

## 無限長軌道と半無限地盤との連成加振応答解析

Dynamic interaction of an infinite railway track and a half-infinite ground subject to a point load

高野 祐紀<sup>1)</sup>, 阿部 和久<sup>2)</sup>, 紅露 一寛<sup>3)</sup>

Yuki TAKANO, Kazuhisa ABE, Kazuhiro KORO

- 1) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)  
 2) 新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)  
 3) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

This paper presents a numerical method for dynamic reaction of an infinite railway track resting on a ground. The rail is modeled by a discretely supported infinite Bernoulli-Euler beam. The ground is given by an elastic half-plane. Dynamic reaction due to a harmonic point load is considered. The interaction is analyzed by the aid of the Floquet transform. This reduces the problem to the equation of motion in a unit cell characterized by the periodicity of the sleeper space. Waves transmitting to the underlying ground are represented by soil impedance which is derived by wave modes propagating in the elastic field. The track unit is then coupled with the impedance, and the transformed solution is obtained. Numerical analyses are performed and the influence of ground stiffness and spring constant of rubber pad on the dynamic behavior is examined.

**Key Words:** half-infinite ground, periodic track, Floquet transform, vibration analysis

## 1. はじめに

鉄道軌道は、レールがまくらぎにより離散支持された構造を有しており、その周期性が軌道系の動特性に大きく影響している。そのため著者らはこれまでに、軌道系を無限周期構造としてモデル化し、その中を伝播する波動モードの分散解析<sup>(1)</sup>を始め、定点加振応答解析<sup>(2),(3)</sup>や、走行車輪下での定常応答解析<sup>(4)</sup>などを通して動的特性の把握を試みてきた。なお、これらの解析では道床以下を剛体とし、主にレール・まくらぎから構成される軌道部のみのモデル化を採用していた。これによっても軌道系の共振モードなど主要な特性を捉えることができるが、実際にはまくらぎ下に道床や地盤などが存在するため、特に比較的低い周波数域ではそれらと軌道系との連成が動的挙動に少なからず影響するものと考えられる。

そこで本研究では、軌道系に加え地盤も考慮したモデル化を行い、それに基づいた最初の試みとして、定点加振に対する連成応答解析を実施する。地盤は2次元半無限動弾性場として与え、その上にまくらぎで離散支持された無限長レールを設置する。その下で、レールに定点調和振動を加え、応答を求める。具体的解法は、Floquet変換<sup>(5)</sup>の援用下で構成する。Floquet変換後の解は、まくらぎ間隔で与えられる周期

構造1ユニットに関する運動方程式に帰着して求めることができる。その下で、まくらぎ接地点における地盤剛性を表現するインピーダンスを、文献<sup>(6),(7)</sup>に示した手法に基づく有限要素解析により求める。このインピーダンスをレール・まくらぎ1ユニットの運動方程式に組み込むことで、Floquet波数空間での軌道・地盤連成解を求める。最後に逆Floquet変換を施すことで応答解を得る。

以下では、まず上述の解法の流れについて述べる。次に、地盤インピーダンスの導出過程を示す。また、逆Floquet変換はFloquet波数に関する有限区間積分により与えられるが、積分点が軌道・地盤連成系の分散曲線上を通過する際に特異積分を伴う。そこで、その処理方法についても述べる。最後に連成応答解析結果を示し、地盤と防振パッドの剛性が応答に及ぼす影響について、軌道系の分散特性との対応関係などを通して考察する。

## 2. 軌道・地盤連成系の加振応答解析法

## 2.1. Floquet変換の概要

本研究では軌道・半無限地盤連成系の加振応答解析法をFloquet変換<sup>(5)</sup>に基づき構成する。以下にFloquet変換の概要を示す。

$x \in \mathbb{R}$  で定義された非周期関数  $f(x)$  について、ある長さ  $L$  に関し次式で与えられる関数  $\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa)$  を  $f(x)$  の Floquet

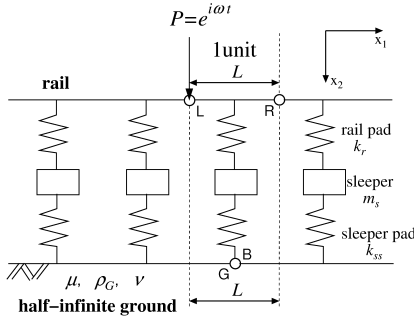


Fig. 1 Rail and half-infinite ground

変換と呼ぶ。

$$\tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tilde{x} + nL) e^{in\kappa L} \quad (1)$$

ここで、 $\tilde{x}$ ,  $\kappa$  はそれぞれ  $(-\frac{L}{2}, \frac{L}{2})$  および  $(-\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{L})$  の区間内における実数であり、 $\kappa$  を Floquet 波数と呼ぶ。

