

時間・空間の離散化に wavelet 基底を用いた境界要素法 による線形拡散解析

BOUNDARY ELEMENT METHOD WITH WAVELET-BASED SPACE- AND TIME DISCRETIZATION AND ITS APPLICATION TO DIFFUSION ANALYSIS

紅露一寛¹⁾, 佐藤鉄太郎²⁾, 阿部和久³⁾

Kazuhiro KORO, Tetsutaro SATO and Kazuhisa ABE

- 1) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp)
2) 新潟大学大学院自然科学研究科博士前期課程 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)
3) 新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp)

The wavelet-based space- and time discretization is developed for the time-domain boundary element method for 2-D diffusion equation. The wavelets are used to approximate the boundary values u and q not only on the boundary, but also in the time-domain. The algebraic equations are derived by the Galerkin method on the boundary and the time. The coefficient matrix is sparse by the present compression scheme; the memory requirement of the present method is large as compared with the conventional time-domain BEM. The large computational time is required for generating the coefficient matrix entries. The fast wavelet transform in the time-domain is effective to reduce the computational work for the matrix assembly in the space-time wavelet discretization.

Key Words: non-orthogonal wavelet, time-domain boundary integral equation, diffusion problem

1. はじめに

境界要素法 (BEM)⁽¹⁾ は, 提案当初は離散化により得られる代数方程式の規模の小ささが利点と考えられてきたが, 特に Laplace 問題や Helmholtz 問題などの静的問題・定常問題では係数行列が密行列となるため, その計算効率の悪さゆえ長らく大規模問題への適用が困難と考えられてきた. しかしこの 20 年間, 上述した境界要素法最大の弱点を克服すべく, 高速多重極法⁽²⁾ や wavelet 法^(3,4) などの高速解法の実用化に関する研究が進められてきた.

Wavelet 法は, wavelet 基底のゼロモーメント性 (wavelet と所定次以下の単項式との直交性) により係数行列成分の距離減衰性を高め, 結果として微小となった大半の係数成分を切り捨てることで係数行列をスパース化する方法である. なお, これまでの wavelet 法の適用は, 静的問題・定常問題における計算効率の改善を目的としたものが大半であった⁽⁴⁾. これは, 静的問題や定常問題では係数行列が密行列となるため, 疎行列化がメモリの削減だけでなく, 反復解法の適用による計算時間の大幅な短縮にも効果的であることが一因である.

一方, 境界要素法は境界値問題だけでなく, 初期値境界値問題を解くために用いることもできる. 拡散問題において

は, Laplace 変換を適用する定式化や, 時間微分を差分近似した上で得られた境界積分方程式を離散化する方法, 時間域境界積分方程式を離散化して解く方法が示されている⁽¹⁾. 特に, 時間域境界積分方程式を離散化して解く方法は, 逆変換の煩わしさが無い利点を有しているが, 時間に関する畳み込み積分計算の処理のために行列ベクトル積の計算が必要である. この計算に用いる係数行列は解析開始直後では疎な行列となるが, 解析時間の経過とともに非ゼロ成分が増大し最終的に密行列となる. そのため, 結果として連立方程式の求解にはさほど計算時間を要しないが, 行列・ベクトル積の演算量が時間ステップの経過とともに無視できなくなる.

これまで, 時間域境界要素法の畳み込み積分計算の効率化の試みは, 例えば 2 次元スカラー波動問題を対象とした Soares ら⁽⁵⁾ により示されているが, これは畳み込み積分計算を時間領域で補間近似することで乗算に要する計算量を削減する試みである. なお, 畳み込み積分の計算効率の改善は, wavelet 基底の適用による係数行列のスパース化によっても実現できる. 計算効率の改善を目的として時間域境界要素法に wavelet 基底を適用する試みは, 時間依存の基本解を用いた境界要素非圧縮粘性流れ解析を対象とした Ravnik ら⁽⁶⁾ や, 拡散問題の時間域境界要素法での計算効率を検討した著者ら⁽⁷⁾ によりなされている. また, 著者らは非定常波動問

2010 年 10 月 1 日受付, 2010 年 11 月 9 日受理

† Dedicated to the memory of Prof. Masataka TANAKA

題の時間域境界要素解析への適用も試みている⁽⁸⁾。

ただし、これまでの取り組みはいずれも境界積分方程式の離散化過程において wavelet 基底を適用したものである。時間域境界要素法における離散化では、積分方程式の未知量について境界上の変動だけでなく、時間変動についても近似が必要である。Wavelet 基底は境界上での未知量の変動を近似するだけでなく、時間変動の近似にも適用可能である。Barmada⁽⁹⁾ は、拡散問題の時間域境界要素法において、未知量の時間近似を wavelet 級数で構成し、境界積分方程式を境界上で選点法により離散化した上で、ソース側の時間変数について wavelet 変換を作用させることで必要数の代数方程式を導出し、それを解いて得られた解を wavelet 逆変換することで時刻歴応答に再構成する方法を提案している。しかし、文献⁽⁹⁾ では境界値分布は通常の区間一定要素により近似しており、現在のところ時間域境界積分方程式の時間・境界上双方の離散化に wavelet 基底を用いる定式化は示されていない。関数近似に用いる wavelet のゼロモーメント性により係数行列のスパース性の向上も期待できるが、wavelet 基底の導入方法が計算効率の改善効果に及ぼす影響も未検討である。

