

# 開放型電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いた ハイブリッド・トレフツ有限要素解析法

HYBRID TREFFTZ FINITE ELEMENT METHOD USING SAKURAI-SUGIURA PROJECTION  
METHOD FOR OPEN-TYPE ELECTROMAGNETIC WAVEGUIDE EIGENVALUE PROBLEMS

森田 好人<sup>1)</sup>, 嶋田 賢男<sup>2)</sup>, 長谷川 弘治<sup>3)</sup>, 佐藤 慎悟<sup>4)</sup>

Yoshihito MORITA, Takao SHIMADA, Koji HASEGAWA and Shingo SATO

- 1) 室蘭工業大学工学部電気電子工学科 (〒 050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail:s1924209@mmm.muroran-it.ac.jp)  
 2) 室蘭工業大学大学院工学研究科 (〒 050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail:s2092003@mmm.muroran-it.ac.jp)  
 3) 室蘭工業大学大学院もの創造系領域 (〒 050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail:khasegaw@mmm.muroran-it.ac.jp)  
 4) 北見工業大学工学部電気電子工学科 (〒 090-8507 北見市公園町 165, E-mail:s-sato@mail.kitami-it.ac.jp)

An improvement of hybrid Trefftz finite element method (HTFEM) for electromagnetic wave propagation problems in periodic waveguiding structures is reported. Removing the good initial guess required for the solving eigenvalue problem, we replace the downhill simplex method with the Sakurai-Sugiura projection method (SSM) which is one of nonlinear eigenvalue problem solvers. Therefore, we may compute all eigenvalues in the scope without time-consuming preparations for the initial guess. Numerical results of periodic metallic electrodes on the dielectric waveguide as a frequency selective surface show usefulness of HTFEM with SSM.

**Key Words:** Hybrid Trefftz Finite Element Method, Electromagnetic Wave, Periodic Structure, Nonlinear Eigenvalue Problem, Sakurai-Sugiura Projection Method

## 1. はじめに

有限要素法は領域型解析法であるので、半無限領域の扱いになんらかの工夫が必要である。電磁波の反射がない状態を有限領域内で実現するために、完全整合層で解析領域を囲んだり、吸収境界条件を領域端に適用するなどの方法がある。また無限領域全体を取り扱うために、無限領域用の特殊な要素を採用する方法がある。本論文で扱うハイブリッド・トレフツ有限要素法 (Hybrid Trefftz Finite Element Method: HTFEM)<sup>(1)~(10)</sup> は、この特殊な要素の一例である。HTFEM は要素境界上での連続条件をラグランジュの未定係数法で汎関数に組み込むので、補関数の異なる要素の併用が可能であり、領域ごとに最適な補関数を選ぶことができる。例えば、不連続領域に対しては多項式を用いる通常要素で分割を行い、一様均質領域に対しては系の支配方程式を満足する空間高調波展開を用いたトレフツ要素 1 つで分割できる<sup>(5)~(10)</sup>。この手法の利点として、吸収境界条件を設定する場合や完全整合層を用いる場合のように接続境界を媒質から離す必要がないため、分割数を減らすことができ、未知

数を大幅に低減できる<sup>(8)</sup>。しかし、伝搬定数を求める場合、非線形固有値問題に帰着する欠点がある<sup>(9, 10)</sup>。

これまで著者らは、行列の条件数が発散する値を滑降シンプレクス法で探索して、非線形固有値問題の解を求めてきた。滑降シンプレクス法は、複数の固有値がある問題では、求まる解が初期値に依存する。このため、行列の条件数の伝搬定数依存性の概略を調べておき、求める固有値付近で条件数が大きい値を初期値に選定する必要がある。しかしながら、伝搬定数の近傍で急激に発散する場合には、適切な初期値を得難い場合があった。一方、正則な行列関数の非線形固有値問題に対して開発された Sakurai-Sugiura projection method (SS 法)<sup>(11)~(13)</sup> は、指定した領域内の全固有値とその固有ベクトルを確実に求めることができる。このため、探索法での欠点であった初期値依存性がない。

本論文では、周回積分を用いた非線形固有値問題解法である SS 法を HTFEM に基づく伝搬問題の解析に適用し、数値例から SS 法の有用性を確認したので、その結果を報告する。

