

軸力を受ける曲線レールの振動応答解析

Dynamic analyses of an axially loaded curved rail

石川 大地¹⁾, 阿部 和久²⁾, 紅露 一寛³⁾

Daichi ISHIKAWA, Kazuhisa ABE and Kazuhiro KORO

- 1) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)
 2) 新潟大学工学部建設学科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:abe@eng.niigata-u.ac.jp)
 3) 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050, E-mail:kouro@eng.niigata-u.ac.jp)

Dynamic characteristics of curved rail subjected to an axial load are analyzed and the feasibility of a measuring method of rail axial stress via vibration modes is discussed. For this purpose two numerical analyses are achieved, i.e., the dispersion analysis and the dynamic response analysis. In the former problem the railway track is modeled by an infinite circular rail supported by sleepers equidistantly. Wave modes propagating in the periodic track are obtained by solving an eigenvalue problem with respect to the axial load, frequency and wavenumber. In the latter a finite track composed of circular, transverse and tangential rails is considered. Horizontal deflection due to harmonic excitation is obtained by dynamic response analysis. Through these analyses it is found that the influence of the rail curvature on the vibration modes is negligible. Therefore, it is concluded that the rail stress measurement based on vibration modes is applicable to any rails irrespective of track alignment.

Key Words: curved rail, temperature stress, dispersion curves, dynamic response

1. はじめに

鉄道軌道において、ロングレール化は乗り心地の向上や軌道破壊の抑制などに有効であり、多くの在来線区においても採用されている。しかしその一方で、長い区間に亘りレールを締結するため、温度変化に伴う伸縮が拘束され、レール内に大きな軸力が発生する要因ともなっている。猛暑時の温度上昇はレールに圧縮力を生じさせ、座屈を惹き起こす恐れがある。逆に厳寒時の温度低下はレールに引張力を生じさせ、レール破断の原因となる。したがって、レールの軸力管理は軌道保守上極めて重要である。

なお、列車が軌道上を繰り返し通過することで、まくらぎの軌道長手方向への変位(ふく進)が発生するため、レール軸力を単に温度から換算することは一般に不可能である。そのようなことから、これまでに様々なレール軸力測定法が考案されてきた⁽¹⁾。しかし、引張軸力の測定については簡易な方法⁽²⁾が既に実用化されているものの、圧縮軸力の測定法については初期状態の測定を必要とするものが殆どであり、実用性の面で課題が残されている。

初期状態によらず軸力測定可能な方法としてレール振動

法⁽³⁾が挙げられる。レール軸力の変化に伴い、共振周波数⁽⁴⁾やモード波長⁽⁵⁾が変化する。これらの対応関係に基づき、動的応答の測定値を軸力に換算することが原理的に可能である。

著者らはこれまでに、レール振動法の適用可能性について理論的検討を行ってきた。なお、レールはまくらぎにより等間隔に離散支持されている。そのためロングレールは無限周期構造としてモデル化することができる。軌道系の振動特性において、この周期性が重要な役割を果たす⁽⁶⁾。文献⁽⁷⁾では、軸力を受ける直線レールを対象に、レール内を伝播する波動モードの分散曲線に軸力が及ぼす影響について検討した。なお当該論文では、レールを1次元のTimoshenkoばりによりモデル化し、水平たわみと鉛直たわみについて各々解析した。一方文献⁽⁸⁾では、レールとまくらぎを3次元Timoshenkoばりでモデル化し、水平たわみと振れ振動との連成を考慮し、実際の軌道により近いモデルの下で分散解析を行った。これらの検討結果より、まくらぎ締結位置を節とする水平たわみの共振モード(pinned-pinned resonance)において軸力の変化に伴う共振周波数の変化が大きく、さらに締結装置の剛性の影響を殆ど受けたくないため、それが軸力測定

