 (10) を代入すると最終的に以下の方程式が導出される。

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_s(\mathbf{x})] - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\mathbf{x}) \mathbf{E}_s(\mathbf{x}) = \frac{\omega^2}{c^2} [\epsilon(\mathbf{x}) - \epsilon_i] \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \quad (11)$$

本研究では電場 \mathbf{E} が z 方向成分をもつ TM モード、 $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$ 、について数値解析を行った。このとき、式 (1) の \mathbf{D}_d も同様に z 成分をもつ $\mathbf{D}_d = (0, 0, D_z)$ で表される。方程式 (10) を満たすグリーン関数は以下のように表される。

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{x}) = \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{D}_d \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_i} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \right)$$

ここで、 $H_0^{(1)}$ は 0 次の第 1 種ハンケル関数である。

2.2. 光学利得媒質

レーザ発振を行うためには光増幅を与える光学利得媒質が必要である。光学利得媒質の励起密度は複素誘電率の負の虚部で表すことができる。複素誘電率は以下の形で表される。

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon_r(\mathbf{x}) + i\epsilon_i(\mathbf{x}) \quad (12)$$

ここで、 $\epsilon_r(\mathbf{x})$ 、 $\epsilon_i(\mathbf{x})$ はそれぞれ複素誘電率の実部と虚部である。光学利得媒質は虚部 $\epsilon_i(\mathbf{x})$ に負の値 $-\gamma$ ($\gamma > 0$) を与えることで表される。本研究ではロッド間の空間に利得媒質を与えた系とロッドを利得媒質で作った系を想定した。

ロッド間の空間に利得媒質を与えた系では、図 1(b) で定義される各領域において

$$\epsilon_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\gamma & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ 0.0 & \mathbf{x} \in \Omega_2 \\ 0.0 & \mathbf{x} \in \Omega_3 \end{cases} \quad (13)$$

とし、ロッドを利得媒質で作った系では

$$\epsilon_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0.0 & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ -\gamma & \mathbf{x} \in \Omega_2 \\ 0.0 & \mathbf{x} \in \Omega_3 \end{cases} \quad (14)$$

と誘電率の虚部を与える。

γ が 0 に近いほど光学利得媒質による光増幅が少なく、光学利得媒質の励起密度が低い状態である。また、 γ の値が 0 に近い値で発振しているレーザモードほど、レーザ閾値が低く、高効率なレーザ発振が可能なレーザモードである。

$\epsilon_r(\mathbf{x})$ は複素誘電率の実部であり、各領域において以下の値を用いた。

$$\epsilon_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1.0 & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ 4.0 & \mathbf{x} \in \Omega_2 \\ 1.0 & \mathbf{x} \in \Omega_3 \end{cases}$$

2.3. 増幅率

本研究では電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{H} が時間調和振動をしていると仮定しているため、ポインティングベクトル \mathbf{S} は時間平均をとった以下の形で計算する。

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \text{Re} \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \right)$$

ここで $\text{Re}(\mathbf{Z})$ は \mathbf{Z} の実部であり、 $\langle \mathbf{S} \rangle$ はポインティングベクトルの時間平均、 \mathbf{H}^* は複素磁場の共役を表す。

本研究では光学利得媒質で不規則な構造を満たした系における光の増幅率 A を以下のように定義した。

$$A = \frac{\int_C \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{n} \, dl |_{\gamma > 0}}{\int_C \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{n} \, dl |_{\gamma = 0}} \quad (15)$$

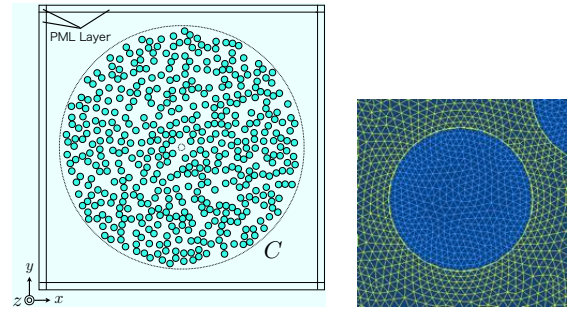
ここで、 \mathbf{n} は図 1(b) で定義される誘電体ランダム配置系を囲む円 C の外向きの単位法線ベクトルである。この増幅率の分母は光学利得媒質による光増幅が無い場合 ($\gamma = 0$) の C 上での単位時間あたりに系の中心 \mathbf{x}_0 に置かれたソースが放射する全ポインティングベクトルであり、分子は光増幅がある場合 ($\gamma > 0$) の C 上でのポインティングベクトルの法線方向成分の線積分を表している。つまり、式 (15) で定義された