式 (1) より、 $\tilde{f}$  は  $\tilde{x}$  に関して次の周期性をもつ。

$$\tilde{f}(\tilde{x} + nL, \kappa) = e^{-in\kappa L} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa), \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

また、Floquet 変換の逆変換 (逆 Floquet 変換) は次式で与えられる。

$$f(\tilde{x} + nL) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{L}}^{\frac{\pi}{L}} \tilde{f}(\tilde{x}, \kappa) e^{-in\kappa L} d\kappa \quad (3)$$

## 2.2. 軌道・地盤連成系の解析手法

Fig.1 に示す様に、半無限地盤上にまくらぎ間隔  $L$  で離散支持された無限長レールを、円振動数  $\omega$  の下で定点加振する場合の定常応答問題について考える。

軌道系の周期長  $L$  に基づき、軌道部の 1 ユニットの Fig.1 のように設定する。ここで、レールは Euler ばりで与え、まくらぎは質点でモデル化する。レール・まくらぎ間、およびまくらぎ・半無限地盤間にはそれぞれ軌道パッド  $k_r$  と防振パッド  $k_{ss}$  が装着されている。レール・まくらぎから成る軌道系の運動方程式の  $x_1$  軸方向の Floquet 変換により、軌道 1 ユニットに対し次式を得る。

$$[\tilde{\mathbf{v}}_L \tilde{\mathbf{v}}_M \tilde{\mathbf{v}}_R \tilde{\mathbf{v}}_B]^T [\hat{\mathbf{K}}] \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_L \\ \tilde{\mathbf{u}}_M \\ \tilde{\mathbf{u}}_R \\ \tilde{\mathbf{u}}_B \end{Bmatrix} = [\tilde{\mathbf{v}}_L \tilde{\mathbf{v}}_M \tilde{\mathbf{v}}_R \tilde{\mathbf{v}}_B]^T \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_L \\ \tilde{\mathbf{F}}_M \\ \tilde{\mathbf{F}}_R \\ \tilde{\mathbf{F}}_B \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここで、 $(\cdot)_L, (\cdot)_M, (\cdot)_R, (\cdot)_B$  はそれぞれ軌道ユニットセルの左端、中央部、右端、下端の節点ベクトルである。 $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}, \{\tilde{\mathbf{F}}_i\}$  は節点変位ベクトルと節点力ベクトルの Floquet 変換、 $[\tilde{\mathbf{v}}_i]$  は任意の仮想節点変位ベクトル、 $(\cdot)$  は複素共役である。また、 $[\hat{\mathbf{K}}]$  は剛性行列  $[\mathbf{K}]$  と質量行列  $[\mathbf{M}]$  より  $[\hat{\mathbf{K}}] = [\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]$  で与えられる。

式 (2) より、ユニット両端の節点変位・節点力ベクトルに対して、次式が成り立つ。

$$\tilde{\mathbf{u}}_R = e^{-i\kappa L} \tilde{\mathbf{u}}_L, \quad \tilde{\mathbf{v}}_R = e^{i\kappa L} \tilde{\mathbf{v}}_L, \quad \tilde{\mathbf{F}}_R = -e^{-i\kappa L} \tilde{\mathbf{F}}_L \quad (5)$$

式 (5) を式 (4) に代入して  $(\cdot)_R$  成分を消去し、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{LL} & \mathbf{K}'_{LM} & \mathbf{K}'_{LB} \\ \mathbf{K}'_{ML} & \mathbf{K}'_{MM} & \mathbf{K}'_{MB} \\ \mathbf{K}'_{BL} & \mathbf{K}'_{BM} & \mathbf{K}'_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_L \\ \tilde{\mathbf{u}}_M \\ \tilde{\mathbf{u}}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}}_M \\ \tilde{\mathbf{F}}_B \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで、 $[\mathbf{K}']$  は以下で与えられる。

$$[\mathbf{K}'] = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{LL} + \hat{\mathbf{K}}_{RR} & \hat{\mathbf{K}}_{LM} + e^{i\kappa L} \hat{\mathbf{K}}_{RM} & \hat{\mathbf{K}}_{LB} + e^{i\kappa L} \hat{\mathbf{K}}_{RB} \\ + \hat{\mathbf{K}}_{LR} e^{-i\kappa L} + \hat{\mathbf{K}}_{RL} e^{i\kappa L} & \hat{\mathbf{K}}_{MM} & \hat{\mathbf{K}}_{MB} \\ \hat{\mathbf{K}}_{ML} + e^{-i\kappa L} \hat{\mathbf{K}}_{MR} & \hat{\mathbf{K}}_{BM} & \hat{\mathbf{K}}_{BB} \\ \hat{\mathbf{K}}_{BL} + e^{-i\kappa L} \hat{\mathbf{K}}_{BR} & & \end{bmatrix} \quad (7)$$