そこで本研究では、拡散問題の時間域境界要素方程式の離散化において、時間・空間の離散化に wavelet 基底を用いる方法を構成し、定式化の妥当性及びその計算効率について検討する。また、時間に関する Galerkin 法の適用による計算時間の増加を抑える目的で、wavelet を重みとする時間積分を数値的に計算する代わりに、時間に関する高速 wavelet 変換を適用する離散化手法を提案し、その有効性についても検討する。

2. 拡散問題の時間域境界積分方程式

本研究では、2次元拡散問題の時間域境界要素法について考える。2次元拡散問題における支配方程式と初期条件、境界条件は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) = k\nabla^2 u(\boldsymbol{x}, t), \quad (\text{in } \Omega), \quad (1)$$

$$u(\boldsymbol{x}, t)|_{t=0} = u_0(\boldsymbol{x}), \quad (\text{in } \Omega),$$

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \bar{u}(\boldsymbol{x}, t), \quad (\text{on } \Gamma_u), \quad (2)$$

$$q(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x}, t) = \bar{q}(\boldsymbol{x}, t), \quad (\text{on } \Gamma_q),$$

ここで、 t は時間変数、 $t = 0$ は初期時刻、 Ω は領域であり、境界 Γ は $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ 、 $\emptyset = \Gamma_u \cap \Gamma_q$ なる2つの部分境界 Γ_u 、 Γ_q からなるものとする。なお、 n は境界上の点における外向き法線方向を表わしており、 u はポテンシャル、 k は拡散係数である。また、 ∇ はナブラ演算子である。

式(1)、(2)で示した初期値・境界値問題に対応する時間域境界積分方程式は、次式で与えられる⁽¹⁾。

$$c(\boldsymbol{\xi}, \tau)u(\boldsymbol{\xi}, \tau) + \int_0^\tau \int_\Gamma kq^*(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)u(\boldsymbol{x}, t)d\Gamma_x dt$$

$$- \int_0^\tau \int_\Gamma ku^*(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau)q(\boldsymbol{x}, t)d\Gamma_x dt \quad (3)$$

$$- \int_\Omega u^*(\boldsymbol{x}, 0; \boldsymbol{\xi}, \tau)u_0(\boldsymbol{x})d\Omega = 0,$$

ただし、 $\boldsymbol{\xi}$ はソース点、 \boldsymbol{x} は積分点であり、 $c(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ は点 $\boldsymbol{\xi}$ において境界が滑らかであれば $1/2$ となる。また、 u^* 、 q^* は式(1)の問題の基本解であり、次式で与えられる。

$$u^*(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = \frac{H(\tau - t)}{4\pi k(\tau - t)} \exp\left[-\frac{r^2}{4k(\tau - t)}\right], \quad (4)$$

$$q^*(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = \frac{\partial u^*}{\partial n}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau),$$

ここで、 $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$ であり、 $H(\cdot)$ は Heaviside のステップ関数である。

3. Wavelet 基底を用いた空間・時間の離散化

本節では、時間域境界積分方程式(3)の離散化について考える。解析対象とする時間領域を $0 \leq t \leq \bar{\tau}$ ($\bar{\tau}$: 既知)に設定した上で、 u と q の時間変動を次の wavelet 級数で近似する。

$$u(\boldsymbol{x}, t) \approx \sum_{\alpha=1}^{n_s} \hat{u}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x})\phi^{(\alpha)}(t)$$

$$+ \sum_{\mu=0}^m \sum_{\beta=1}^{n_w(\mu)} \tilde{u}^{(\mu, \beta)}(\boldsymbol{x})\psi^{(\mu, \beta)}(t), \quad (5)$$

$$q(\boldsymbol{x}, t) \approx \sum_{\alpha=1}^{n_s} \hat{q}^{(\alpha)}(\boldsymbol{x})\phi^{(\alpha)}(t)$$

$$+ \sum_{\mu=0}^m \sum_{\beta=1}^{n_w(\mu)} \tilde{q}^{(\mu, \beta)}(\boldsymbol{x})\psi^{(\mu, \beta)}(t),$$

ここで、 $\phi^{(\alpha)}$ 、 $\psi^{(\mu, \beta)}$ は時間近似に用いる scaling 関数、wavelet であり、以下式(6)、(7)で定義する ϕ 、 $\psi_{k,l}$ でそれぞれ与える。また、 $\hat{u}^{(\alpha)}$ 、 $\tilde{u}^{(\mu, \beta)}$ 、 $\hat{q}^{(\alpha)}$ 、 $\tilde{q}^{(\mu, \beta)}$ は展開係数であり、 m は最高階層、 n_s 、 $n_w(\mu)$ はそれぞれ $\phi^{(\alpha)}$ 、 $\psi^{(\mu, \beta)}$ の個数である。