増幅率は誘電体の不規則構造を光学利得媒質で満たした系とそうでない系での、 C 上を通過する時間平均の全ポインティングベクトルの比を表す値である。

3. 解析モデル

本研究で扱った 2 次元誘電体ランダム配置構造を図 2(a) に示す。半径 a の均一な誘電体ロッドを半径 $40a$ の円形領域 C 内に不規則に配置した。電場がロッド間の空間またはロッド内部のどちらに局在するか調べるために、誘電体ロッドの極端な体積充填率を避け、体積充填率は 30%、ロッドの本数は 480 本とした。PML 層の内側の物理領域の幅は $88a$ とした。

次の手順でモデルを作成した。まず、ロッドの半径を無次元化した値 1 と定める。次に、ランダム構造を囲む円 C の中心座標を $(40, 40)$ とする。続いて、480 個の誘電体ロッドの中心座標を次のように決める。第 i 番目のロッドについて、0 から 1 の間の乱数を 2 つ発生させ、それらを 80 倍したものをこのロッドの中心座標 (x_i, y_i) と定める。ただし、このロッドが第 1 から第 $i-1$ 番目のロッドのいずれかと交差する場合、およびロッドが円 C 内に完全に入らない場合は、再度乱数を発生させて、中心座標を計算しなおす。最後に領域の中心が $(0, 0)$ となるように全ての座標を平行移動する。モデル作成においては GNU gfortran-mp-4.3 を使用し、乱数の発生には組み込み関数 drand (乱数初期値は 0) を使用した。



(a) 2D disordered dielectric system. (b) Dielectric rod divided by meshes.

Fig. 2 Analytical model.

本研究の解析モデルでは PML 層内での吸収関数を含んだ形での積分を容易にするため、物理領域を三角形要素、PML 層を双一次四角形要素でのハイブリッド要素分割を行った。PML 層の厚さは $2.5a$ 、双一次四角形要素によって 6 分割されている。減衰パラメータとしてヘルムホルツ方程式に対して最適化された吸収関数を用いた⁽⁶⁾。

要素分割された誘電体ロッド部分を拡大した図を図 2(b) に示す。誘電体ロッドの半径方向に 10~11 分割程度の要素サイズで分割を行い、これは最も条件が悪い場合で 1 波長当たりおよそ 18 分割されていることになる。図 1(b) で定義されるポインティングベクトルを計算する円 C' 、 C 上においてはさらにその 3 分の 1 程度のメッシュに、つまり 1 波長当たり 54 分割程度のメッシュサイズで細分化した。これは式 (15) で増幅率を計算するために \mathbf{H}^* が必要であり、それを求めるためにマクスウェル方程式から $\nabla \times \mathbf{E}^*$ を計算する必要がある。そのときに必要となる偏微分は形状関数から求めており、それを精度良く計算するためには C' 、 C 上における要素分割を非常に細かくする必要がある。本研究で解析したモデルは 833130 節点、1661658 要素で数値解析を行った。

4. 2次元誘電体ランダム配置系におけるレーザ発振シミュレーション

2次元誘電体ランダム配置系におけるレーザ発振のシミュレーション結果を以下に示す。 $x_0 = (0, 0)$ として原点にソースを置き、無次元化周波数 $0.21 \leq \frac{\omega a}{2\pi c} \leq 0.27$ の範囲において、 γ は $0 \leq \gamma \leq 0.03$ の範囲で変化させ、式 (15) で定義した増幅率を計算した。 $\frac{\omega a}{2\pi c}$ の範囲は誘電体ロッドの半径 a が $a = 130\text{nm}$ のとき、可視光領域の波長 $481\text{nm} \sim 619\text{nm}$ に渡る周波数帯であり、系全体 C の半径は $40a = 5.2\mu\text{m}$ となる。

extended mode、localized mode の区別には電場強度に対する節点数の分布を用いて定義した。まず、電場強度の幅を最大値から最小値の間で50分割することで決定し、その各電場強度の幅に属する節点数が電場強度の増加に対して単調減少する節点数の分布は localized mode、一方で、単調減少せず、途中で最大値を持つ分布は extended mode と分類した。これらは localized mode では系内の狭い範囲の電場強度のみが高い、つまり系内の多くの範囲では電場強度が低くなっており、extended mode では系内の広い範囲に渡って電場が強くなっていることを表している。どちらに分類することも難しい分布をもつ局在はその他として分類した。