## 2. 問題の設定

Fig.1 に示すようなカバー層 (比誘電率  $\epsilon_1$ , 比透磁率  $\mu_1$ ,

$h < y$ ), 完全導体電極による周期摂動部 (比誘電率  $\varepsilon(x, y)$ , 比透磁率  $\mu(x, y)$ ,  $0 \leq y \leq h$ ), 導波層 (比誘電率  $\varepsilon_2$ , 比透磁率  $\mu_2$ ,  $-d \leq y < 0$ ), 基板 (比誘電率  $\varepsilon_3$ , 比透磁率  $\mu_3$ ,  $y < -d$ ) からなる周期構造誘電体スラブ導波路 (構造周期  $p$ , 電極幅  $w$ , 電極厚み  $h$ , 導波層厚み  $d$ ) の伝搬問題を考える. 電磁界を複素表示して時間依存性を  $\exp(j\omega t)$  とし,  $z$  軸方向の界の変化を一様 ( $\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$ ) とする. 構造が  $x$  軸方向に周期的なので, フロケの定理により電磁界の成分  $\phi(x, y, z)$  は, 複素伝搬定数を  $\gamma = \beta - j\alpha$  とすると, 周期関数  $\tilde{\phi}(x+p, y) = \tilde{\phi}(x, y)$  を用いて  $\phi(x, y, z, t) = e^{j(\omega t - \gamma x)} \tilde{\phi}(x, y)$  と表される. ここに,  $\beta$  は位相定数,  $\alpha$  は減衰定数である. また,  $j$  は虚数単位である. 構造の周期性から, 導波路1周期分 ( $x_0 \leq x \leq x_0 + p$ ) を解析する. 無限遠方の境界  $\Gamma_1, \Gamma_4$  には放射条件, 境界  $\Gamma_5(x = x_0), \Gamma_6(x = x_0 + p)$  には Bloch 条件を課す. なお, 境界  $\Gamma_2$  は一様なカバー層と周期摂動部を含む領域との境界 (線分  $y = h, x_0 \leq x \leq x_0 + p$ ) であり,  $\Gamma_3$  は導波層と周期摂動部を含む領域との境界 (線分  $y = 0, x_0 \leq x \leq x_0 + p$ ) である.

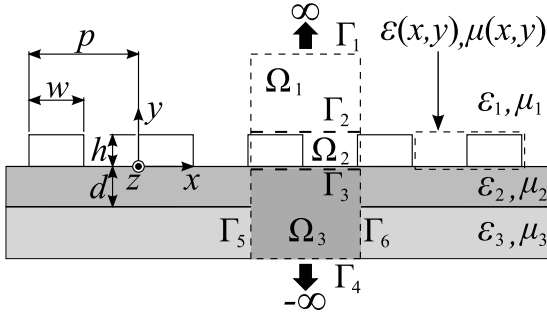


Fig. 1 Metallic grating on a dielectric slab waveguide

### 3. ハイブリッド・トレフツ有限要素法による定式化

散乱問題を対象に定式化が報告されている<sup>(5)~(7)</sup>ので, 本論文では簡単に記述する. 解析領域を Fig.1 に示すようにカバー層の上部である半無限領域  $\Omega_1$ , 導波層と基板からなる半無限領域  $\Omega_3$ , 周期摂動部を含む領域  $\Omega_2$  に分割する. 領域  $\Omega_1, \Omega_3$  はトレフツ要素1個で,  $\Omega_2$  は多項式を補間関数とする通常要素で分割を行う. この分割での汎関数  $I$  は,

$$I = \int_{\Omega_2} \left[ \nabla \times \vec{E}^t \cdot \frac{1}{\mu(x, y)} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \varepsilon(x, y) \vec{E}^t \cdot \vec{E} \right] d\Omega + \frac{j\omega}{2} \int_{\partial\Omega_1 + \partial\Omega_3} \left[ \hat{n} \cdot (\vec{E}^t \times \vec{H}) - \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^t) \right] ds - j\omega \int_{\partial\Omega_1 + \partial\Omega_3} \left[ \hat{n} \cdot (\vec{E}^t \times \vec{H}) - \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^t) \right] ds \quad (1)$$

となる. ここで,  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{E}^t$  はそれぞれ, 電界ベクトル, 磁界ベクトル, 連続条件を緩和する境界  $\Gamma_2, \Gamma_3$  上の電界ベクトルであり,  $k_0$  は真空中の波数,  $\omega$  は角周波数,  $\hat{n}$  は線積分素  $ds$  の外向き単位法線ベクトルである. 積分  $\int_{\Omega_2} d\Omega$  は領域  $\Omega_2$  での面積分,  $\int_{\partial\Omega_1 + \partial\Omega_3} ds$  は領域  $\Omega_1, \Omega_3$  を囲む境界  $\partial\Omega_1, \partial\Omega_3$  上での周回積分, 上添字  $t$  はトランスポーズ界<sup>(14)</sup>を表す. なお領域  $\Omega_1, \Omega_3$  を囲む境界  $\partial\Omega_1, \partial\Omega_3$  は, 境界