本研究では、境界要素解析に適した wavelet として、Haar wavelet⁽⁴⁾ の適用を考える。Haar wavelet は、コンパクトサポートを有する wavelet のうち、陽な形を有する唯一の正規直交 wavelet である。Haar wavelet を適用する場合、scaling 関数 ϕ は展開区間を $0 \leq \eta \leq 1$ (η : 無次元座標)として次の区間一定関数で与える。

$$\phi(\eta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}. \quad (6)$$

一方、wavelet は式(6)の scaling 関数を用い、次式で定義される。

$$\psi(\eta) = \phi(2\eta) - \phi(2\eta - 1), \quad \psi_{k,l} = 2^{k/2}\psi(2^k\eta - l), \quad (7)$$

なお、Haar wavelet は次式で定義される1次のゼロモーメント性を有しており、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\eta)d\eta = 0, \quad (8)$$

著者らが構成した非直交 wavelet⁽⁴⁾ のうち、補間次数0次、1次ゼロモーメント性を有する wavelet に一致する。

次に、式(5)の展開係数の境界上の近似について考える。時間近似と同様に、境界上で定義された wavelet 級数により、

展開係数 $\hat{u}^{(\alpha)}$, $\hat{u}^{(\mu,\beta)}$, $\hat{q}^{(\alpha)}$, $\hat{q}^{(\mu,\beta)}$ を次式で与える .

$$\hat{u}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{N_s} \hat{u}_j^{(\alpha)} \phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{N_w(k)} \hat{u}_{k,l}^{(\alpha)} \psi_{k,l}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\hat{u}^{(\mu,\beta)}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{N_s} \hat{u}_j^{(\mu,\beta)} \phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{N_w(k)} \hat{u}_{k,l}^{(\mu,\beta)} \psi_{k,l}(\mathbf{x}),$$

$$\hat{q}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{N_s} \hat{q}_j^{(\alpha)} \phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{N_w(k)} \hat{q}_{k,l}^{(\alpha)} \psi_{k,l}(\mathbf{x}), \quad (10)$$

$$\hat{q}^{(\mu,\beta)}(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^{N_s} \hat{q}_j^{(\mu,\beta)} \phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^M \sum_{l=1}^{N_w(k)} \hat{q}_{k,l}^{(\mu,\beta)} \psi_{k,l}(\mathbf{x}),$$

なお, ϕ_j, ψ_{kl} は境界上の wavelet 展開に用いる scaling 関数, wavelet であり, 時間近似の際と同様, 式 (6), (7) でそれぞれ与える. $\hat{u}_j^{(\alpha)}, \hat{u}_{k,l}^{(\alpha)}, \hat{u}_j^{(\mu,\beta)}, \hat{u}_{k,l}^{(\mu,\beta)}, \hat{q}_j^{(\alpha)}, \hat{q}_{k,l}^{(\alpha)}, \hat{q}_j^{(\mu,\beta)}, \hat{q}_{k,l}^{(\mu,\beta)}$ は展開係数, M は最高階層であり, $N_s, N_w(k)$ はそれぞれ ϕ_j, ψ_{kl} の個数である .

式 (5), (9), (10) を整理すると, u, q に関する時間および境界上の wavelet 級数近似 \tilde{u}, \tilde{q} は次式のように記述できる .

$$u(\mathbf{x}, t) \approx \tilde{u}(\mathbf{x}, t) := \sum_{B=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_b} \chi^{(B)}(t) w_j(\mathbf{x}) U_j^{(B)}, \quad (11)$$

$$q(\mathbf{x}, t) \approx \tilde{q}(\mathbf{x}, t) := \sum_{B=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_b} \chi^{(B)}(t) w_j(\mathbf{x}) Q_j^{(B)},$$

ここで, $\chi^{(B)}(t)$ ($B = 1, 2, \dots, N_t$, N_t : 時間近似の自由度) は時間に関する wavelet 基底であり, $\phi^{(\alpha)}(t)$ または $\psi^{(\mu,\beta)}(t)$ で与えられる. また, $w_j(\mathbf{x})$ ($j = 1, 2, \dots, N_b$, N_b : 境界上の関数近似の自由度) は境界上で定義された wavelet 級数の基底関数であり, $\phi_j(\mathbf{x})$ または $\psi_{k,l}(\mathbf{x})$ で与えられる. なお, $U_j^{(B)}, Q_j^{(B)}$ は式 (9), (10) の展開係数により構成される .