4.1. 誘電体ロッド間の空間を光学利得媒質で満たした系のレーザ発振

はじめに、誘電体ランダム配置系を囲む円形領域 C 内の誘電体ロッド間の空間を光学利得媒質で満たした系のレーザ発振の数値解析を行った。この系では図 1(b) の領域 Ω_1 の誘電率に負の虚部を与えた。光学利得媒質は一様に励起されているとし、 γ は定数とする。各レーザ発振において、増幅率 A が 10^3 を越えているピークの電場強度分布と放射方向を調べた。ただし、レーザ閾値の小さい $\gamma < 0.005$ の範囲に関しては増幅率が 0.5×10^2 以上のレーザモードまで調べている。

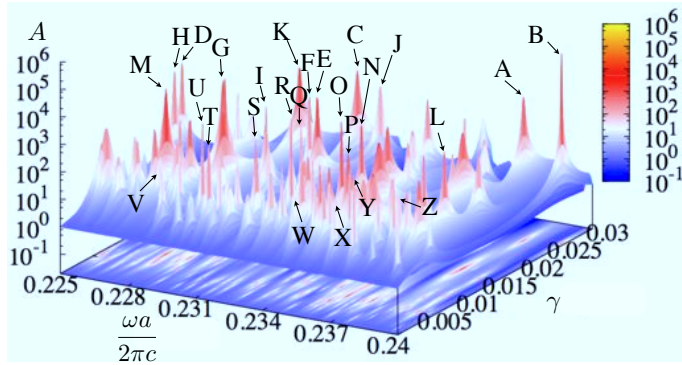
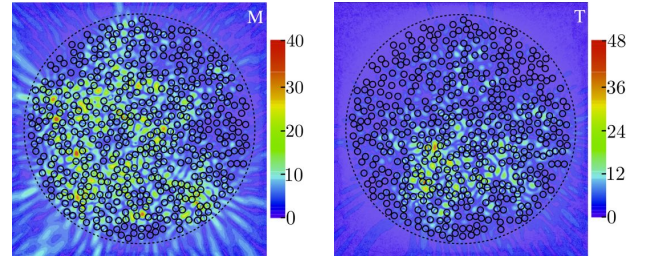


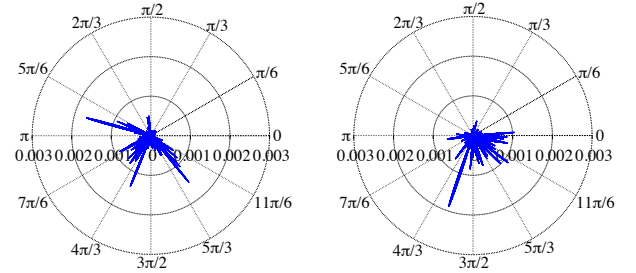
Fig. 3 Amplification factor in the case of giving γ in interspace between rods.

図 3 は誘電体ロッド間の空間を光学利得媒質で満たした系の増幅率を計算した結果である。増幅率 A は対数表示で表している。計算点数は無次元化周波数 $0.225 \leq \frac{\omega a}{2\pi c} \leq 0.240$ の範囲で 501、 $0.0 \leq \gamma \leq 0.03$ の範囲で 201 とした。特定の領域において計算点数 501 の場合の結果と 1251 の場合の計算結果を比較し、両者のレーザモードが一致していることを確認している。底面の図は各ピークの $(\frac{\omega a}{2\pi c}, \gamma)$ 座標での位置を示している。まずランダムレーザの特徴である、広い周波数帯に渡る多くのレーザモードが見られる。特に $\gamma < 0.01$ の範囲において多くのレーザモードが存在し、これは γ が 0 に近いレーザ閾値の低いレーザモードを持つことを表している。

一方で、 $0.02 < \gamma$ の領域においてはレーザモードの数が減っていることが観察される。



(a) Electric intensity distribution of peak M ($\frac{\omega a}{2\pi c} = 0.22734$, $\gamma = 0.008250$). (b) Electric intensity distribution of peak T ($\frac{\omega a}{2\pi c} = 0.23058$, $\gamma = 0.003600$).