Fig.1 の B 点において、地盤との間に次の変位の適合条件と力のつり合い条件が成り立つ。

$$\tilde{\mathbf{u}}_B = \tilde{\mathbf{u}}_G, \quad \tilde{\mathbf{F}}_B + \tilde{\mathbf{F}}_G = 0 \quad (8)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{u}}_G, \tilde{\mathbf{F}}_G$  はまくらぎが接地している地表面の鉛直変位と作用力 (地盤反力) である。

この位置における半無限地盤表面の地盤バネ (インピーダンス) を  $K_G$  とすると、次式が成り立つ。

$$K_G \tilde{\mathbf{u}}_G = \tilde{\mathbf{F}}_G \quad (9)$$

式 (8), (9) を式 (6) に代入し、未知量を左辺に移項すると次の求解方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{LL} & \mathbf{K}'_{LM} & \mathbf{K}'_{LB} \\ \mathbf{K}'_{ML} & \mathbf{K}'_{MM} & \mathbf{K}'_{MB} \\ \mathbf{K}'_{BL} & \mathbf{K}'_{BM} & \mathbf{K}'_{BB} + K_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_L \\ \tilde{\mathbf{u}}_M \\ \tilde{\mathbf{u}}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{F}}_M \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

地盤インピーダンス  $K_G$  を求めることができれば、各波数  $\kappa$  の下において求解方程式 (10) を解くことで解  $\{\tilde{\mathbf{u}}\}$  を得ることができる。これに式 (3) の逆 Floquet 変換を施せば変位応答が得られる。

## 3. 地盤インピーダンス $K_G$ の導出

文献 (6),(7) に示した方法により地盤インピーダンスを導出する。以下にその概略を述べる。

### 3.1. 地盤ユニットセルの Floquet 変換

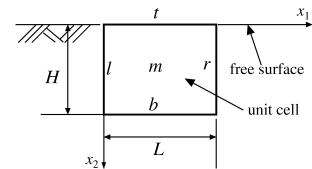


Fig. 2 Unit cell of half-infinite ground

半無限地盤を等方均質な弾性場でモデル化する。地盤ユニットセルの設定において、軌道の周期長  $L$  に合わせて  $x_1$  方向の長さを設定する必要がある。一方、半無限地盤が均質場であることから、水平方向の長さ以外、ユニットセルの形状は任意であり、ここでは Fig.2 のような長方形に設定した。

半無限地盤の波動問題を考える．Floquet 変換後のユニットセル内の運動方程式は，離散化の後次式で与えられる．

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{v}}]^T [\hat{\mathbf{K}}_e] \{\tilde{\mathbf{u}}\} &= [\tilde{\mathbf{v}}]^T \{\tilde{\mathbf{F}}\}, \\ \{\tilde{\mathbf{u}}\} &= [\tilde{\mathbf{u}}_l, \tilde{\mathbf{u}}_r, \tilde{\mathbf{u}}_b, \tilde{\mathbf{u}}_t, \tilde{\mathbf{u}}_m]^T, \\ \{\tilde{\mathbf{F}}\} &= [\tilde{\mathbf{F}}_l, \tilde{\mathbf{F}}_r, \tilde{\mathbf{F}}_b, \tilde{\mathbf{F}}_t, \mathbf{0}]^T, \\ [\tilde{\mathbf{v}}] &= \{\tilde{\mathbf{v}}_l, \tilde{\mathbf{v}}_r, \tilde{\mathbf{v}}_b, \tilde{\mathbf{v}}_t, \tilde{\mathbf{v}}_m\}^T \end{aligned} \quad (11)$$

ここで， $[\hat{\mathbf{K}}_e]$  は離散化で得られる行列， $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}$ ， $\{\tilde{\mathbf{F}}_i\}$  は節点変位と節点力のベクトルであり， $(\ )_l$ ， $(\ )_r$ ， $(\ )_b$ ， $(\ )_t$ ， $(\ )_m$  はそれぞれユニットセルの左辺，右辺，底辺，上辺，内部に位置する部分ベクトルを表している． $[\tilde{\mathbf{v}}_i]$  は， $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}$  に対応する仮想変位ベクトルの複素共役である．

軌道部と同様に，式 (2) より次式が成り立つ．

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathbf{u}}_r\} &= \{\tilde{\mathbf{u}}_l\} e^{-i\kappa L}, \quad \{\tilde{\mathbf{F}}_r\} = -\{\tilde{\mathbf{F}}_l\} e^{-i\kappa L}, \\ \{\tilde{\mathbf{v}}_r\} &= \{\tilde{\mathbf{v}}_l\} e^{i\kappa L} \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12) の関係を式 (11) に代入し，右辺境界節点に関する成分を消去すると次式を得る．

