

# 3次元異方性弾性波動問題における Lubichの方法を用いた時間領域境界要素法

## Convolution Quadrature Boundary Element Method

### for General Three-Dimensional Anisotropic Elastodynamics in Time-Domain

斎藤 隆泰<sup>1)</sup>, 田中 遊雲<sup>2)</sup>, 廣瀬 壮一<sup>3)</sup>

Takahiro SAITOH, Yukumo TANAKA and Sohichi HIROSE

- 1) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:tsaitoh@qnde.mei.titech.ac.jp)  
 2) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:tanaka.y.af@m.titech.ac.jp)  
 3) 東京工業大学大学院情報理工学研究科 (〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1, E-mail:shirose@cv.titech.ac.jp)

This paper presents a new time-domain boundary element method (BEM) for general three-dimensional anisotropic elastodynamics. A convolution quadrature method (CQM), first proposed by Lubich, is applied to approximate convolutions of time-domain boundary integral equations for general three-dimensional anisotropic elastodynamics. Laplace-domain fundamental solutions are utilized for the new time-domain BEM formulation. Fundamental elastic wave scattering problem is solved by our proposed method to validate the new time-domain formulation with CQM.

**Key Words:** Time-domain BEM, General anisotropy, Convolution quadrature method (CQM)

## 1. はじめに

本論文では, Lubich が提案した畳み込み積分を離散化近似する手法<sup>(1,2,3)</sup>を, 3次元異方性弾性波動問題の時間領域境界要素法に適用することについて検討する.

時間領域境界要素法は, これまで様々な波動解析分野における有効な数値解析手法として用いられてきた<sup>(4)</sup>. 通常, 時間領域境界要素法では, 畳み込み積分を含む時間領域境界積分方程式を, 時間・空間に関して離散化し, 代数方程式を構成し, 逐次的に境界未知量を求める時間ステップ境界要素法が用いられている. その際, 時間領域境界積分方程式の積分核となる時間領域基本解は, 解析的に閉じた形, または積分を評価しやすい形式で求めておくことが, 数値解の導出のために望ましい. 一般的には, 周波数領域の基本解よりも, 時間領域基本解の方が閉じた形の基本解を求めることは困難であるため, 時間領域境界要素法の適用範囲は, 周波数領域のそれよりも適用範囲が狭まることとなる. また, 解法のアルゴリズムも, 時間領域を扱う方がより複雑であり, 時間増分の取り方によっては数値解が不安定となる場合もありうる.

このような中, 著者らは時間領域境界積分方程式の畳み込み積分を Lubich が提案した Convolution Quadrature Method (CQM) を用いて評価する, 新しい時間領域境界要素法に関する研究<sup>(5)</sup>, そして, さらに高速多重極法 (FMM) を適用する研

究等を行ってきた<sup>(6)</sup>. Lubich の CQM を境界要素法に適用すれば, 時間増分が小さい場合の解の安定性を保つことができる. また, 時間領域基本解を直接に利用するのでなく, 代わりにラプラス変換域における基本解を用いることができる. そのため, 各ステップ毎の計算は, 周波数領域の解法とほぼ同様の手順で扱えることから, 解法も容易になり, 粘弾性波動問題のような時間領域で閉じた基本解を求めることが困難な問題でさえも, ラプラス変換域の基本解を用いることで, 容易に時間領域の解を求めることができる<sup>(7,8,9)</sup>.

本論文では, これまでの成果をもとに, Lubich の提案した CQM を用いた時間領域境界要素法を 3次元異方性弾性波動問題に対して拡張する. 異方性弾性波動問題への Lubich の方法の適用は, Zhang<sup>(10)</sup>により行われているが, 2次元に限られ, しかも一般の異方性材料を扱う場合ではない. 一般的に, 3次元異方性弾性波動問題に対する時間領域境界要素法は, 境界要素解析の応用分野としては最も複雑な問題の 1 つであり, 解析例もさほど多くない. そのため CQM を用いた新たな解法の提案は, 非常に有意義であると思われる.