(c) Radiative direction of peak M. (d) Radiative direction of peak T. Fig. 4 Electric intensity distributions and radiative directions of extended modes.

次に図 4 に extended mode の電場強度分布とそれらの放射方向を示す。図 4(a)、4(b) のカラーマップは全電場の強度をソースによる電場強度の最大値で割った値をプロットした。図 4(c)、4(d) は極座標で示され、回転方向の軸は図 1(b) で定義される θ 、半径方向の軸は以下で定義される $\delta \langle \mathbf{S} \rangle$ をプロットした。

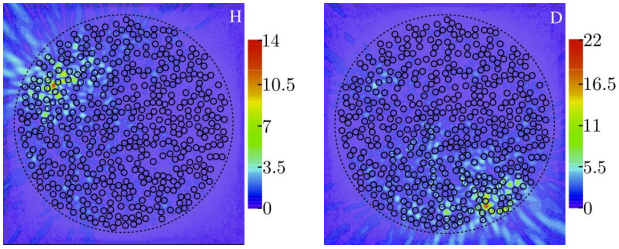
$$\delta \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\int_{C_\theta} \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{n} dl |_{\gamma > 0}}{\int_C \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \mathbf{n} dl |_{\gamma > 0}} \quad (16)$$

$\delta \langle \mathbf{S} \rangle$ の分母は系を囲む円 C 上でのポインティングベクトルの法線方向成分の線積分、分子は各要素に分割された C の θ 方向に位置する微小線分 C_θ (均一長さ $80\pi a/8667$) 上でのポインティングベクトルの法線方向成分の線積分である。

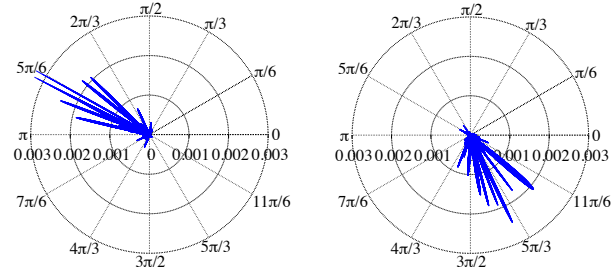
図 4(a)、4(b) の電場強度分布から、誘電体ロッド間の空間の誘電率に負の虚部を与えているため、ロッド間の空間に強く局在しているモードがレーザ発振を起こしていることがわかる。また、図 4(c)、4(d) の結果より、extended mode は広角な方向に光を放射することがわかる。光の放射方向は系内の光の局在する位置に強く依存しており、誘電体ランダム配置構造のみで光の放射方向を制御することは困難である。

次に図 5 に localized mode の電場強度分布とそれらの放射方向を計算した結果を示す。図 5(c)、5(d) の見方は図 4(c)、4(d) と同じである。図 5(a)、5(b) に示される localized mode の電場強度分布においても誘電体ロッド間の空間に強く局在しているモードでレーザ発振が起こっている。また、localized mode の放射方向は extended mode の放射方向と比較すると、狭い角度に放射されることがわかる。

図 6 は式 (13) で定義される γ と各レーザモードの関係を示した結果である。図の中に localized mode は丸、extended mode は三角、どちらか判別が困難なモードは五角形で表さ



(a) Electric intensity distribution of peak H ($\frac{\omega a}{2\pi c} = 0.22515$, $\gamma = 0.01710$). (b) Electric intensity distribution of peak D ($\frac{\omega a}{2\pi c} = 0.22503$, $\gamma = 0.01860$).



(c) Radiative direction of peak H. (d) Radiative direction of peak D.

Fig. 5 Electric intensity distributions and radiative directions of localized modes.