$\Gamma_i (i = 1, \dots, 6)$  で表すと  $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + (\Gamma_5 + \Gamma_6) \cap (h \leq y)$ ,  $\partial\Omega_3 = \Gamma_3 + \Gamma_4 + (\Gamma_5 + \Gamma_6) \cap (y \leq 0)$  となる.

不均質領域  $\Omega_2$  を Fig.2 に示す4節点4辺矩形要素<sup>(15)</sup>で分割し, 各要素内での電界の  $x, y, z$  成分を

$$E_k = \{U_k\} \{E_k\}, \quad k = x, y, z \quad (2)$$

と多項式近似する. ここに,  $\{U_k\}$  は要素の補間関数ベクトルであり,  $\{E_x\}, \{E_y\}$  は要素内における各辺上の電界ベクトルの  $x, y$  成分,  $\{E_z\}$  は要素内における各節点での電界ベクトルの  $z$  成分である.

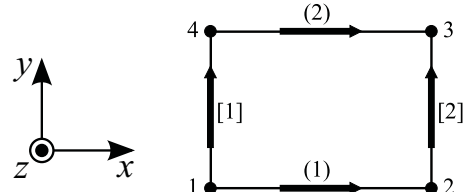


Fig. 2 Rectangular element with 4-edges and 4-nodes

汎関数  $I$  に含まれる領域  $\Omega_2$  での面積分項からは, 伝搬定数  $\gamma$  を含まない正方形行列と未知列ベクトル  $\{\vec{E}^t(x, y)\}, \{\vec{E}(x, y)\}$  の積が得られるが, 境界  $\Gamma_5(x = x_0), \Gamma_6(x = x_0 + p)$  の Bloch 条件  $\vec{E}(x_0 + p, y) = \vec{E}(x_0, y) \exp(-j\gamma p)$ ,  $\vec{E}^t(x_0 + p, y) = \vec{E}^t(x_0, y) \exp(j\gamma p)$  を電界ベクトルに課して  $\{\vec{E}(x_0 + p, y)\}, \{\vec{E}^t(x_0 + p, y)\}$  を除去すると,  $\exp(-j\gamma p), \exp(j\gamma p)$  を成分に含む正方形行列と未知列ベクトルの積となる.

次に領域  $\Omega_1, \Omega_3$  を分割するトレフツ要素の補間関数を, 放射条件と Bloch 条件を満足する平面波解となるように空間高調波展開すると, カバー層 ( $i = 1$ ) で,

$$E_{z,1}(x, y) = \sum_{n=-M_c}^{M_c} A_{n,1} f_{n,1}(x, y), \quad (3)$$

$$H_{z,1}(x, y) = \sum_{n=-M_c}^{M_c} B_{n,1} f_{n,1}(x, y) \quad (4)$$

となり, 導波層 ( $i = 2$ ) で,

$$E_{z,2}(x, y) = \sum_{n=-M_c}^{M_c} A_{n,2} \left[ f_{n,2}(x, y) + R^{\text{TE}} f_{n,2}(x, y) \right], \quad (5)$$

$$H_{z,2}(x, y) = \sum_{n=-M_c}^{M_c} B_{n,2} \left[ f_{n,2}(x, y) + R^{\text{TM}} f_{n,2}(x, y) \right] \quad (6)$$

となり, 基板 ( $i = 3$ ) で,

$$E_{z,3}(x, y) = \sum_{n=-M_c}^{M_c} A_{n,3} f_{n,3}(x, y) = \sum_{n=-M_c}^{M_c} T^{\text{TE}} A_{n,2} f_{n,3}(x, y), \quad (7)$$

$$H_{z,3}(x, y) = \sum_{n=-M_c}^{M_c} B_{n,3} f_{n,3}(x, y) = \sum_{n=-M_c}^{M_c} T^{\text{TM}} B_{n,2} f_{n,3}(x, y) \quad (8)$$