以下では, まず, 解くべき問題および通常の 3次元異方性弾性波動問題における時間領域境界要素法について説明した後, Lubich の方法について簡単に説明する. そして, Lubich の方法を適用した場合の定式化について詳細に説明し, 最後に, 簡単な数値解析例とともに, 本手法の有効性について検討する.

2010 年 9 月 30 日受付, 2010 年 11 月 10 日受理

†Dedicated to the memory of Prof. Masataka TANAKA

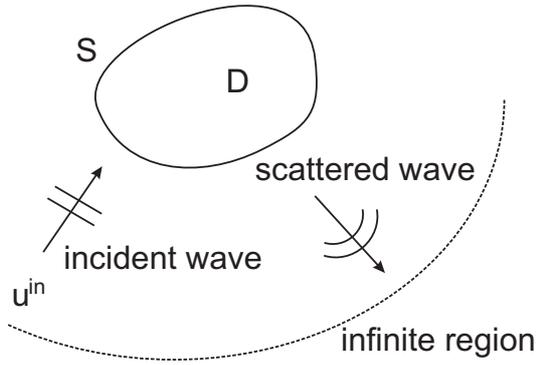


Fig. 1 Elastic wave scattering in anisotropic media.

## 2. 解くべき問題

以下では、直交直線座標系に関する座標成分を  $x_i (i = 1, 2, 3)$  で表し、アルファベットの右下添え字は総和規約に従うとする。また、変位や表面力といった他の物理量に対しても、同様の表記を用いることとする。

さて、Fig.1 のような 3 次元で均質な異方性無限弾性体領域における入射波による散乱問題について考える。入射波  $u_i^{\text{in}}$  が散乱体  $D$  の表面  $S$  に到達するまで、境界上の変位、表面力は静止過去の条件を満足するものとする。

3 次元異方性弾性波動問題において、変位  $u_i$  および応力  $\sigma_{ij}$  は、簡単のため、物体力を無視すれば、それぞれ次の運動方程式、変位-応力の関係式を満足する。

$$C_{ijkl}u_{l,kj} = \rho\ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}u_{k,l} \quad (2)$$

ここで、 $(\cdot)_{,j}$  および  $\dot{(\cdot)}$  はそれぞれ  $x_j$  および時間  $t$  に関する微分を表す。また、 $\rho$  は異方性弾性体の密度であり、 $C_{ijkl}$  は弾性定数を表す。

通常、異方性弾性波動問題の場合は、弾性定数  $C_{ijkl}$  を直接用いるのではなく、Voigt 記号による弾性定数  $C_{\alpha\beta} (\alpha, \beta = 1, \dots, 6)$  を使った表記法がよく用いられている。 $C_{ijkl}$  と  $C_{\alpha\beta}$  の変換関係は次の式で表わされる。

$$\alpha = \begin{cases} i & : (i = j) \\ 9 - (i + j) & : (i \neq j) \end{cases} \quad (3)$$

$$\beta = \begin{cases} k & : (k = l) \\ 9 - (k + l) & : (k \neq l) \end{cases} \quad (4)$$

### 2.1. 3 次元異方性弾性波動問題における時間領域境界要素法

境界  $S$  上および 3 次元無限異方性弾性体中の変位  $u_i$  は、次の時間領域境界積分方程式を解くことで求まる。

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ij}u_j(\mathbf{x}, t) = & u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y \\ & - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $t_j$  は変位  $u_j$  に対応する表面力を表し、 $*$  は時間に関する畳み込み積分を表す。 $\bar{C}_{ij}$  は境界形状に依存するいわゆる自由項を表す。また、 $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  および  $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  は 3 次元異方性弾性波動問題における基本解および対応する二重層核を表す。これら 3 次元異方性弾性波動問題における時間領域基本解は、Wang と Achenbach により単位球面上の積分を含んだ形で最初に提案され<sup>(11)</sup>、これまでに多くの論文でそれらの誘導や数値的な取扱いについて議論されている<sup>(12)</sup>。本論文は、時間領域の解を導出する新たな境界要素法について述べるものであるが、先に述べたように、直接に時間領域基本解を用いないため、ここではそれらの詳細については省略する。