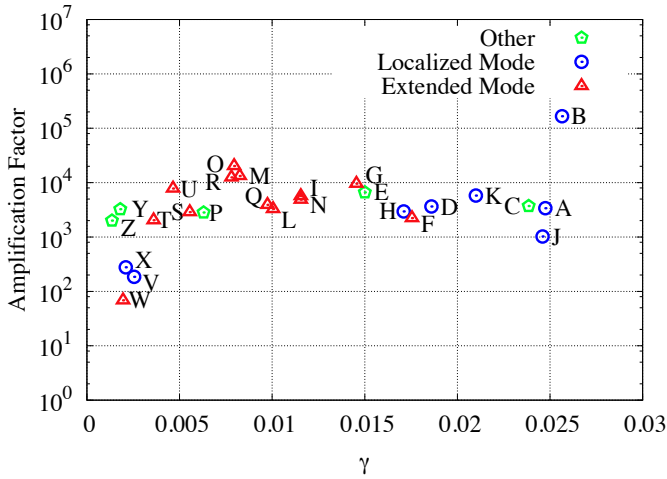


Fig. 6 γ -dependence of localizations.

れている。 $\gamma < 0.015$ の光増幅が少ない範囲では V、X を除いてレーザモードの局在がほぼ extended mode であり、一方で localized mode の出現の多くは $0.015 < \gamma$ の光増幅が大きい範囲であることが結果よりわかる。これは localized mode の局在範囲が狭いこと、また extended mode の局在範囲が広いことに原因があると考えられる。localized mode は狭い範囲の光学利得媒質からしか光増幅を得ることができないため、 γ が 0 に近く、光学利得媒質の励起密度が低い状態においては利得飽和に陥り、増幅率が大きくなることは難しい。それゆえ $\gamma < 0.015$ の範囲では localized mode による増幅率の大きいレーザ発振は困難であると考えられる。一方で、extended mode によるレーザ発振は局在範囲が広く、広範囲の光学利得媒質から光増幅を得ることが可能である。それゆえ、光学利得媒質の励起密度が低い状態である $\gamma < 0.015$ の範囲においても増幅率の大きいレーザ発振が可能であると考えられる。

4.2. 誘電体ロッドを光学利得媒質で作った系でのレーザ発振

次に固体色素などの光学利得媒質で誘電体ロッドを作った系のランダムレーザ発振の数値解析を行った。この数値計算ではロッド部分 (図 1(b) の領域 Ω_2) の誘電率に負の虚部を与えた。この系においても、光学利得媒質は一樣に励起されているとし、 γ は定数とする。各レーザ発振において、増幅率 A が 10^3 を越えているピークの電場強度分布と放射方向を調べた。ただし、レーザ閾値の小さい $\gamma < 0.01$ の範囲に関しては増幅率が 0.5×10^2 以上のレーザモードまで調べている。さらにピーク N に関しては、鈍いピークをもつモードを調べるという意味で、電場強度分布と放射方向を調べた。

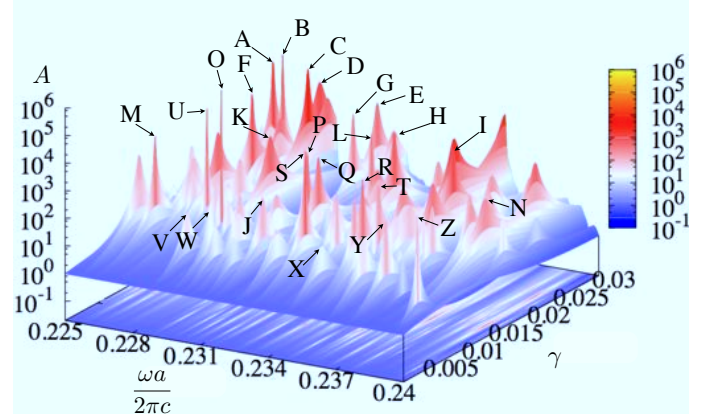
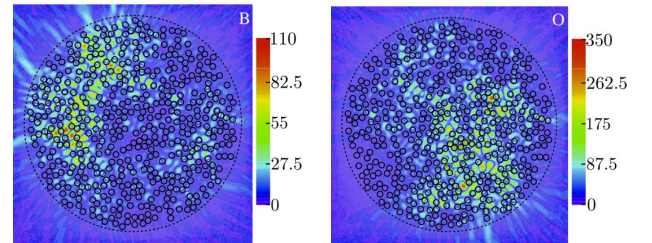
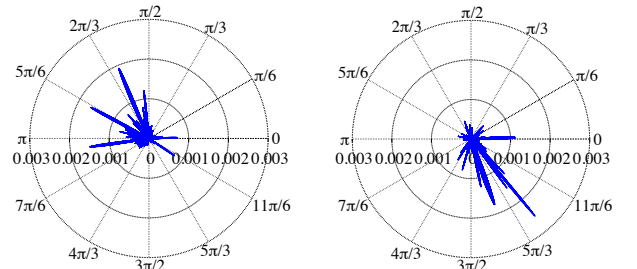