式 (11) を (3) に代入すると, 式 (3) の残差 $R(\xi, \tau)$ が次式のように生じる .

$$\begin{aligned} R(\xi, \tau) &:= c(\xi, \tau) \tilde{u}(\xi, \tau) \\ &+ \int_0^\tau \int_\Gamma k q^*(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \tilde{u}(\mathbf{x}, t) d\Gamma_x dt \\ &- \int_0^\tau \int_\Gamma k u^*(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \tilde{q}(\mathbf{x}, t) d\Gamma_x dt \\ &- \int_\Omega u^*(\mathbf{x}, 0; \xi, \tau) u_0(\mathbf{x}) d\Omega, \end{aligned} \quad (12)$$

ここで, 式 (11) の残差 R に対し, 式 (11) で用いた基底関数 $\chi^{(A)}(t), w_i(\xi)$ を重み関数として, 次の Galerkin 条件を課す .

$$\int_0^{\bar{\tau}} \chi^{(A)}(\tau) \int_\Gamma w_i(\xi) R(\xi, \tau) d\Gamma d\tau = 0, \quad (13)$$

ただし, $A = 1, 2, \dots, N_t$, $i = 1, \dots, N_b$ とする. その結果, $N = N_b \cdot N_t$ 元の連立一次方程式を得る .

$$HU = GQ + f_0. \quad (14)$$

解析においては, u, q の展開係数 $U_j^{(B)}, Q_j^{(B)}$ を成分に持つベクトル U, Q の成分を未知成分と既知成分とに整理した上で式 (14) を解き, 境界上および時間方向に wavelet 級数の再構成を行うことで, 境界上の u, q の時刻歴が得られる .

なお, G, H はそれぞれ基本解 u^*, q^* の境界・時間積分により得られた係数行列であり, それぞれの成分 $g_{ij}^{(A,B)}, h_{ij}^{(A,B)}$ は次式で定義する .

$$\begin{aligned} g_{ij}^{(A,B)} &:= \int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma \chi^{(A)}(\tau) w_i(\xi) \\ &\cdot \int_0^\tau \int_\Gamma k u^*(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \chi^{(B)}(t) w_j(\mathbf{x}) d\Gamma_x dt d\Gamma_\xi d\tau, \\ h_{ij}^{(A,B)} &:= \int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma c(\xi, \tau) \chi^{(A)}(\tau) w_i(\xi) \\ &\cdot \chi^{(B)}(\tau) w_j(\xi) d\Gamma_\xi d\tau \\ &+ \int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma \chi^{(A)}(\tau) w_i(\xi) \int_0^\tau \int_\Gamma k q^*(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \\ &\cdot \chi^{(B)}(t) w_j(\mathbf{x}) d\Gamma_x dt d\Gamma_\xi d\tau, \end{aligned} \quad (15)$$

また, f_0 は式 (11) の初期条件項に起因する既知ベクトルであり, その成分 $f_{0,i}^{(A)}$ は次式で与えられる .

$$\begin{aligned} f_{0,i}^{(A)} &= \int_0^{\bar{\tau}} \int_\Gamma \chi^{(A)}(\tau) w_i(\xi) \\ &\cdot \int_\Omega u^*(\mathbf{x}, 0; \xi, \tau) u_0(\mathbf{x}) d\Omega_x d\Gamma_\xi d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

4. 係数行列成分の切り捨て手法

係数行列 G, H の微小成分の切り捨ては, 著者らの既往の研究と同様, Beylkin 型切り捨て手法⁽⁴⁾により実行する. 解析に際しては, 大きさが微小となる切り捨て対象成分の生成に関する不要な計算を可能な限り削減する目的で, 時間・境界それぞれの二重積分の計算前後の2度, 切り捨て判定を行なう. 係数計算前の事前切り捨ては, G 行列成分 $g_{ij}^{(A,B)}$ が次の条件を満たした場合に実行する .

$$\bar{g}_{ij}^{(A,B)} < \kappa \cdot g_{ref}, \quad (17)$$

ここで, κ は切り捨て基準値であり, g_{ref} は行列 G の成分の代表値である. また, $\bar{g}_{ij}^{(A,B)}$ は $|g_{ij}^{(A,B)}|$ の近似評価値であり, 基底関数のゼロモーメント次数を考慮して次式で与える .

$$\begin{aligned} |g_{ij}^{(A,B)}| &\approx \bar{g}_{ij}^{(A,B)} := \\ &\frac{k \gamma_A \gamma_B \beta_i \beta_j \bar{J}_A^{\nu_A+1} \bar{J}_B^{\nu_B+1} \bar{G}_i^{n_i+1} \bar{G}_j^{n_j+1}}{\nu_A! \nu_B! n_i! n_j!} \\ &\cdot \left| \frac{\partial^{\nu_A+\nu_B+n_i+n_j} u^*}{\partial \tau^{\nu_A} \partial t^{\nu_B} \partial r^{n_i+n_j}}(\mathbf{x}_c^{(j)}, t_c^{(B)}; \xi_c^{(i)}, \tau_c^{(A)}) \right|, \end{aligned} \quad (18)$$