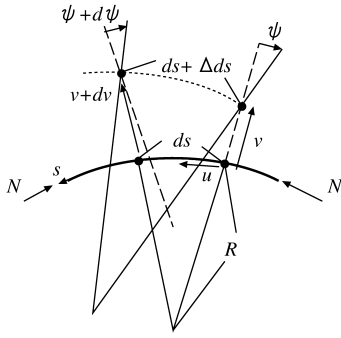


Fig. 1 Deformation circular beam

に最適なモードであるとの結論を得た。

ところで、レールの座屈温度(軸力)が曲線半径の減少と共に大きく低下することが知られている⁽⁹⁾。したがって、曲線区間での軸力管理は直線区間以上に重要である。しかし、曲線ばかりではたわみと軸方向変位とが連成するため、上述のレール振動法が曲線レールでも適用可能か否かは明らかでない。

そこで本論文では、文献⁽⁷⁾⁽⁸⁾と同様の検討を曲線レールに対して実施し、レール振動法の曲線区間への適用可能性について調べる。具体的には、まず曲線軌道を一定曲率の無限長軌道として理想化し、その下で分散解析を行い、曲率が軌道内を伝播する波動モードの分散特性に及ぼす影響について調べる。

なお現実の軌道では、有限長の一定曲率区間の前後に緩和曲線区間が存在し、さらにそれが直線軌道に接続している。そこで、その様なより現実的な軌道モデルを対象に水平加振解析を行い、レール振動応答に基づく軸力測定法の実現可能性について検討する。

2. 軸力を受ける無限長曲線レールの波動伝播解析

2.1. 軸力を受ける円弧 Timoshenko ばりの振動問題

本解析では、軸力を受ける無限長曲線レールを円弧 Timoshenko ばりでモデル化する。なお、文献⁽⁷⁾⁽⁸⁾の解析より、直線軌道の共振周波数と軸力との関係については、水平方向のレールたわみに対する捩れ変形の影響を無視しても大差ないという結果を得た。そこで曲線レールを対象とする本研究でも、水平方向たわみの解析において捩れの影響を考慮しないこととする。

Fig.1 の様な一定曲率半径 R の円弧ばかりが、圧縮軸力 N の下で円振動数 ω で振動している問題を考える。このとき運動方程式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} EA \left(\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{ds} \right) + \rho A \omega^2 u &= f_u, \\ GAK \left(\frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{d\psi}{ds} \right) - N \left(\frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{1}{R} \right) \\ - \frac{EA}{R} \left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{R} \right) - \frac{EI}{R^2} \left(\frac{v}{R^2} + \frac{d\psi}{ds} \right) + \rho A \omega^2 v &= f_v, \\ GAK \left(\frac{dv}{ds} - \psi \right) + EI \left(\frac{1}{R^2} \frac{dv}{ds} + \frac{d^2 \psi}{ds^2} \right) + \rho I \omega^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

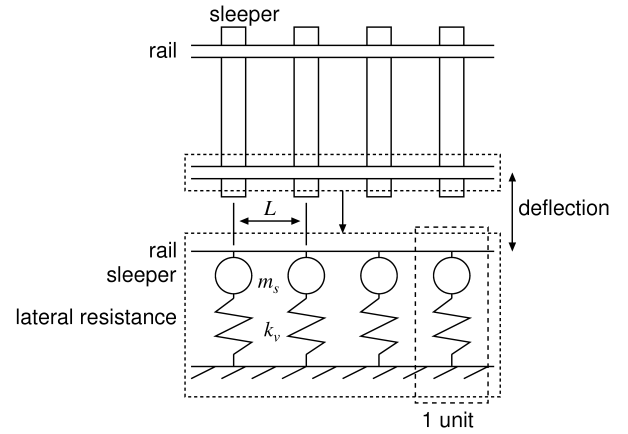


Fig. 2 Track model for horizontal vibration

ここで、 s は円弧に沿った方向の座標であり、 u は s 方向変位、 v は半径方向変位、 ψ は断面回転角である。また、 G ははりのせん断弾性係数、 K はせん断係数、 A は断面積、 ρ は密度、 E はヤング係数、 I は断面二次モーメントである。 f_u 、 f_v は s とそれに直交する方向に作用する外力であり、以下の軌道モデルではまくらぎとの接触力により与えられる。