通常、式 (5) の時間領域境界積分方程式は、時間・空間に関して適切な離散化を施し、逐次的に第一ステップから解を求めていくことが行われるが、以下では、式 (5) の畳み込み積分の評価に、次節で述べる Lubich により提案された CQM を用いた解法について示す。

## 3. Lubich の方法を用いた 3 次元異方性弾性波動問題における時間領域境界要素法

### 3.1. Lubich の Convolution Quadrature Method (CQM)

定式化を示す前に、Lubich の方法について簡単にまとめておく。詳しい条件や証明については文献<sup>(1)(2)</sup>等を参照されたい。

Lubich は、畳み込み積分  $f(t) * g(t)$  を、関数  $f(t)$  のラプラス変換を用いて離散化近似する手法を提案した。一般的に、畳み込み積分は次のように表される。

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (6)$$

Lubich の方法を用いれば、式 (6) は、時間  $t$  を時間増分  $\Delta t$  を用いて  $N$  ステップに分割することで、次のように近似することができる。

$$\begin{aligned} f(n\Delta t) * g(n\Delta t) \simeq & \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t), \\ & (n = 0, 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、 $\omega_j(\Delta t)$  は重み関数であり、畳み込み積分の積分核  $f(t)$  のラプラス変換

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (8)$$

により次のように表される。

$$\omega_n(\Delta t) \simeq \frac{\mathcal{R}^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f}\left(\frac{\delta(\zeta_l)}{\Delta t}\right) e^{-\frac{2\pi i n l}{L}} \quad (9)$$

ここで、 $f$  のラプラス変換  $\hat{f}$  の存在を保証するためには、引数の実部が正のときに正則でなければならない。また、式 (9) の  $\delta(\zeta_l)$  は線形マルチステップ法 (差分法) における生成多項式の商であり、引数  $\zeta_l$  は半径  $\mathcal{R} < 1$  の円周上の  $L$  等分点を考え、 $\zeta_l = \mathcal{R}e^{2\pi i l/L}$  によって表される。そして、 $\mathcal{R}$  は目標とする精度  $\epsilon$  によって決定されるパラメータであり、

$$\mathcal{R} = 10^{\log_{10}(\frac{\epsilon}{2L})} \quad (10)$$

により決定することができる。

### 3.2. CQM を用いた 3 次元異方性弾性波動問題における時間領域境界要素法の定式化

式 (7) を用いて、時間領域境界積分方程式 (5) を離散化することを考える。以下では、境界上の変位  $u_i$  および表面力  $t_j$  を、境界要素上で一定とした場合について説明する。境界  $S$  を  $M$  個の境界要素で離散化し、選点をそれぞれの境界要素中央に取り、式 (5) に式 (7) を用いれば、第  $n$  ステップに関して、次の離散化された境界積分方程式を得ることができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) &= u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n \left[ A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) t_j^\alpha(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u_j^\alpha(k\Delta t) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、右上添字  $\alpha$  は、点  $\mathbf{y}$  に関しての指標を表す。また、 $A_i^m$  および  $B_i^m$  は基本解および二重層核に関する影響関数であり、次のように表わされる。

$$A_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[ \int_S \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (12)$$

$$B_{ij}^m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \left[ \int_S \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) dS_y \right] e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} \quad (13)$$

式 (12), (13) において、 $s_l$  は  $s_l = \delta(\zeta_l)/\Delta t$  で定義される。 $\delta(\zeta_l)$  の取り方はいくつか考えられるが、ここでは、Abreau ら<sup>(13)</sup> と同様に次の式

$$\delta(\zeta) = (1 - \zeta) + \frac{(1 - \zeta^2)}{2} \quad (14)$$

を用いる。一方、 $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  および  $\hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  は次節で説明するラプラス変換域における 3 次元異方性弾性波動問題における基本解および対応する二重層核を表す。影響関数 (12), (13) の積分核は、式 (7), (9) の CQM を用いたことにより、もは