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}'_e] \{\mathbf{u}'\} &= \{\tilde{\mathbf{F}}'\}, \\ \{\mathbf{u}'\} &= [\tilde{\mathbf{u}}_l, \tilde{\mathbf{u}}_b, \tilde{\mathbf{u}}_t, \tilde{\mathbf{u}}_m]^T, \quad \{\tilde{\mathbf{F}}'\} = [\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{F}}_b, \tilde{\mathbf{F}}_t, \mathbf{0}]^T \end{aligned} \quad (13)$$

ここで， $[\mathbf{K}'_e]$  は  $(\ )_r$  成分の消去により (7) と同様に縮約された行列である．また，領域内に外力作用は無いものとした．

### 3.2. 上辺から底辺への伝達マトリクスの導出

式 (13) において  $[\mathbf{K}'_e] = [\tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}]$  と表現して，次の固有値問題を設定する．

$$[\tilde{\mathbf{K}}] \{\tilde{\phi}\} = \omega^2 [\tilde{\mathbf{M}}] \{\tilde{\phi}\} \quad (14)$$

ここで，固有振動数  $\omega_i$  に対する固有ベクトルを  $\{\tilde{\phi}_i\}$  とする．式 (13) の変位解を次式により  $\{\tilde{\phi}_i\}$  の一次結合で表すこととする．

$$\{\mathbf{u}'\} = \sum_i^N \alpha_i \{\tilde{\phi}_i\}, \quad \alpha_i = \frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} [\tilde{\phi}_i]^T \{\mathbf{F}'\} \quad (15)$$

ここで， $N$  は自由度， $m_i = [\tilde{\phi}_i]^T [\tilde{\mathbf{M}}] \{\tilde{\phi}_i\}$  である．

式 (15) を変形し，上・底辺の節点力から節点変位を与える次式が導かれる．

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_t \\ \tilde{\mathbf{u}}_b \end{Bmatrix} &= \sum_i^N \frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)} \{\phi_i\} [\tilde{\phi}_i]^T \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_t \\ \tilde{\mathbf{F}}_b \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{tt} & \mathbf{H}_{tb} \\ \mathbf{H}_{bt} & \mathbf{H}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_t \\ \tilde{\mathbf{F}}_b \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで， $\{\phi_i\}$  は  $\{\tilde{\phi}_i\}$  の  $(\ )_b$ ， $(\ )_t$  成分から構成されるベクトルである．

式 (16) よりさらに，上辺の節点変位と節点力から底辺の節点変位と節点力を与える伝達マトリクス  $[\mathbf{G}]$  を導くと，次式を得る．

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_t \\ \tilde{\mathbf{F}}_t \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_b \\ -\tilde{\mathbf{F}}_b \end{Bmatrix}, \\ [\mathbf{G}] &= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{bb} \mathbf{H}_{tb}^{-1} & -\mathbf{H}_{bb} \mathbf{H}_{tb}^{-1} \mathbf{H}_{tt} + \mathbf{H}_{bt} \\ -\mathbf{H}_{tb}^{-1} & -\mathbf{H}_{tb}^{-1} \mathbf{H}_{tt} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

### 3.3. 半無限地盤のインピーダンス $K_G$ の導出

地盤ユニットセル内の上下方向の波動伝播を考える．高さ  $H$  のユニットセルの上辺 (t)，底辺 (b) について，Bloch の定理を適用すると次式を得る．

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_b \\ -\tilde{\mathbf{F}}_b \end{Bmatrix} = e^{-i\kappa_2 H} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_t \\ \tilde{\mathbf{F}}_t \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ここで， $\kappa_2$  は  $x_2$  方向の波数成分である．

式 (18) の関係を式 (17) に代入すると，次の伝達マトリクスの固有値問題を導く．

$$[\mathbf{G}] \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_t \\ \tilde{\mathbf{F}}_t \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_t \\ \tilde{\mathbf{F}}_t \end{Bmatrix}, \quad \lambda = e^{-i\kappa_2 H} \quad (19)$$

ここで，全固有モードの数を  $N_1$  とすると，上辺から底辺に伝播するモードは  $N_1/2$  個存在する．これらのモードを  $\{\mathbf{u}_i\}$ ， $\{\mathbf{F}_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots, N_1/2$ ) とおく．このモードベクトルを列成分として持つ正方行列を次のように定義しておく．

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_s] &= [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{N_1/2}], \\ [\mathbf{F}_s] &= [\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{N_1/2}] \end{aligned} \quad (20)$$