離散化に当り、静的つり合い式の一般解や、その近似などから求めた円弧ばかりを対象とした形状関数⁽¹⁰⁾の使用が考えられる。しかし、レールの曲率半径 R は 100m 以上であり、その値は断面剛性の割に比較的大きい。そのため、これらの形状関数の導出の際に必要な係数に関する連立方程式の求解時に数値的不安定性を生じ、結果的に精度維持に困難を伴った。そこで、離散解のロッキングを防ぎ得る簡単な形状関数の組み合わせ⁽¹¹⁾として、 u 、 v に 3 次 Hermite 補間を、 ψ に 2 次 Lagrange 補間を用いることとした。

以上の離散化により、1 要素当りの運動方程式が次式で与えられる。

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{U}\} - \omega^2 [\mathbf{M}] \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} + \frac{N}{R} \{\mathbf{P}\} \quad (2)$$

ここで、 $\{\mathbf{U}\}$ 、 $\{\mathbf{F}\}$ はそれぞれ節点変位ベクトルおよび節点力ベクトル、 $[\mathbf{K}]$ は剛性行列であり、軸力 N に関する成分を含んでいる。 $[\mathbf{M}]$ は質量行列である。また、右辺第 2 項目は円弧ばかり要素に軸力 N が静的に作用することによる外力成分である。

変位 $\{\mathbf{U}\}$ を静的成分 $\{\mathbf{U}_s\}$ と動的成分 $\{\mathbf{U}_d\}$ とに分離するとそれぞれ次式が成り立つ。

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{U}_s\} = \frac{N}{R} \{\mathbf{P}\} \quad (3)$$

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{U}_d\} - \omega^2 [\mathbf{M}] \{\mathbf{U}_d\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4)$$

以降 $\{\mathbf{U}_d\}$ を改めて $\{\mathbf{U}\}$ と表記し、動的応答についてのみ議論する。

2.2. 軸力を受ける無限長曲線レールの分散解析

一定曲率の曲線レールを、まくらぎで離散支持された無限周期構造によりモデル化する。Fig.2 は水平方向振動を対象とした場合の軌道系モデルを示したものである。ここで、

m_s はまくらぎの質量, k_v は道床横抵抗力のバネ定数である. なお, 水平たわみに対してレールとまくらぎとは一体化しているものとする.

まくらぎ 1 区間で構成される 1 ユニット (Fig.2) における運動方程式は次式で与えられる.

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで,

$$[\bar{K}] = [\hat{K}] - \omega^2[\hat{M}] \quad (6)$$

であり, $[\hat{K}]$, $[\hat{M}]$ は式 (4) より与えられる剛性行列と質量行列に道床横抵抗力やまくらぎ質量に関する項を組み込んで得られる行列である. また, $()_1$, $()_3$ はユニット両端点における節点ベクトル, $()_2$ はそれ以外の節点に対する部分ベクトル成分であり, 両端点の内部節点力 F_1, F_3 以外に外力の作用はないものとしている.

Floquet 原理⁽¹²⁾ より, 周期構造の定常解において次式が成り立つ.

$$U_3 = U_1 e^{-i\kappa L}, \quad F_3 = -F_1 e^{-i\kappa L} \quad (7)$$

ここで, L は周期長 (まくらぎ間隔), κ は Floquet 波数と呼ばれるパラメータである.