や時間領域ではなく、ラプラス変換域の積分核であることに注意する。式 (11) を第  $n$  ステップにて、境界未知量を左辺に、境界既知量を右辺に移行すれば、次の式を得る。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^M [B_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u_j^\alpha(n\Delta t) - A_{ij}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) t_j^\alpha(n\Delta t)] \\ &= u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} \left[ A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) t_j^\alpha(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u_j^\alpha(k\Delta t) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

式 (15) の第  $n$  ステップにおいて、右辺は境界未知量のみで構成されることから、初期条件により、第一ステップから順番に、最終の第  $N$  ステップまで逐次的に解を求めることが可能である。具体的に、式 (15) の右辺第二項の  $\sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} [A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) t_j^\alpha(k\Delta t)]$  を  $u_i^{R_A, n} = \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} [A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) t_j^\alpha(k\Delta t)]$  とし行列表示すると、次の式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{R_A, 1} \\ \mathbf{u}^{R_A, 2} \\ \mathbf{u}^{R_A, 3} \\ \mathbf{u}^{R_A, 4} \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{R_A, n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{A}^1 \mathbf{t}^1 \\ \mathbf{A}^2 \mathbf{t}^1 + \mathbf{A}^1 \mathbf{t}^2 \\ \mathbf{A}^3 \mathbf{t}^1 + \mathbf{A}^2 \mathbf{t}^2 + \mathbf{A}^1 \mathbf{t}^3 \\ \dots \\ \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{t}^1 + \dots + \mathbf{A}^1 \mathbf{t}^{n-1} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

ここで、 $\mathbf{t}^m$ ,  $\mathbf{u}^{R_A, m}$  は、それぞれ  $t_j^\alpha(m\Delta t)$ ,  $u_i^{R_A, m}$  に関するベクトル表示を表わし、 $\mathbf{A}^m$  は、対応する影響関数から成る小行列を表している。当然、 $\sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} [B_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^\alpha) u_j^\alpha(k\Delta t)]$  についても同様に計算することができる。

### 3.3. 3 次元異方性弾性波動問題におけるラプラス変換域基本解

前節で述べたように、Lubich の方法を用いたことで、時間領域ではなく、ラプラス変換域における基本解が必要となる。3 次元異方性弾性波動問題においても、等方性の弾性波動問題を扱うときと同様に、基本解は特異性を有する静的部分と、正則な動的部分に分離することができる。すなわち、ラプラス変換域における基本解  $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  の静的部分を  $\hat{U}_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ 、動的部分を  $\hat{U}_{ij}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  と表現すれば、次の式が成り立つ。

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \hat{U}_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) + \hat{U}_{ij}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \quad (17)$$

二重層核についても同様に、静的部分、動的部分に分離することができる。式 (17) の静的部分  $\hat{U}_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ 、動的部分  $\hat{U}_{ij}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  は、具体的に次のように表わされる。

$$\hat{U}_{ij}^S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{|\mathbf{n}|=1} \Gamma_{ij}^{-1}(\mathbf{n}) dS(\mathbf{n}) \quad (18)$$

$$\hat{U}_{ij}^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{|\mathbf{n}|=1} \sum_{m=1}^3 \frac{s E_{im} E_{jm}}{\rho c_m^2} e^{-s|\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|} dS(\mathbf{n}),$$

ただし,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} > 0$  (19)

ここで  $r$  は  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  であり,  $c_m$  は 3 次元異方性弾性体中を伝播する弾性波動の波速,  $s$  はラプラスパラメータである. ただし, 式 (19) 中のラプラスパラメータ  $s$  は Lubich の方法を用いるため実際には,  $s = s/c_m$  とすることに注意する. 式 (18) 中の  $\Gamma_{ij}$  は Christoffel テンソルと呼ばれ, 式 (18) における単位球面積分における, 単位球面を表す単位ベクトル  $\mathbf{n}$  を用いて

$$\Gamma_{ip}(\mathbf{n}) = C_{ijpq} n_j n_q \quad (20)$$

で表わされる. ここで, 式 (20) は,  $3 \times 3$  の行列  $\Gamma_{ip}$  を構成する. したがって,  $\Gamma_{ip}$  は最大で 3 つの固有値, および対応する固有ベクトルを有することができる. 式 (19) 中に現れる  $E_{im}$  はそれら 3 つの固有値  $\lambda_m$  に対応する固有ベクトルを表している. ただし, 固有値  $\lambda_m$  は,  $\lambda_m = \rho c_m^2$  の関係があり, 物理的には 3 つの異なる異方性弾性波速度と関連付けることができる.