Fig. 7 Amplification factor in the case of giving γ in rods.



(a) Electric intensity distribution of peak B ($\frac{\omega a}{2\pi c} = 0.22689$, $\gamma = 0.02685$). (b) Electric intensity distribution of peak O ($\frac{\omega a}{2\pi c} = 0.22872$, $\gamma = 0.01110$).



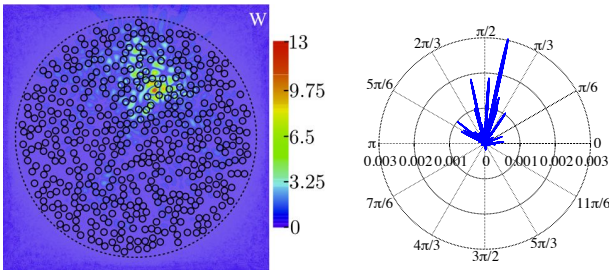
(c) Radiative direction of peak B. (d) Radiative direction of peak O.

Fig. 8 Electric intensity distributions and radiative directions of extended modes.

図 7 は誘電体ロッドを光学利得媒質で作った系における増幅率を計算した結果である。増幅率 A は対数表示で表している。計算点数は無次元化周波数 $0.225 \leq \frac{\omega a}{2\pi c} \leq 0.240$ の範囲で 501、 $0.0 \leq \gamma \leq 0.03$ の範囲で 201 とした。特定の領域において周波数の計算点数 501 の場合の結果と 1251 の場合の計算結果を比較し、両者のレーザモードが一致していることを確認している。底面の図は各ピークの $(\frac{\omega a}{2\pi c}, \gamma)$ 座標での

位置を示している。鈍いピーク K、N が存在し、このようなピークは $0.24 < \frac{\omega a}{2\pi c}$ の周波数帯ではさらに増加する。

図 8 に extended mode の電場強度分布とその放射方向を示す。図 8(c)、8(d) の見方は図 4(c)、4(d) と同じである。また、図 9 に localized mode の電場強度分布とその放射方向を示す。誘電体ロッドの誘電率に負の虚部を与えた系では、ロッド内に強く光が局在するモードでレーザ発振が起こることが予想されたが、実際に図 8(a)、8(b) の電場強度分布は予想と異なり、ロッド間の空間に強く光が局在している電場強度分布となっている。これらの電場強度分布から、ロッド間の空間に局在していた光がロッド内にしみ込み、ロッド内の負の虚部によって光増幅が起こっていると考えられる。



(a) Electric intensity distribution of peak W ($\frac{\omega a}{2\pi c} = 0.22968$, peak W. $\gamma = 0.006150$).

Fig. 9 Electric intensity distribution and radiative direction of a localized mode.

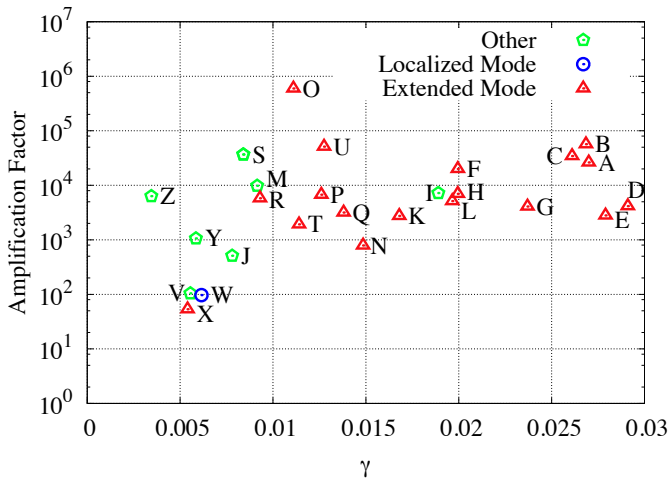


Fig. 10 γ -dependence of localizations.