するとインピーダンス行列  $[\mathbf{K}_s]$  は次式により与えられる．

$$[\mathbf{K}_s] = [\mathbf{F}_s][\mathbf{u}_s]^{-1} \quad (21)$$

自由表面上の節点変位  $\{\mathbf{u}\}$  と節点力  $\{\mathbf{F}\}$  に対して次式が成り立つ．

$$[\mathbf{K}_s] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (22)$$

$\{\mathbf{F}\}$  として，まくらぎ接地位置の節点にのみ単位鉛直力を与えたものを設定する．その下で式 (22) を解いて，それに対する表面変位応答  $\{\mathbf{u}\}$  を得る．これにより得られたまくらぎ位置の節点変位を  $\mathbf{u}_0$  とおくと，当該位置における節点力  $\tilde{\mathbf{F}}_G$  と節点変位の鉛直成分  $\tilde{u}_G$  との関係を与えるインピーダンス  $K_G$  は次式により求められる．

$$K_G = \frac{1}{u_0} \quad (23)$$

なお，本来まくらぎ・地盤間の接触力は分布荷重として与えるべきであるが，ここでは地盤が応答に及ぼす影響の定性的評価を目的に，1つの節点力により近似した．

## 4. 解析上の工夫

### 4.1. 逆 Floquet 変換における特異積分

変位応答  $\mathbf{u}$  を得るためには，まず式 (10) の解  $\tilde{\mathbf{u}}(\kappa, \omega)$  を各波数  $\kappa$  の下で求め，さらに  $\kappa$  に関する逆 Floquet 変換を求める必要がある．しかし，ある振動数  $\omega$  の下で，Floquet 波数  $\kappa$  が軌道・地盤連成系の分散曲線上の点を与える可能性がある．このとき式 (3) の逆 Floquet 変換は特異積分を伴ったものとなる．したがって，この場合への適切な対処が必要となる．

### 4.2. はりと半無限弾性体の連成系における理論分散曲線

ここでは，当該連成系の分散曲線をより簡易な近似モデルに基づき理論的に求める．

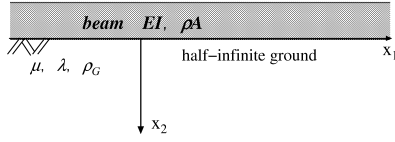


Fig. 3 Beam and half-infinite ground

Fig.3 の様な半無限場を考える．はりと半無限弾性体との接触面において，鉛直方向変位の適合条件と力のつり合い条件が課されているものとする．一方，水平方向の力は伝達されないものとする．

基礎方程式は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} EIu^{(4)} - \rho A\omega^2 u &= w, \\ \mu(\Delta \mathbf{u} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}) + \lambda \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho_G \omega^2 \mathbf{u} &= 0, \quad (24) \\ u_2 = u, \quad t_{22} = w, \quad t_{12} = 0, \quad (x_2 = 0) \end{aligned}$$

ここで， $u$  ははりのたわみ， $\mathbf{u}$  は半無限弾性場の変位， $t_{ij}$  は半無限場の表面力， $w$  は鉛直接触力である．また， $EI$  ははりの曲げ剛性， $\rho A$  はまくらぎも含む単位長さ当りの軌道の質量， $\lambda, \mu$  は地盤の Lamé 定数， $\rho_G$  は質量密度である．

まず，はりの解について考える． $x_1$  方向に波数  $\kappa$  で進行する波動を考え， $u, w$  を次式により与える．

$$u = Ue^{-i\kappa x_1}, \quad w = We^{-i\kappa x_1} \quad (25)$$

ここで  $U, W$  は未知な定数である．

一方，半無限場の解を，Helmholts ポテンシャル  $\phi, \psi$  により次式の様にする．

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla \phi + \nabla \times \psi, \\ \phi &= Ae^{-i\kappa x_1 - \nu_L x_2}, \quad \psi = Be^{-i\kappa x_1 - \nu_T x_2}, \quad (26) \\ \nu_L &= \sqrt{\kappa^2 - \kappa_L^2}, \quad \nu_T = \sqrt{\kappa^2 - \kappa_T^2} \end{aligned}$$

ここで， $A, B$  は未知な定数， $\kappa_L, \kappa_T$  はそれぞれ縦波，横波の波数である．

すると，式 (24) の鉛直変位の適合条件は次式で与えられる．

$$U = -\nu_L A + i\kappa B \quad (27)$$

また，接触力のつり合い条件より次式を得る．

$$\begin{aligned} [(2\mu\nu_L^2 - \lambda\kappa_L^2)A - 2\mu\kappa\nu_T iB] &= W, \quad (28) \\ \mu[2\nu_L\kappa iA + (\nu_T^2 + \kappa^2)B] &= 0 \end{aligned}$$