静的部分および動的部分を表す式 (18), (19) は, いずれも単位球面を表すベクトル  $\mathbf{n}$  を用いた単位球面上の積分から成ることに注意する. 単位球面上のベクトル  $\mathbf{n}$  の球座標系における天頂角と方位角をそれぞれ  $\theta, \phi$  とすれば, 被積分関数  $f(\mathbf{n})$  の単位球面上の積分は, 本研究では, 次のように  $\theta$  方向に対してはガウスの数値積分を,  $\phi$  方向に対しては台形公式を用いて評価する.

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{n}|=1} f(\mathbf{n}) dS(\mathbf{n}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 f(\cos^{-1}(x), \phi) dx d\phi \\ &= \sum_{I=0}^{2p} \sum_{J=1}^{p+1} \eta_I^p f(\phi_I^p, \lambda_J^p) \omega_J^p \end{aligned} \quad (21)$$

ここで,  $\omega_J^p$  は  $p+1$  点のガウスの数値積分における  $J$  番目の積分点の重み,  $\lambda_J^p$  は  $J$  番目の積分点の座標成分に関する逆余弦である. また,  $\phi_I = 2\pi I / (2p+1)$ ,  $\eta_I^p$  は  $\eta_I^p = 2\pi / (2p+1)$  である. このように, 単位球面上の積分は, Lubich の方法を用いようとも, 従来の時間領域や周波数領域における境界要素法同様, 必須となり, それらの数値積分に要する計算時間をいかに短縮するかという点では, 依然として課題が残されている.

また, 二重層核に対しても同様に,

$$\hat{T}_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = C_{kjpq} \hat{U}_{ip,q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) n_j^e(\mathbf{x}) \quad (22)$$

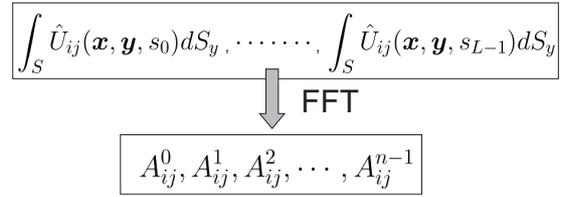


Fig. 2 Fast calculation of influence functions using FFT.

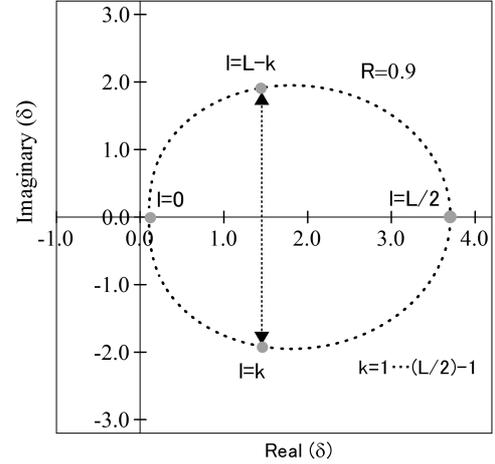


Fig. 3  $\delta(\zeta)$  on the complex plane when  $\mathcal{R} = 0.9$ .

を用いて式 (18), (19) に対応する静的部分, 動的部分を計算することが可能である. ここで  $n_j^e(\mathbf{x})$  は  $\mathbf{x}$  における要素の外向き単位法線ベクトルの成分を表す.

### 3.4. CQM を用いた場合の影響関数の計算

Lubich の方法を用いた影響関数 (12), (13) では, パラメータ  $s_l (l = 0, \dots, L-1)$  についての計算を実行しなければならない. しかしながら, 式 (12), (13) を直接計算し, 式 (16) の小行列  $\mathbf{A}^n$  の各成分を求めることは計算効率の点で好ましくない. そのため, ここでは, 式 (12), (13) の計算法について簡単にまとめておく.