となる。ここに、 $M_c$  は展開を打ち切るモード次数、 $A_{n,i}$ ,  $B_{n,i}$  はそれぞれ電界、磁界の展開係数である。 $R^{\text{TE}}$ ,  $R^{\text{TM}}$ ,  $T^{\text{TE}}$ ,  $T^{\text{TM}}$  は、導波層側から平面波が入射するものとした導波層と基板の境界における反射係数と透過係数であり、上添字  $^{\text{TE}}$ ,  $^{\text{TM}}$  は TE 成分, TM 成分に関する量であることを表す。また透過係数の参照面は、 $A_{n,3} = T^{\text{TE}} A_{n,2}$ ,  $B_{n,3} = T^{\text{TM}} B_{n,2}$  となるように定めた。 $f_{n,i}$  は

$$f_{n,i}(x, y) = \exp(-\gamma_n x + \kappa_{n,i} y), \quad (9)$$

$$\gamma_n = j \left( \gamma + \frac{2\pi}{p} n \right) \quad (10)$$

であり、 $\kappa_{n,i}$  は  $\pm j \sqrt{k_0^2 \varepsilon_i \mu_i + \gamma_n^2}$  のうち物理的に適切な方を用いる。補関数が Bloch 条件と放射条件を満足するので、汎関数  $I$  の周回積分項の径路  $\partial\Omega_1 + \partial\Omega_3$  は境界  $\Gamma_2 + \Gamma_3$  となる。境界  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  上の電界  $\vec{E}$  と領域  $\Omega_2$  の境界上の電界が一致するように離散化すると、結局、汎関数  $I$  の周回積分項  $I_c$  は、カバー層 ( $i=1$ ) と導波層 ( $i=2$ ) の未知の展開係数の列ベクトル  $\{A_{n,i}\}$ ,  $\{B_{n,i}\}$ , 境界  $\Gamma_{i+1}$  上の電界の未知列ベクトル  $\{\tilde{E}_i\}$  と伝搬定数  $\gamma$  の関数を成分に含む行列の積となり、

$$\begin{aligned} I_c &= I_1 + I_2 \\ I_i &= \frac{j\omega}{2} \int_{\Gamma_{i+1}} \left[ \hat{n} \cdot (\vec{E}^t \times \vec{H}) - \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^t) \right] ds \\ &\quad - j\omega \int_{\Gamma_{i+1}} \left[ \hat{n} \cdot (\vec{E}^t \times \vec{H}) - \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^t) \right] ds \\ &= \{F_i^t\} [G_i(\gamma)] \{F_i\} + \{\tilde{E}_i^t\} [L_i(\gamma)] \{F_i\} \\ &\quad + \{F_i^t\} [L_i^t(\gamma)] \{\tilde{E}_i^t\} \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (11)$$

である。ここで、 $\{F_i\}$  は空間高調波展開の未知係数からなる列ベクトルであり、

$$\{F_i\} = \left\{ \{A_{n,i}\}^T \quad \{B_{n,i}\}^T \right\}^T \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

である。式 (11) が  $\{F_i\}$ ,  $\{F_i^t\}$ ,  $\{\tilde{E}_i\}$ ,  $\{\tilde{E}_i^t\}$  を変分量として含んでいることに注意し、まず、 $\{F_i\}$ ,  $\{F_i^t\}$  に関して変分をとると、

$$\{F_i\} = - [G_i(\gamma)]^{-1} [L_i^t(\gamma)] \{\tilde{E}_i\}, \quad (13)$$

$$\{F_i^t\} = - \{\tilde{E}_i^t\} [L_i(\gamma)] [G_i(\gamma)]^{-1} \quad i = 1, 2 \quad (14)$$

が得られ、式 (13), (14) を式 (11) へ代入すると、

$$I_i = - \{\tilde{E}_i^t\} [L_i(\gamma)] [G_i(\gamma)]^{-1} [L_i^t(\gamma)] \{\tilde{E}_i\} \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

を得る。

最終的に解くべき非線形固有値問題の行列方程式は、次の手順で得る。はじめに展開係数  $\{A_{n,i}\}$ ,  $\{B_{n,i}\}$  に関して汎関数  $I$  の変分をとり、領域  $\Omega_1$ ,  $\Omega_3$  に関する汎関数  $I_1$ ,  $I_2$  の式 (15) を得る。次にこの式と通常多項式有限要素で離散化した汎関数の表現式とを重ね合わせ、領域  $\Omega_2$  の未知列ベクトルに関する表現式に整理し、この未知列ベクトルに関して変分をとると

$$[T(\gamma)] \{E\} = \{0\} \quad (16)$$

と得られる。ここで、 $\{E\}$  は離散化した領域  $\Omega_2$  の電界未知列ベクトル、 $N$  行  $N$  列の  $[T(\gamma)] \in \mathbb{C}^{N \times N}$  は  $\gamma$  について正則な行列関数であり、

$$[T(\gamma)] = [A_0] + [A_+] e^{-j\gamma p} + [A_-] e^{j\gamma p} + [g_{kl}(\gamma)] \quad (17)$$