ただし, $\mathbf{x}_c^{(j)}, t_c^{(B)}, \xi_c^{(i)}, \tau_c^{(A)}$ はそれぞれ $w_j, \chi^{(B)}, w_i, \chi^{(A)}$ のサポート中央点である. また, $\bar{J}_A, \bar{J}_B, \bar{G}_i, \bar{G}_j$ は時間および境界上の積分に関するヤコビアンであり, 基底関数のサポートは無次元座標上でいずれも $[-1, 1]$ に一致するように定義するものとし, $\gamma_A, \gamma_B, \beta_i, \beta_j$ はそれぞれ $\chi^{(A)}$ の ν_A 次, $\chi^{(B)}$ の ν_B 次, w_i の n_i 次, w_j の n_j 次モーメントである .

式 (17) を満たさない成分については, 係数生成に必要な所定の計算を実行後, 次の切り捨て判定条件に基づき, 再度切り捨て判定を行なう .

$$|g_{ij}^{(A,B)}| < \kappa \cdot g_{ref}. \quad (19)$$

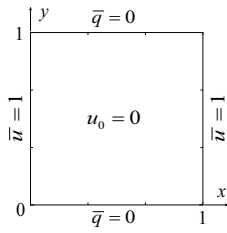


Fig. 1 初期条件と境界条件 .

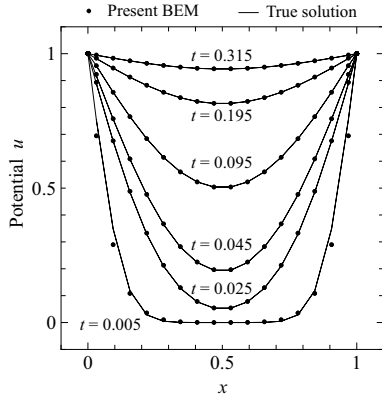


Fig. 2 $y = 0$ なる部分境界上での境界要素解 \tilde{u} の時刻歴 .

5. 解析結果

本論文で示した定式化の妥当性, および境界要素解析における計算効率について検討する目的で, Fig.1 に示す例題を対象に, 境界要素解析を行なった. 拡散係数は $k = 1$ とした. 境界値関数の境界上の分布を近似するために用いる wavelet 級数は, 各部分境界において scaling 関数を 1 個配置するように定義し, 最高階層を $M = 3$ としている. その結果, 境界上では $N_b = 64$ 自由度となっている. 一方, 時間に関しては, 解析対象時間を $T = 0.32$ とし, この時間領域で 1 個の scaling 関数を配置した上で, 最高階層が $m = 4$ となるように wavelet 展開を定義した. その結果, 時間領域では $N_t = 32$ 自由度となっている. よって, 離散化方程式の全自由度は, $N = N_b \cdot N_t = 2048$ となる. なお, 式 (14) の連立一次方程式は, 対角スケール前処理付き GMRES 法で解くこととした.

各解析時刻における誤差 $e(t)$ は, u の誤差の L^2 ノルムを近似する次式で定義する.

$$e(t) := \sum_{i=1}^{N_b} |u(\mathbf{x}_i, t) - u_{true}(\mathbf{x}_i, t)| \cdot l_i \quad (20)$$

ここで, $u_{true}(\mathbf{x}, t)$ は当該例題の解析解である. l_i は境界要素解が一定値をとる境界上の小区間の長さであり, この小区間の中央点を \mathbf{x}_i とする.

まず, Fig.1 において $y = 0$ なる部分境界上での境界要素解 \tilde{u} の時刻歴を Fig.2 に示す. なお, ここでは定式化の妥当性を検討する目的で, 切り捨ては実行していない. Fig.2 より, 本手法で得られた境界要素解は, 境界および時間軸上で区間一定となる部分の中央点での解の近似を与えるものであることがわかる. 境界要素解は解析解によく一致しており, 本手法の定式化の妥当性が確認できる.

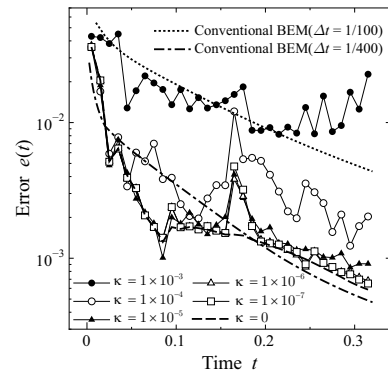


Fig. 3 各解析時刻における境界要素解の誤差 $e(t)$.