影響関数の計算式 (12), (13) は, フーリエ変換の形式で表わされている. したがって, これらの式 (12), (13) の計算は高速フーリエ変換を実行することで, 計算を高速化することができる. つまり, 実際の計算では, Fig. 2 のように式 (12), (13) を評価する際の高速フーリエ変換の係数 (式 (12), (13) の [ ] 内の計算) を, 最初に各  $l$  について一度だけ求めておけば, それらを高速フーリエ変換することで, 式 (16) の小行列  $\mathbf{A}^m$  の成分を全て求めることができる. よって, 特別な理由がない限りは, 高速フーリエ変換を用いて影響関数式 (12), (13) を計算するために, Lubich の方法におけるパラメータ  $L$  を  $L = N$  とすればよい.

一方, 各  $l$  について一度だけ求めるフーリエ変換の係数も  $l = 0, \dots, L-1$  に対して全てを計算する必要はない. Fig. 3 は 3 次元異方性弾性波動問題の動的部分を支配する, 式 (14) で表わされた引数  $\delta(\zeta)$  を  $\mathcal{R} = 0.9$  の場合について, 複素平面上に

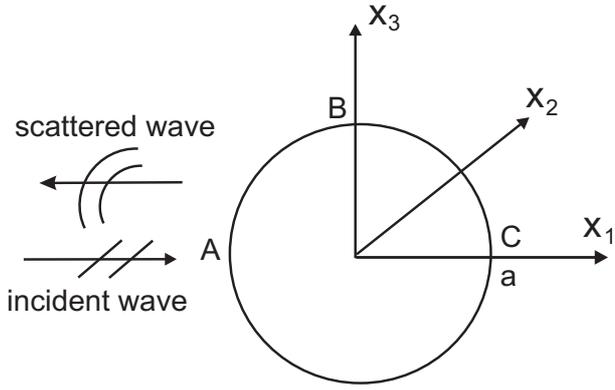


Fig.4 Elastic wave scattering by a cavity with radius  $a$ .

プロットしたものを表している. 引数  $\delta(\zeta)$  は,  $\Re[\delta(\zeta)] > 0$  の範囲内で,  $l = 0$  において原点付近から, 反時計周りに  $l = L/2$  で実軸を横切り  $l = L-1$  まで歪んだ円形の軌跡を描く. このとき, 複素平面上的  $\Im[\delta(\zeta)] > 0$  に対応する  $l > L/2$  の部分は実軸に関して対称であり,  $\Im[\delta(\zeta)] < 0$  に対応する  $l < L/2$  の部分と複素共役の関係にある. 式 (19) で表わされる動的部分は, この  $\delta(\zeta)$  を含んだ複素変数  $s$  により支配されていることから, 式 (12), (13) で表わされた影響関数の計算値も複素共役の関係になる. したがって, 影響関数 (12), (13) を計算する際, まず,  $l = 0 \dots L/2$  について, 式 (12), (13) の [] 内の値を計算しておき, 残りの  $L/2+1$  から,  $L-1$  については  $l = 1 \dots L/2-1$  の結果の複素共役を用いれば, 計算時間をさらに節約することができる.

#### 4. 数値解析例

以下, 数値解析例を示す. Fig.4 のような半径  $a$  の球状の空洞による入射平面波の散乱問題について考える. 以下の解析では, 空洞を要素数 512 の三角形一定要素で離散化した. また, Lubich の方法における各計算パラメータは, 前節で述べたように,  $L = N$  とし, パラメータ  $\mathcal{R}$  は式 (10) において  $\epsilon = 1.0e^{-10}$  として計算した値を用いた.

先に述べたように, 3次元異方性弾性波動問題において, ラプラス変換域における閉じた基本解を求めることは困難である. そのため, 単位球面上の積分を精度良く計算するためには, 多大な計算時間が必要となるが, 本研究では, 計算を少しでも高速化するために, OpenMP を用いて係数行列の作成部分を並列化した.