図 10 は γ と各ピークの関係を表した結果である。図 6 のロッド間の空間を光学利得媒質で満たした系のレーザ発振と比較すると、レーザ発振が起こりはじめる γ の値が大きく、比較的レーザ閾値が大きいモードが多い。この原因はロッド部の誘電率に虚部を与えた系では、電場がロッド間の空間で強く局在しており、光学利得媒質内の電場強度が高くなっていないことが原因であると考えられる。また、ロッド間の空間を光学利得媒質で満たした系では $0.015 < \gamma$ の範囲に localized mode によるレーザ発振が見られたのに対し、ロッドを光学利得媒質で作った系では $0.015 < \gamma$ の範囲での localized mode によるレーザ発振が見られない。この原因として、localized mode でのレーザ発振を起こすには光学利得媒質による光増幅が不十分であることがあげられる。つまり

本研究で計算した解析モデルの誘電体ロッドの体積充填率が 30% であるため、ロッドに負の虚部を与えた系は、ロッド間の空間に負の虚部を与えた系と比較して、誘電体の不規則構造内での平均的な励起密度が小さい状態になり、局在範囲の狭い localized mode によるレーザ発振は利得飽和になりやすく、大きい増幅率を得ることが難しいと考えられる。

5. 結言

本研究ではランダムレーザと呼ばれる誘電体の不規則な構造内でのレーザ発振現象を有限要素法による数値解析により詳細に調べた。また、誘電体ロッドを光学利得媒質で作った系と、ロッド間の空間を光学利得媒質で満たした系でのレーザ発振現象によるポインティングベクトルの増幅率を計算し、計算結果の比較をおこなった。その結果、ランダムレーザの性質として以下のことが明らかになった。

- extended mode、localized mode どちらのモードでもレーザ発振現象が起こる。
- extended mode によるレーザ発振が支配的である。
- 光学利得媒質の励起密度が十分である場合には、つまり光学利得媒質による光増幅が大きい場合には、localized mode による増幅率の大きいレーザ発振も起こり得る。
- extended mode によるレーザ発振は localized mode によるレーザ発振に比べて広角に渡って光を放射する。
- 誘電体ロッド間の空間を光学利得媒質で満たした系では、ロッドを光学利得媒質で作った系と比較して、レーザ閾値の低いレーザ発振を起こすことが可能である。

一方で、解析対象がランダムな構造を持つので、数多くのモデルを解析し統計をとること、各レーザモードのモード解析、また電場の平面内成分 (x, y 方向成分) を含めたフルベクトルでの有限要素解析が今後の検討課題となる。

参考文献

- (1) H. Cao, Y. G. Zhao, S. T. Ho, E. W. Seelig, Q. H. Wang, and R. P. H. Chang : Random Laser Action in Semiconductor Powder, *Phys. Rev. Lett.*, **82**(1999) pp. 2278–2281.
- (2) H. Cao, J. Y. Xu, D. Z. Zhang, S. -H. Chang, S. T. Ho, E. W. Seelig, X. Liu, and R. P. H. Chang : Spatial Confinement of Laser Light in Active Random Media, *Phys. Rev. Lett.*, **84**(2000) pp. 5584–5587.
- (3) P. Sebbah and C. Vanneste : Random laser in the localized regime, *Phys. Rev. B*, **66**(2002) pp. 144202.
- (4) D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk, and R. Righini : Localization of light in a disordered medium, *Nature(London)*, **390**(1997) pp. 671–673.
- (5) J. P. Berenger : A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *J. Comp. Phys*, **114**(1994) pp. 185–200.
- (6) A. Bermudez, L. Hervella-Nieto, A. Prieto, and R. Rodriguez : An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problems, *J. Comp. Phys*, **223**(2007) pp. 469–488.