式 (27), (28) より，最終的に次式を得る．

$$\begin{aligned} 4\nu_L\nu_T\kappa^2 - (2\kappa^2 - \kappa_T^2)(2\nu_L^2 - \frac{\lambda}{\mu}\kappa_L^2) \\ + \frac{\nu_L\kappa_T^2}{\mu}(EI\kappa^4 - \rho A\omega^2) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

この式を満たす  $(\kappa, \omega)$  が連成系の理論分散曲線を与える．

#### 4.3. 特異積分路の設定

式 (29) により求めた連成系の理論分散曲線は，低周波数域では地盤 Rayleigh 波の分散曲線に漸近し，高周波数域で

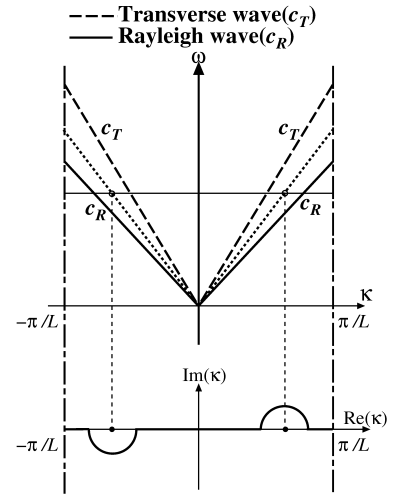


Fig. 4 Integration path in complex wavenumber space

は横波に漸近する．なお，この理論分散曲線の具体例については 5. に示す．また，Fig.1 の軌道・地盤連成モデルに対し，式 (10) の連立方程式の係数行列より数値的に求めた分散曲線は，式 (29) より求めたものと良好な一致を示した．

理論分散曲線が上述の 2 直線の間位置することより，逆 Floquet 変換における積分において，それらの直線の中点を与える Floquet 波数を中心と取り，その近傍において波数を複素数に拡張し複素平面で半円状に積分径路をとることで，分散曲線上での特異積分を回避する方法を採った．Fig.4 にその概念図を示す．

なお，半円径路は，文献 (8) に従い分散曲線の傾きが正の場合は上半平面に，負の場合は下半平面にとった．また，半円区間と，前後の実数波数区間の積分は，それぞれ Gauss 積分で評価した．

## 5. 解析結果

### 5.1. 解析条件

Fig.1 の軌道・半無限地盤連成系を解析対象とする．やや軟弱な地盤を想定し地盤剛性を  $\mu = 17\text{MPa}$ ，質量密度を  $\rho_G = 1700\text{kg/m}^3$  (横波伝播速度  $C_T = 100\text{m/s}$ )，地盤ポアソン比を  $\nu = 0.3$ ，防振パッドの剛性を  $k_{ss} = 60\text{MN/m}$  としたものを基本モデル (Case 1) として設定する．また，地盤剛性を  $\mu = 68\text{MPa}$  ( $C_T = 200\text{m/s}$ ) と変更したものを Case 2 とし，Case 1 に対し防振パッドの剛性を通常用いられる下限値  $k_{ss} = 5\text{MN/m}$  に低減したものを Case 3 とする．

その他の軌道の物性値は Table 1 の様に設定した．加振周波数は 300Hz までとし，Fig.1 の様にスパン中央に単位調和力を加えた．なお，下端周波数は安定に解が得られる 10~25Hz の範囲で設定した．まくらぎ間隔  $L = 0.6\text{m}$  の下，レール 1 ユニートを 10 要素で一様分割し (1)，半無限地盤 1 ユニートは  $x_1$  方向を 8 要素， $x_2$  方向を 1 要素で 4 節点正方形要素により離散化した (7)．以上の条件の下，加振点における応答を解析する．

### 5.2. 軌道・地盤連成系の理論分散曲線

Table 1 Parameters of track

mass of rail(kg/m)	50.47
bending stiffness(MN · m <sup>2</sup> )	4.0376
spring constant of rail pad(MN/m)	60
mass of sleeper(kg)	80

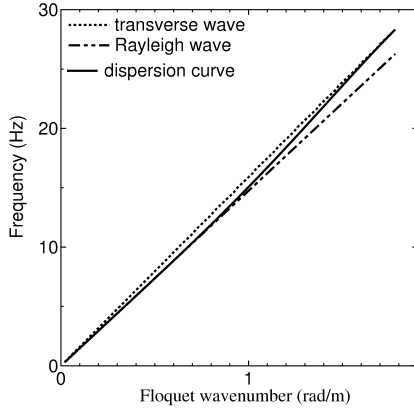


Fig. 5 Theoretical dispersion curve (Case 1)