##### 4.1. 等方性パラメータを用いた計算精度の確認

3次元異方性弾性波動問題の基本解 (18), (19) は弾性定数  $C_{ijkl}$  を含んでいる. 異方性弾性波動解析の場合は, 異方性パラメータを Voigt 記号を用いて与える場合が多い<sup>(14)</sup>. そのため, 本解析では, まず, Voigt 記号による  $C_{\alpha\beta}$  を与え, それらを  $C_{ijkl}$  に変換することで, 実際の計算を行うという手順を踏むこととする. ここでは,  $C_{\alpha\beta}$  に等方性材料のパラメータを代入することで, 本手法の計算精度を確認する.

実用的には, Voigt 表記による弾性定数を用いた場合,  $C_{11} =$

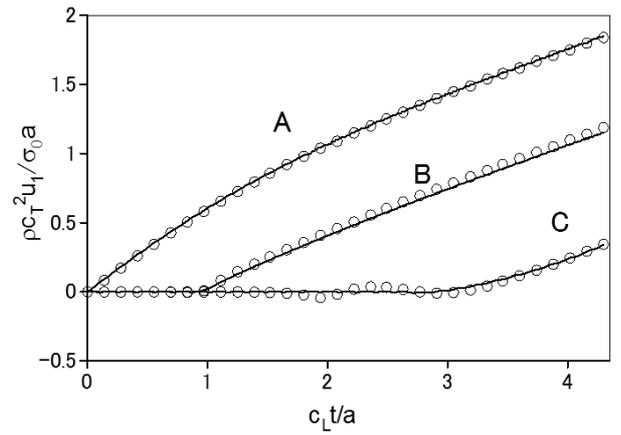


Fig.5 Time variations of the total displacements on A, B and C on Figure 4.

$C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu, C_{12} = C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{31} = C_{32} = \lambda, C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu$  (その他の成分はゼロ) とすることで, 解くべき問題は, ラメ定数を  $\lambda, \mu$  とした 3次元無限等方弾性体における空洞による散乱問題と等価なものになる.

ここでは, 入射波  $u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t)$  は, 次式で与えられる平面波を用いた.

$$u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) = \delta_{i1} \frac{\sigma_0}{\rho c_L^2} [(c_L t - x_1 - a) H(c_L t - x_1 - a)] \quad (23)$$

ここで,  $\delta_{ij}$  はクロネッカーデルタ,  $\sigma_0$  は入射波の応力振幅を表わし,  $c_L$  は  $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  で定義される縦波の波速を表す. また,  $H$  はステップ関数である.

さて, 周波数領域における等方性の 3次元弾性波動問題において, 入射平面波による空洞による散乱問題の解は, Pao と Mow<sup>(15)</sup> により与えられている. したがって, 時間領域における解は, これら周波数領域の解を逆フーリエ変換することで数値解を得ることができる.

Fig.5 は Fig.4 における境界上の点 A(-a,0,0), B(0,0,a), C(a,0,0) における変位の時刻歴を表している. ただし, 実線は Pao と Mow の提案手法を援用した数値解, 記号は本手法で得られた解を表しており, 等方性弾性波動問題においては, ポアソン比  $\nu$  は  $\nu = c_L/c_T = \sqrt{3}$  で与えられる場合に相当する. ここで,  $c_T$  は横波の波速である. また, 時間増分は  $c_L \Delta t/a = 0.08$  とし, 総時間ステップ数は  $N = 32$  とした. 計算時間を少しでも短縮するために, OpenMP を用いた 16 スレッドによる並列化を行い, 計算を高速化している. Fig.5 より, 本手法による結果は, Pao と Mow の解を援用した数値解と良く一致していることがわかる.

一方, Table.1 は, 本解析に要した計算時間と OpenMP を用いた際の並列数との関係を示している. 並列化を行わない場合は, 総時間ステップ数が  $N = 32$  と少ないにも関わらず, 計算時間に 10 日以上を要している. しかしながら, 並列数を使用計算機の最大スレッド数である 16 とすることにより, 計算

Table 1 Required computational time.