次に, 各解析時刻における近似解の誤差 $e(t)$ を Fig.3 に示す. なお, 解析においては, 切り捨て基準値を $\kappa = 1 \times 10^{-\delta}$ ($\delta = 3, 4, 5, 6, 7$) の下で係数行列成分の切り捨てを実行した. また, 比較のために従来の時間域境界要素法により得られた解 (以下, 従来法) の誤差もあわせて示している. なお, 従来法の解析では, 時間軸上に N_t 個の選点および間隔一定の時間刻みを設け, u と q は後退方向区間一定で近似した後, 時間刻み上で選点法を適用している. また, 境界上の離散化については, N_b 個の選点および区間一定境界要素を用い, 選点法で代数方程式を導出している. すなわち, 従来法では時空の離散化自由度および関数近似の次数は本手法の場合と同一としているが, 積分方程式の離散化方法が時空の選点法 (従来法) と Galerkin 法 (本手法) とで異なっていることになる.

当該の例題では, $t \rightarrow \infty$ で $u_{true}(\mathbf{x}_i, t) \rightarrow 1$ となるため, 境界要素解の誤差は時間の経過とともに小さくなることが予想される. 本手法で得られた境界要素解も, 従来法と同様の誤差挙動を示している. ただし, 本手法で得られた近似解は, 従来法の下で空間・時間のメッシュサイズを同条件に設定して得られた近似解と比べ誤差が小さい値で推移している. この原因は不明であるが, 比較に用いる誤差指標の選択や, 時間領域での数値積分の評価精度等の影響も考えられ, 今後さらなる考察が必要と考える. なお, 本手法で取り扱う係数行列の切り捨てにおいても, 近似解の誤差が切り捨てを実施しない場合と同程度となるように, 0 でない切り捨て基準値を設定することが可能である. そのため, 実際の解析において係数成分の切り捨てによるメモリ削減が可能である.

次に, 本手法による係数行列の圧縮効果について検討する. 本研究では, 空間自由度 N_b , 時間ステップ数 N_t の下で実行される従来法による時間域境界要素解析においては, 保存が必要な係数行列成分の総数が $N_b^2 \cdot N_t$ を上限とすることを留意し, 次式で定義する圧縮率 $\rho(\%)$ を用いて行列圧縮性能を評価する.

$$\rho(\%) := \frac{100}{N_b^2 \cdot N_t} \cdot \sum_{i=1}^{N_t} \mu_i \quad (21)$$

ここで, μ_i は時間第 i ステップで追加生成された係数行列の保存成分数である. 式 (21) の圧縮率 ρ は, 従来法の下で各時

Table 1 係数行列の圧縮率 (%) と計算時間 .

切り捨て基準値 κ	圧縮率 ρ (%)	計算時間 (sec)
1×10^{-3}	114.835	4032.81
1×10^{-4}	325.510	5967.98
1×10^{-5}	677.328	8067.91
1×10^{-6}	1161.874	10109.26
1×10^{-7}	1629.236	11515.93
0	2053.125	12249.58
従来法(選点法)	≤ 100	0.81
Wavelet BEM(境界上のみ)	45.197	15.23

間ステップで新たに生成される N_b 元の係数行列の全成分を保存した場合に 100% となるように定義してある .

Table 1 は、本手法および従来の時間域境界要素法、境界上の離散化にのみ Haar wavelet を適用した時間域境界要素法における圧縮率 ρ の結果を示したものである . 従来法における保存成分数の上限である $N_b^2 \cdot N_t$ を基準として係数行列の圧縮率を評価した場合、従来法では 100% (理論上の上限)、境界上の離散化にのみ wavelet を用いた場合では 45% 程度となる . 一方、時間領域での離散化にも wavelet を導入した本手法では、切り捨てを実行しても圧縮率が 100% を超え、解析精度の低下を起こさずに切り捨てを実行しようとする、圧縮率は 600% 程度まで上昇してしまう . ただし、Fig.3 に示したように、本手法により得られた近似解は従来法の近似解を上回る精度を有しており、 $N_b = 64$ としたままで時間刻み幅を 1/4 に縮めて解析すると、本手法適用時と同程度の精度を有する境界要素解が得られる . この場合でも従来法の 1.5 ~ 2 倍強のメモリを使用していることとなる .

なお、係数行列の圧縮率を式 (21) ではなく、係数行列の全成分数 ($(N_b \cdot N_t)^2$) を基準に評価すると、切り捨て基準値の設定に応じて 3% ($\kappa = 1 \times 10^{-3}$) ~ 64% ($\kappa = 0$) となる . すなわち、本手法で取り扱う $N_b \cdot N_t$ 元の係数行列は疎行列となるが、保存成分数は従来の時間域境界要素解析の数倍にも及ぶ結果となっている . そのため、離散化に用いる wavelet のゼロモーメント次数を高次化することで圧縮性能の向上は可能と思われるものの、本手法の適用が解析時の使用メモリの削減に対して必ずしも有効でないことがわかる .