である。行列  $[A_0]$ ,  $[A_+]$ ,  $[A_-]$  は、定数を要素とする正方行列であり、4 節点 4 辺矩形要素による汎関数評価に起因する。 $[g_{kl}(\gamma)]$  は、 $k$  行  $l$  列要素が  $\gamma$  に関する代数関数、有理関数、指数関数を含む正方行列であり、トレフツ要素に起因する。

#### 4. 周回積分を用いた非線形固有値問題の解法<sup>(12)</sup>(SS 法)

本節では、数値計算に必要なパラメータを説明するために、Asakura らの文献<sup>(12)</sup>に従い解法の概略を述べる。なお SS 法には、近接した固有値計算が可能なように改良したブロック版が提案されているが、本論文ではプログラム作成が容易な非ブロック版を用いる。

非線形固有値問題の式 (16) を解くことを考える。

$\tilde{\Gamma} \in \mathbb{C}$  を正の向きをもつ Jordan 曲線とし、 $\gamma_l (l = 1, 2, \dots, m)$  を  $\tilde{\Gamma}$  内にある式 (16) の相異なる固有値とする。零ベクトルでない  $N$  行 1 列の列ベクトル  $\{V\} \in \mathbb{C}^N$  に対して関数  $f(\gamma)$ , 複素モーメント  $\mu_k$  を

$$f(\gamma) = \{V\}^H [T(\gamma)]^{-1} \{V\}, \quad (18)$$

$$\mu_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{\tilde{\Gamma}} \gamma^k f(\gamma) d\gamma, \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1 \quad (19)$$

と定義する。ここで、上添字 H,  $-1$  はそれぞれ、複素共役行列、逆行列を表す。Hankel 行列  $[H_m]$  とその要素がシフトした Hankel 行列  $[H_m^<]$  を

$$[H_m] = [\mu_{i+j-2}]_{i,j=1}^m = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{m-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m-1} & \mu_m & \cdots & \mu_{2m-2} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$[H_m^<] = [\mu_{i+j-1}]_{i,j=1}^m = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m \\ \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{2m-1} \end{pmatrix} \quad (21)$$

とする。求める固有値  $\gamma_l$  は一般化固有値問題  $\{[H_m^<] - \gamma[H_m]\} \{w\} = \{0\}$  の固有値として求まる。この固有値問題の固有値  $\gamma_l$  に対応する  $\{[H_m^<] - \gamma[H_m]\} \{w\} = \{0\}$  の固有ベクトルを  $\{w_l\}$  とすると、 $[T(\gamma)]$  の固有ベクトル  $\{x_l\}$  は

$$\{x_l\} = [\{s_0\}, \{s_1\}, \dots, \{s_{m-1}\}] \{w_l\}, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (22)$$

$$\{s_k\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\tilde{\Gamma}} \gamma^k [T(\gamma)]^{-1} \{V\} d\gamma \quad (23)$$

と求まる。

#### 5. 積分路が円の場合の SS 法

計算の簡単化のため、固有値を求める領域を円とし、積分路  $\tilde{\Gamma}$  を、中心  $o$ 、半径  $\rho$  の円とする。Hankel 行列を数値計算するために、台形公式で式 (19) を数値積分すると、

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{N_s} \sum_{h=0}^{N_s-1} \left( \frac{c_h - o}{\rho} \right)^{k+1} f(c_h), \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1 \quad (24)$$

となる。ここに標本点は、円周上の  $N_s$  個の等間隔点

$$c_h = o + \rho e^{\frac{2\pi j}{N_s}(h+1/2)}, \quad h = 0, 1, \dots, N_s - 1 \quad (25)$$

とし、関数値

$$f(c_h) = \{V\}^H [T(c_h)]^{-1} \{V\}, \quad h = 0, 1, \dots, N_s - 1 \quad (26)$$