	並列化なし	4 並列	16 並列
計算時間 (hours)	259.8	66	16.6

時間を 1 日以内に短縮して計算を実行することができた。

## 5. 結論および今後の展望

本論文では, Lubich の Convolution Quadrature Method (CQM) を用いた新しい時間領域境界要素の定式化を示し, 簡単な数値解析例を示した. 本手法では, 時間領域基本解を直接用いるのではなく, ラプラス変換域における基本解を用いている. そのため, 扱う関数の数値的取扱いの違いはあるものの, 各時間ステップ毎の計算は, 概ね周波数領域における 3 次元異方性弾性波動問題と同等となり, 従来法より容易に解を導くことができる.

一方で, 従来の 3 次元異方性弾性波動問題に対する時間領域境界要素法と同様, 計算効率という点では, 課題が残されている. 今後は, より具体的に異方性パラメータを与えた計算を進め, 高速多重極法<sup>(16)</sup>等を用いた計算効率を改善する方法についても検討していきたい. また, 基本解の扱いやすさという点で, 2 次元問題に先行して 3 次元問題の解析を行ったが, 一般の 2 次元異方性弾性波動問題への Lubich の方法の適用も今後の課題である.

## 謝辞

本研究を行うにあたり, University of Siegen, Germany の Prof. Zhang より多くの助言をいただきました. また, 本研究は, 第一著者に対する, みずほ学術振興財団第 53 回工学関係研究助成のご支援の下, 行われたものです. この場を借りて感謝申し上げます.

## 参考文献

- (1) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I *Numer. Math.*, **52**, (1988), pp. 129-145.
- (2) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus II, *Numer. Math.*, **52**, (1988), pp. 413-425.
- (3) Lubich, C. : On the multistep time discretization of linear initial boundary value problems and their boundary integral equations, *Numer. Math.*, **67**, (1994),
- (4) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, (2000).
- (5) 斎藤隆泰・廣瀬壯一・福井卓雄・石田貴之: 三次元スカラー波動および弾性波動問題における演算子積分時間領域境界要素法, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.10, (2007), pp.217-224.
- (6) 斎藤隆泰・石田貴之・福井卓雄・廣瀬壯一: 演算子積分法および高速多重極法を用いた新しい二次元時間領域動弾性境界要素法について, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.11, (2008), pp.193-200.
- (7) 斎藤隆泰・石田貴之・福井卓雄・廣瀬壯一: 粘弾性面外波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算工学論文集, (2008), 原稿番号 200803031.
- (8) Saitoh, T., Hirose, S. and Fukui, T. : Convolution quadrature boundary element method and acceleration by fast multipole method in 2-D viscoelastic wave propagation, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, **57**, (2009), pp. 385-393.
- (9) Schanz, M. and Struckmeier, V. : Wave propagation in a simplified modelled poroelastic, continuum : Fundamental solutions and a time domain boundary element formulation, *Numer. Math.*, **64**, (2005), pp. 1816-1839.
- (10) Zhang, Ch.: Transient elastodynamic antiplane crack analysis of anisotropic solids, *Int. J. Solids and Structures*, **37**, (2000), pp. 6107-6130.
- (11) Wang, C.-Y. and Achenbach, J. D. : Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids, *Geophys. J. Int.*, **118**, (1994), pp.384-392.
- (12) Tan, A. T. and Hirose, S. : 3D time domain boundary element formulation for anisotropic elastic solids, *Trans. of JAS-COME*, **7-2**, (2008), pp.285-290.
- (13) Abreu, A. I., Carrer, J. A. M. and Mansur, W. J. : Scalar wave propagation in 2D: a BEM formulation based on the operational quadrature method, *Engineering analysis with Boundary Elements*, **27**, (2003), pp. 101-105.
- (14) Gaul, L., Kögl, M. and Wagner, M. : Boundary Element Methods for Engineers and Scientists, Springer, (2003).
- (15) Pao, Y.-H. and Mow, C. C.: Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations, Crane and Russak, New York, (1973).
- (16) Nishimura, N. : Fast multipole accelerated boundary integral equation methods, *Appl. Mech. Rev.*, **55**, (2002), pp. 299-324.