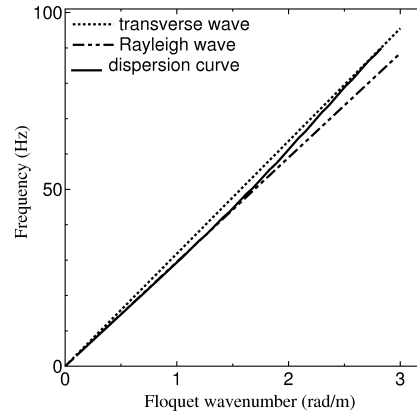


Fig. 6 Theoretical dispersion curve (Case 2)

た, Case 2(Fig.8) では, 100Hz と 270Hz 付近で変位のピークが認められる. 後者については, Case 1 と同様に剛基礎上の軌道系における共振点 C に対応しているものと思われる. 一方, 前者は共振点 A に近い周波数を与えており, 当該モードに概ね対応しているものと推測できる. なお, A のモードはまくらぎ振動を伴うものとなっている<sup>(1)</sup>. このことは, 地盤へも加振力が伝達されることを意味し, そのため地盤剛性が当該モードの共振周波数に影響を及ぼしているものと考えられる. その結果, Case 1 の地盤剛性が Case 2 のそれに比べ低いため, 共振モード A に相当するものが低周波数側へ移動したものと思われる. ちなみに, C の振動モードはまくらぎ振動を伴わず, 主にレールの支持点中央が大きく振動するものとなっている. そのため, 当該モードの共振周波数は地盤剛性の影響を受けなかったものと考えられる. また, Fig.8 では 230Hz 付近にもピークが認められるが, その原因については不明である.

以上より, 地盤剛性は軌道系における最も低い共振周波数(共振モード)に影響を及ぼし得ることがわかった.

#### 5.4. パッド剛性が応答に及ぼす影響

防振パッドの剛性を 60MN/m から 5MN/m に変更した Case 3 の応答を Fig.10 に示す. また, 剛基礎上に設置した当該軌道に対して求めた分散曲線を Fig.9(破線) に示す. バンド端点 A' の周波数が 30Hz 付近にあり, A と比べ大幅に低下している様子が窺える. これは, 5.3 に述べたように, 当該モードがまくらぎ振動を伴うものであることに因る. その結果として, Case 3 での応答 (Fig.10) においても低周波数側の共振点が 30Hz 近傍に移動したものと考えられる.

以上のことより, 軌道の共振周波数に関する限り, 地盤剛性とパッド剛性の低下はほぼ同様の効果をもたらすことがわかった. また, 軌道系における最も低い共振周波数での応答については, 軌道構造だけでなく, 道床や地盤の物性の影響も受け得ることが確認できた.

#### 6. おわりに

本研究では, 軌道・地盤連成系の加振応答解析を行った. その際に, 軌道をまくらぎで離散支持された無限長レールに

基本モデル (Case 1) と地盤剛性を高く設定した場合 (Case 2) それぞれについて, 連成系の理論分散曲線を 4.2 で導出した式 (29) より求めた結果を Fig.5, Fig.6 に示す.

ここでは理論分散曲線 (実線) とともに, 横波 (破線) と, Rayleigh 波 (2 点鎖線) の直線を合わせて図示している. Case 1 に対応する Fig.5 の解析結果では, 理論分散曲線は, 30Hz 近傍まで存在しているが, それより高周波数域には存在しないことがわかる. よって, 応答を解析する際には 30Hz を特異積分処理の打ち切り周波数とし, それ以降は特異性は存在しないので通常の積分を行った. 一方, Case 2 に対応する Fig.6 においては, Case 1 より高い周波数域まで連成系の分散曲線が存在している. そのため, Case 2 では Floquet 逆変換における特異積分処理を適用する周波数を 100Hz までとした.

#### 5.3. 地盤剛性が応答に及ぼす影響

Case 1, 2 での, 加振周波数と加振点におけるレールたわみ応答 (実部) との関係それぞれ Fig.7, 8 に示す. また, Case 1, 2 における軌道の下で, 地盤を剛体とした系に対する分散曲線<sup>(1)</sup> を Fig.9(実線) に示す. この分散曲線において, 波動モードが存在する周波数帯であるパスバンドと存在しないストップバンドとの境界 A,B,C の周波数は, それぞれ 112, 191, 274Hz となっている. これらのバンド端は定在波モードに対応しており, 実際の加振応答では一般にこれらのモードが卓越する. 一方, Case 1 の応答 (Fig.7) では, 70Hz と 270Hz 付近において共振が認められる. 後者の共振点は Fig.9 の C の共振モードに対応しているものと考えられるが, 前者は A,B,C の何れの共振周波数とも一致しない. ま