とした。また積分路  $\tilde{\Gamma}$  を単位円に移してある。この単位円上で近似評価した Hankel 行列を

$$[\hat{H}_m] = [\hat{\mu}_{i+j-2}]_{i,j=1}^m, \quad (27)$$

$$[\hat{H}_m^<] = [\hat{\mu}_{i+j-1}]_{i,j=1}^m \quad (28)$$

とすると、求める  $[T(\gamma)]$  の近似固有値  $\hat{\gamma}_l$  は、一般化固有値問題  $\{[\hat{H}_m^<] - \zeta[\hat{H}_m]\}\{\hat{w}\} = \{0\}$  の固有値  $\hat{\zeta}_l (l = 1, 2, \dots, m)$  から

$$\hat{\gamma}_l = o + \rho \hat{\zeta}_l, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (29)$$

と求まり、固有ベクトル  $\{\hat{x}_l\}$  は

$$\{\hat{x}_l\} = [\{\hat{s}_0\}, \{\hat{s}_1\}, \dots, \{\hat{s}_{m-1}\}]\{\hat{w}_l\}, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (30)$$

と求まる。ここに、 $\{\hat{w}_l\}$  は一般化固有値問題  $\{[\hat{H}_m^<] - \zeta[\hat{H}_m]\}\{\hat{w}\} = \{0\}$  の  $\hat{\zeta}_l$  に対応する固有ベクトルで、

$$\{\hat{s}_k\} = \frac{1}{N_s} \sum_{h=0}^{N_s-1} \left( \frac{c_h - o}{\rho} \right)^{k+1} [T(c_h)]^{-1} \{V\} \quad (31)$$

である。

Hankel 行列の次数は、積分径路内の固有値の個数  $m$  である。しかしながら、 $M \geq m$  である  $M$  を推定し、 $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_M$  を Hankel 行列  $[\hat{H}_M]$  の特異値、 $\delta$  を小さな値として  $K$  個の特異値が  $\sigma_i \geq \delta (i = 1, 2, \dots, K)$ 、残りの  $M - K$  個が  $\sigma_i < \delta (i = K + 1, \dots, M)$  となる  $K$  を定め、本節の手続き中の  $m$  を  $K$  に置き換えると、十分な精度の固有値が得られる<sup>(11)</sup>。

以上から、非ブロック版 SS 法の実行に必要な設定値は、以下となる。 $\gamma$  の複素平面上の積分径路に関しては中心  $o$  と半径  $\rho$ 、積分の標本点数  $N_s$  と、最終的に解く Hankel 行列の次数  $K$  を定めるための、整数  $M$  と値  $\delta$  である。なお列ベクトル  $\{V\}$  の成分は、ランダム関数で発生させて良い。

## 6. 数値解析例

Fig.1 に示す完全導体を周期的に装荷した三層誘電体スラブ導波路 ( $k_0 p = 2.1$ ,  $d = 0.5p$ ,  $w = 0.5p$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1.0$ ,  $\epsilon_2 = 11.8$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1.0$ ) の伝搬問題を考える。分割数は  $x, y$  軸方向ともに 32 等分割とし、完全導体電極内に電磁界は侵入しないので、不連続領域  $\Omega_2$  の真空部分のみを

512 個の 4 節点 4 辺矩形要素で分割し、境界  $\Gamma_2, \Gamma_3$  を 32 個の線要素で分割する。また、トレフツ要素の空間高調波展開の打ち切りモード次数  $M_c = 32$  とした。これは、HTFEM の平面波散乱問題の解析結果<sup>(5)</sup> から、計算結果の精度はモード数よりも伝搬方向分割数の依存性が大きく、モード数は接続境界  $\Gamma_2, \Gamma_3$  上の離散化電界の未知数個程度で十分なことが分っているためである。

はじめに固有値数  $K$  の  $M, \delta$  依存性を調べる。Table 1 は、電極厚み  $h/p = 0.5$ 、SS 法の積分路の中心を  $op = 5.6 - j0.2$ 、半径を  $\rho p = 0.4$  として調べたものである。この問題の伝搬定数は、TE 波ならびに TM 波に対応する  $\gamma p = 5.70243 - j0.03545, 5.40284 - j0.33514$  の 2 つである。標本点数が 16, 32 と少ない場合には、固有値数  $K = 2$  とはならず、積分径路外の解を含んだ  $K$  値が求まる。これは、径路積分の精度が不足しているため、混入したものと考えられる。 $\delta = 10^{-9}$ 、 $M = 8$  の場合には、標本点数を 1024 と多くしても、積分径路内に不要解が 1 個含まれ、 $K = 3^*$  となる。この不要解は伝搬方向に界が増幅するものである。他の場合にも不要解があるが、いずれも物理的見地から除去可能である。以上から、設定値  $M, \delta$  によっては  $K > m$  となるが、算出した伝搬定数、界を吟味すると、積分径路内の全解が求まることが判った。