最後に、解析に要した計算時間を Table 1 にあわせて示す . 計算時間は、GMRES 法の収束が速やかであることもあり、その大半が係数行列成分の作成に費やされている . 切り捨てを実行しない場合と同程度の精度の解を得るように切り捨てを実行した場合、事前切り捨て判定による計算量の削減効果が現われ、計算時間は切り捨てを実行しない場合の 1/2 程度で済むことがわかる . ただし、本手法では時間積分・境界積分ともに二重積分を処理していることもあり、総じて多くの計算時間を要している . 同一の例題を従来の時間域境界要素法 (選点法) で解いた場合には計算は 0.81(sec) で終了しており、境界上の離散化にのみ wavelet を用いた時間域 BEM⁽⁷⁾ の場合の計算時間 15.23(sec) と比べても、本手法の計算時間は著しく大きい . そのため、本手法の実用化に際しては、係

数計算のさらなる効率化が必須である .

6. 高速 wavelet 変換による係数行列作成の効率化

先に示したように、時間および境界上の離散化に wavelet 基底を用いる定式化の下では、係数行列成分の生成のための積分計算に多大な処理時間を要してしまう . そこで本節では、前節の結果と同程度のメモリ使用量を維持しつつ、時間領域の高速 wavelet 変換を用いることで係数計算を効率化する方法について、その定式化を示す .

まず、式 (12) の残差 $R(\xi, \tau)$ に対し、時間については $\tau = \tau_A (A = 1, 2, \dots, N_t)$ を選点とする選点法を適用し、得られた境界積分方程式に対し式 (11) で定義した $w_i (i = 1, 2, \dots, N_b)$ を重み関数とした Galerkin 法を適用する . その結果、次式を得る .

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} w_i(\xi) c(\xi, \tau_A) \tilde{u}(\xi, \tau_A) d\Gamma_{\xi} \\ & + \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} k \int_0^{\tau} q^*(\mathbf{x}, t; \xi, \tau_A) \tilde{u}(\mathbf{x}, t) dt d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \\ & = \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} k \int_0^{\tau} u^*(\mathbf{x}, t; \xi, \tau_A) \tilde{q}(\mathbf{x}, t) dt d\Gamma_x d\Gamma_{\xi} \\ & + \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, 0; \xi, \tau_A) u_0(\mathbf{x}) d\Omega_x d\Gamma_{\xi}, \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、式 (11) を式 (22) に代入し整理すると、次の連立一次方程式を得る .

$$\hat{H}U = \hat{G}Q + \hat{f}_0, \quad (23)$$

なお、係数行列 \hat{G} 、 \hat{H} と既知ベクトル \hat{f}_0 の各成分 $\hat{g}_{ij}^{(A,B)}$ 、 $\hat{h}_{ij}^{(A,B)}$ 、 $\hat{f}_{0,i}^{(A)}$ は次式で与えられる .

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ij}^{(A,B)} &= \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} w_j(\mathbf{x}) \\ & \quad \cdot \int_0^{\tau} k u^*(\mathbf{x}, t; \xi, \tau_A) \chi^{(B)}(t) dt d\Gamma_x d\Gamma_{\xi}, \\ \hat{h}_{ij}^{(A,B)} &= \int_{\Gamma} w_i(\xi) c(\xi, \tau_A) \chi^{(B)}(\tau_A) w_j(\xi) d\Gamma_{\xi} \\ & + \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Gamma} w_j(\mathbf{x}) \\ & \quad \cdot \int_0^{\tau} k q^*(\mathbf{x}, t; \xi, \tau_A) \chi^{(B)}(t) dt d\Gamma_x d\Gamma_{\xi}, \\ \hat{f}_{0,i}^{(A)} &= \int_{\Gamma} w_i(\xi) \int_{\Omega} u^*(\mathbf{x}, 0; \xi, \tau_A) u_0(\mathbf{x}) d\Omega_x d\Gamma_{\xi}. \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、式 (23) の連立一次方程式において、 τ 軸上に設けた選点 $\tau = \tau_A$ で評価した係数行列成分、既知ベクトル成分をサンプルデータとして、時間変数 τ についての wavelet 変換を作用させる . Wavelet 変換行列を W をすると、この演算操作は次式で形式的に表すことができる .

$$W\hat{H}U = W\hat{G}Q + W\hat{f}_0, \quad (25)$$

式 (25) において、 $\tilde{G} = W\hat{G}$ 、 $\tilde{H} = W\hat{H}$ 、 $\tilde{f}_0 = W\hat{f}_0$ とおくと、次式を得る .

$$\tilde{H}U = \tilde{G}Q + \tilde{f}_0, \quad (26)$$

式 (26) の係数行列 \tilde{G} 、 \tilde{H} に対しては、式 (14) の係数行列 G 、 H と同様、微小成分の切り捨てを実行する . 切り捨て基準には式 (17)、(19) を用いる .

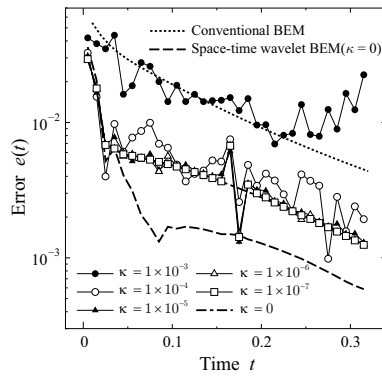


Fig.4 高速 wavelet 変換導入時の境界要素解の誤差 $e(t)$.