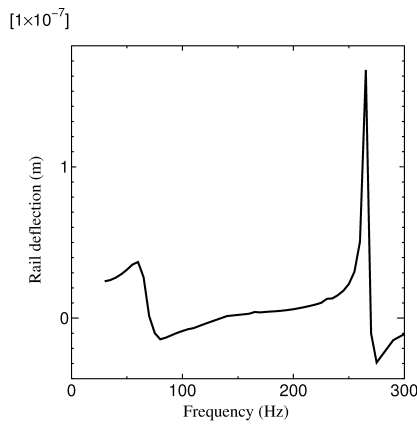


Fig. 7 Rail deflection at vibration point (Case 1)

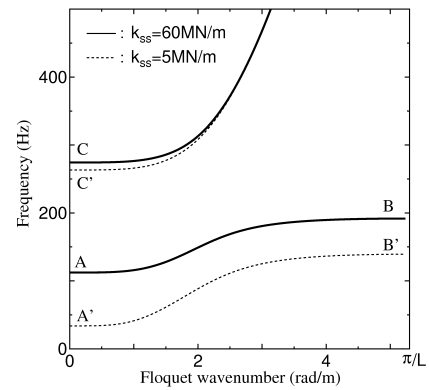


Fig. 9 Dispersion curves of tracks

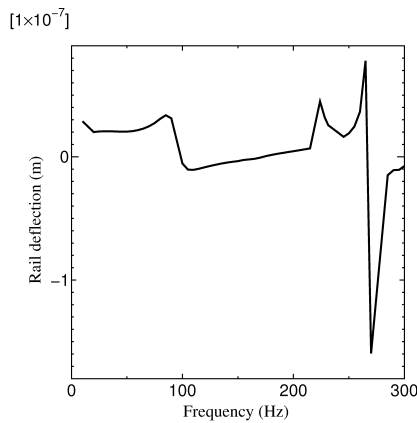


Fig. 8 Rail deflection at vibration point (Case 2)

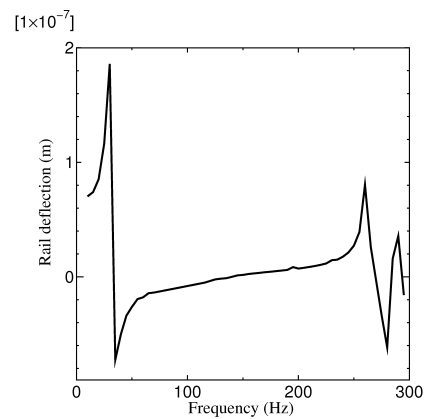


Fig. 10 Rail deflection at vibration point (Case 3)

よりモデル化した。また、地盤は二次元半無限動弾性場により与えた。具体的な解法として、Floquet 変換による方法を採用した。この場合、当該問題はまくらぎ間隔で与えられる水平方向 1 ユニットの動的問題に帰着されることとなる。その下で、半無限地盤のインピーダンスを求め、軌道系と連成させることで求解方程式を構成した。

解析では、地盤剛性と防振パッドの剛性が応答に及ぼす影響について調べた。両者とも、その剛性低下が軌道系の最も低い共振周波数の低下をもたらすことが確認された。

今後は、本手法を走行車輪と軌道・地盤との連成定常応答解析に拡張し、列車走行時の地盤の影響について検討するつもりである。

#### 参考文献

- (1) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, 10, 1029-1036, 2007.
- (2) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの加振応答解析, 計算数理工学論文集, 7(1), 25-30, 2007.
- (3) Abe, K., Fujishita, S. and Koro, K.: Development of transmitting boundary for periodically supported rails, J. Mech. Sys. Trans. Log., JSME, 3(1), 44-52, 2010.
- (4) 佐成屋淳, 阿部和久, 紅露一寛: 走行車輪と軌道系の定常連成応答解析, 計算数理工学論文集, 9, 61-66, 2009.
- (5) Clouteau, D., Arnst, M., Al-Hussaini, T.M. and Degrande, G.: Free field vibrations due to dynamic loading on a tunnel embedded in a stratified medium, J. Sound Vib., 283, 173-199, 2005.
- (6) 阿部和久, 笠原祐樹, 紅露一寛: 半無限周期構造を対象とした表面波モード解析法の改善, 応用力学論文集, 12, 1013-1020, 2009.
- (7) 阿部和久, 中山悠, 紅露一寛: 中間層を有する周期複合材の弾性波動解析, 応用力学論文集, 13, 1041-1048, 2010.
- (8) 阿部和久, 笠原祐樹, 紅露一寛: 半無限周期構造における表面波モード解析手法, 応用力学論文集, 11, 1031-1038, 2008.