Table 2 は、同一の設定 (電極厚み  $h/p = 0.5$ 、SS 法の積分路の中心を  $op = 5.6 - j0.2$ 、半径を  $\rho p = 0.4$ ) での、 $\delta = 10^{-9}$ 、 $M = 8$  とした場合に計算時間を調べたものである。固有値を  $K$  個とその固有ベクトルならびに固有ベクトルから求まる領域  $\Omega_2$  内の電界ベクトルと空間高調波展開の係数を求めるのに要した時間 (プログラムの全実行時間) と複素モーメント 1 個の計算時間を示した。用いた計算機は、インテル Core™ i5-750 (基本周波数 2.66GHz, 4 コア 4 スレッド) CPU、主記憶 8G バイトを備えている。行列計算は Intel® Math Kernel Library を用いて並列化されている。標本点数に依らず、SS 法の計算時間は、ほぼ複素モーメント 1 個 (ハンケル行列要素 1 個) の評価時間となっている。また、各要素の評価時間は、標本点 1 個あたりの関数値を計算する時間の約 2.61 秒のおおよそ標本点数倍となっている。たとえば、標本点数  $N_s$  が 16, 1024 の 2.61 倍は、41.76, 2672 であり計測した時間 44, 2777 に近い値である。これは、次のように考えられる。SS 法で最終的に解く線形一般化固有値問題の行列の次元数  $K$  は、ほぼ固有値数に過ぎず計算時間は短い。他方、線形固有値問題の行列要素は、式 (24), (26) で計算するために、標本点ごとに行列  $[T^{-1}(\gamma)]\{V\}$  の計算が必要であり、連立一次方程式の求解操作となる。このため HTFEM から導かれた係数行列の次元数がある程度大きくなると、線形固有値問題の解析時間は相対的に小さくなり、本解析法の計算時間は、連立一次方程式の求解すなわちほぼ行列要素の計算時間となる。従って本解析法は、線形固有値問題の行列要素の計算が並列化できると、非線形固有値問題の短時間での解析が可能となると考えられる。

次に求まる伝搬定数の値の妥当性を確認する。Fig.3, Fig.4 は位相定数と減衰定数の電極厚み  $h/p$  依存性を調べたもの

である. SS 法のパラメータは, 積分路の半径  $\rho p = 0.4$  とし,  $N_s = 128$ ,  $M = 8$ ,  $\delta = 10^{-7}$  とした. 積分径路の中心は, 予想される伝搬定数に応じて移動させ, 例えば電極厚み  $h/p = 0.5$  の場合には,  $op = 5.6 - j0.2$  とした. TE と TM の両固有値が半径  $\rho p = 0.4$  の円内に含まれない  $h/p = 0.9$  の場合に限り, 各固有値向けに中心を設定し, SS 法を 2 度実行した. Fig.3, Fig.4 から SS 法を用いた HTFEM の結果 (—) は, 積分方程式の結果 (●)<sup>(16)</sup> と一致していることがわかる.

Table 1. Dependence of predicted number of eigenvalues in the scope  $K$  on  $M$  and  $\delta$ . Here the superscript \* indicates that unphysical eigenvalues are included in the scope.

$N_s$	$\delta$							
	$10^{-3}$		$10^{-5}$		$10^{-7}$		$10^{-9}$	
	$M$		$M$		$M$		$M$	
	4	8	4	8	4	8	4	8
16	4	7	4	8	4	8	4	8
32	2	2	2	2	2	3	3	5*
64	2	2	2	2	2	2	3*	3*
128	2	2	2	2	2	2	2	4
256	2	2	2	2	2	2	2	2
512	2	2	2	2	2	2	3*	3*
1024	2	2	2	2	2	2	2	3*

Table 2. Dependence of computation time on number of sampling points  $N_s$ .

$N_s$	Computation time of $K$ eigenvalues and eigenvectors in the scope[s]	Computation time of a moment $\mu_k$ [s]
16	44	42
32	88	87
64	173	172
128	347	347
256	695	694
512	1384	1383
1024	2777	2776

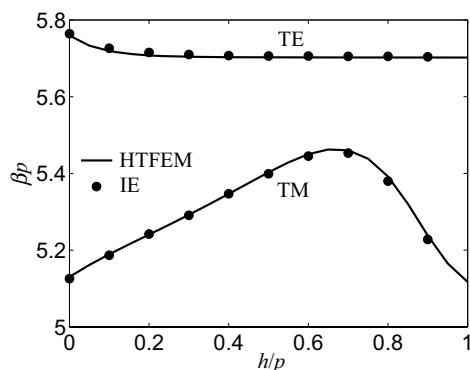


Fig. 3 Dependence of the phase constant on strip thickness  $h/p$ .