前節までで示した解析手法の下での計算時間の短縮に対する、本節の定式化の有効性を確認する目的で、Fig.1 の例題を対象とした境界要素解析を行なった。なお、時間軸上のサンプリング点 τ_A は、解析における時間領域を $\Delta t = 0.1$ で細分した区間の midpoint に設けた。まず、本節の定式化の下で得られた境界要素解の誤差を Fig.4 に示す。本節の手法では時間軸上のサンプリング点に関する影響係数に高速 wavelet 変換を作用させることで、時間変数 τ についての積分を近似評価していることもあり、この時間積分を Gauss 積分で処理した解よりも精度が低下している。しかし、従来の時間域 BEM で得られた解の精度を上回る結果を得ていることがわかる。

次に、係数行列成分の圧縮率と計算時間を Table 2 に示す。係数行列の圧縮率は前節の手法適用時とほぼ変わらぬ結果を得ている。一方、計算時間は従来の時間域 BEM には及ばないが、前節までの方法適用時と比べて最大で 1/20 程度に短縮されている。よって、時間領域での高速 wavelet 変換の導入は、時間・空間の離散化に wavelet を用いる境界要素解析の計算時間の短縮に効果的である。なお、高速 wavelet 変換適用時の計算時間は、係数行列の保存成分数によらず概ね同程度となっている。解析の際には係数計算が必要な影響係数の変換計算のみを実行し、事前切り捨て対象成分の変換計算を省略しているが、時間軸上の各サンプリング点で式 (24) の係数計算はもれなく実行している。このことが計算時間の均等化の原因であると思われる。

7. おわりに

本研究では、拡散問題を対象とした時間域境界要素解析の計算効率の改善を目的として、時間および境界上の離散化に wavelet 基底を用いる方法を提案し、その定式化の妥当性及び計算効率の削減効果について検討した。境界要素解析における wavelet 基底の適用の本質は、wavelet の有するゼロモーメント性による時間および距離に関する減衰性を向上させることで係数行列成分の大半を微小な成分とすることにある。そのため、積分方程式の離散化には時間・境界上の離散化とも Galerkin 法を適用した。その結果、従来法と同様の境界要素解が得られるものの、従来法と比べてメモリ使用量が大幅に増加し、現状では使用メモリの削減効果は期待できないことがわかった。計算時間については、代数方程式の離散

Table 2 時間領域の高速 wavelet 変換導入時の計算時間 .

切り捨て基準値 κ	圧縮率 ρ (%)	計算時間 (sec)
1×10^{-3}	115.234	567.22
1×10^{-4}	324.435	561.81
1×10^{-5}	683.853	568.53
1×10^{-6}	1183.676	560.91
1×10^{-7}	1651.678	561.27
0	2053.113	566.93

化に時空の Galerkin 法を採用していることに起因して、係数計算の演算量が多くなる結果を得た。この問題点を解決するために、時間に関する Galerkin 条件を課す代わりに、時間について選点法を適用して得られた係数行列に対して高速 wavelet 変換を作用させ、時間に関する Galerkin 条件を課す場合と同様の係数行列を作成する方法を示した。数値解析例より、解析精度は若干低下するものの計算時間の短縮に対して有効であることが確認できた。

参考文献

- (1) 田中正隆, 中村正行, 松本敏郎著: 境界要素法 (計算力学と CAE シリーズ), 培風館, 1991.
- (2) Nishimura, N.: Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. *Appl. Mech. Rev.*, Vol.55, No.4, pp.299–324, 2002.
- (3) Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhlin, V.: Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol.44, pp.144–183, 1991.
- (4) Koro, K., Abe, K.: Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.25, pp.149–164, 2001.
- (5) Soares Jr., D., Mansur, W.J.: Compression of time-generated matrices in two-dimensional time-domain elastodynamic BEM analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.61, pp.1209–1218, 2004.
- (6) Ravnik, J., Škerget, L., Hriberšek, M.: The wavelet transform for BEM computational fluid dynamics. *Engrg. Anals. Bound. Elems.*, Vol.28, pp.1303–1314, 2004.
- (7) 紅露一寛, 五十嵐和希, 阿部和久: 拡散問題を対象とした時間域境界積分方程式法における wavelet 基底の適用とその計算効率. 計算数理工学論文集, Vol.9, pp.73–78, 2009.
- (8) 紅露一寛, 菅波祐太, 古川 陽, 阿部和久: 2次元スカラー波動方程式のための非直交スプライン wavelet を用いた時間域境界要素法. 土木学会応用力学論文集, Vol.13, pp.241–252, 2010.
- (9) Barmada, S.: Improving the performance of the boundary element method with time-dependent fundamental solutions by the use of a wavelet expansion in the time domain. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, Vol.71, pp.363–378, 2007.