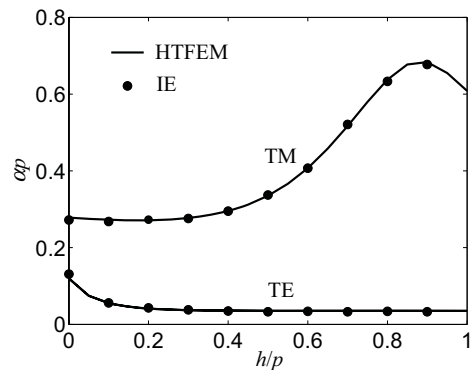


Fig. 4 Dependence of the attenuation constant on strip thickness  $h/p$ .

## 7. むすび

非線形固有値問題の数値解法である SS 法を HTFEM 伝搬問題解析法に組み込み, その有用性を確認した. SS 法を採用すると, 滑降シンプレクス法を用いる HTFEM 固有値問題の欠点であった解の初期値依存性が克服でき, また線形固有値問題化を利用する場合のように, 最終的に解くべき行列の次元数が増大し, HTFEM の特長を損なうことがない.

今後は, ホトニック結晶などの実用的な周期構造導波路への本解析法の適用, 同様な定式化が可能な弾性波導波路への HTFEM 解析法への SS 法の適用を検討する予定である.

## 参考文献

- (1) A. P. Zielinski and O. C. Zienkiewicz : Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **21**(1985), pp.509-528.
- (2) J. Jirousek and L.Guex : The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **23**(1986), pp.651-693.
- (3) Qing-Hua Qin : The Trefftz Finite and Boundary Element Method, (2000), WIT Press.
- (4) O. C. Zienkiewicz, R.L.Taylor and J.Z.Zhu : The Finite Element Method Its Basics & Fundamentals 6th Ed., (2005), ELSEVIER, Ch.12.5.
- (5) 佐藤慎悟, 長谷川弘治 : ハイブリッド・トレフツ有限要素法に基づく回折格子の散乱特性解析法, *境界要素法論文集*, **21**(2004), pp. 53-58.
- (6) 佐藤慎悟, 長谷川弘治 : 多層格子による平面波散乱特性のハイブリッド・トレフツ有限要素法解析, *計算数理工学論文集*, **5**(2005), pp. 113-118.
- (7) S. Sato and K. Hasegawa : Analysis of scattering characteristics of diffraction gratings using hybrid Trefftz finite element method, *Int. J. Microwave Opt. Technol.*, **1**(2006), pp. 899-904.
- (8) 佐藤慎悟, 長谷川弘治 : 多層周期構造による平面波散乱特性の有限要素解析法の比較, *計算数理工学論文集*, **7**(2008), pp. 219-224.

- (9) 長谷川弘治, 小柴正則: 周期構造誘電体導波路のハイブリッド有限要素法解析, 1998年電子情報通信学会ソサイエティ大会講演論文集, (1998), 講演番号 C1-7.
- (10) 若林努, 長谷川弘治: 周期構造誘電体スラブ導波路のハイブリッドトレフツ有限要素法による伝搬特性解析, 平成18年度電気・情報関係学会北海道支部連合大会講演論文集, (2006), 講演番号 119.
- (11) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura: A numerical method for polynomial eigenvalue problems using contour integral, CS-TR-08-15, (2008).
- (12) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura: A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, JSIAM Lett., **1**(2009), pp. 52–55.
- (13) T. Ikegami, T. Sakurai and U. Nagashima: A filter diagonalization for generalized eigenvalue problems based on the Sakurai-Sugiura projection method, J. Comput. Appl. Math., **233**(2010), pp. 1927–1936.
- (14) L. Cairo and T. Kahan: Variational Techniques in Electromagnetism, (1965), GORDON AND BREACH.
- (15) X. Q. Sheng and S. Xu: An efficient high-order mixed-edge rectangular element method for lossy anisotropic dielectric waveguides, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., **45**(1997), pp. 1009–1013.
- (16) M. Matsumoto, M. Tsutsumi and N. Kumagai: Radiation characteristics of a dielectric slab waveguide periodically loaded with thick metal strips, IEEE Trans. Microwave Theory Tech., **35**(1987), pp. 89–95.