式 (7) を式 (5) に代入し, U_3, F_3 を消去すると, 自由振動問題において次式を得る.

$$[\hat{K}]\{\tilde{U}\} = \omega^2[\tilde{M}]\{\tilde{U}\} \quad (8)$$

ここで, $\{\tilde{U}\} = \{U_1 \ U_2\}$ であり, $[\hat{K}], [\tilde{M}]$ は U_3 を消去して得られる 4 つ (2×2) の小行列より成る行列である. なお, $[\hat{K}]$ を例に, その成分を示すと次のようである.

$$[\hat{K}] = \begin{bmatrix} \hat{K}_{11} + \hat{K}_{33} & \hat{K}_{12} + \hat{K}_{23} e^{i\kappa L} \\ +\hat{K}_{13} e^{-i\kappa L} + \hat{K}_{31} e^{i\kappa L} & \hat{K}_{22} \\ \hat{K}_{21} + \hat{K}_{23} e^{-i\kappa L} & \end{bmatrix} \quad (9)$$

式 (8) の固有値問題を解くことで, 円振動数 ω と Floquet 波数 κ および軸力 N との関係 (分散関係) を求める. 以下の解析では, Floquet 波数 κ と軸力 N を所定の範囲内で順次変化させながら, 円振動数 ω についての固有値問題を解き, その結果より伝播波動モードの分散関係を求める.

2.3. 解析条件

Fig.2 に示したように, バネで離散支持された無限長曲線レールを軌道モデルとして設定する. 道床横抵抗力のバネ定数は $k_v=6\text{MN/m}$ ⁽¹³⁾, まくらぎ間隔は $L=0.6\text{m}$ とし, PC まくらぎを想定してレール一本当りのまくらぎ (1/2 本) 質量を 100kg と設定した. レールは 50kgN レールを想定し, 各種物性値を Table 1 のように設定した. なおレールの離散化は 1 ユニットの 12 要素で一様分割して与えた.

2.4. 解析結果

曲率半径を最小値 $R=100\text{m}$ とした場合を例に, 軸力を 0 から 1MN 毎に 6MN まで変化させたときの, 無次元化した

Table 1 Parameters of 50kgN rail

mass density(kg/m ³)	$\rho = 7880$
cross-sectional area(m ²)	$A = 64.05 \times 10^{-4}$
Young's modulus(GPa)	$E = 206$
Poisson's ratio	$\nu = 0.33$
geometrical moment of inertia(m ⁴)	$I = 322 \times 10^{-8}$
shear factor	$K = 1.382$

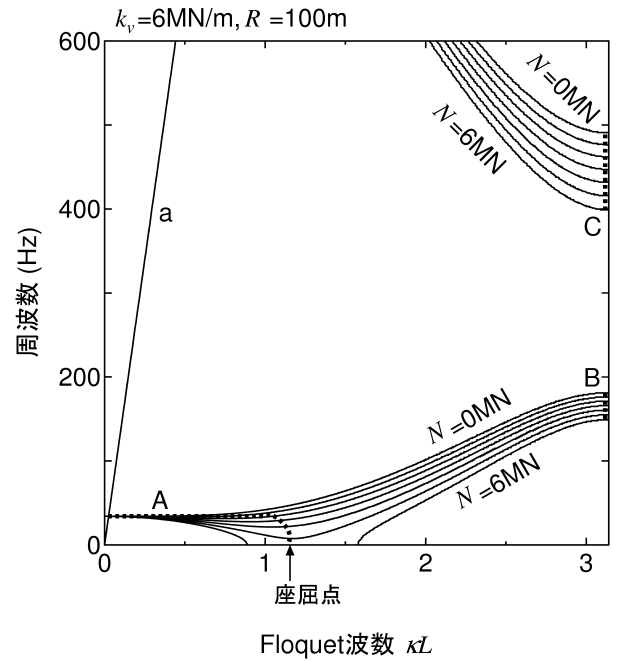


Fig. 3 Influence of axial load on dispersion curves

Floquet 波数 κL と周波数 (Hz) との関係 (分散曲線) を Fig.3 に示す. なお, 実際のレールに作用する軸力は通常 1MN 以下であるが, ここでは軸力が分散曲線に及ぼす影響を確認する目的で, $N=6\text{MN}$ まで設定した.

いずれの分散曲線も, 軸力の増加に伴い, 低周波数側へシフトする傾向にあることがわかる. また, 接線方向変位 u を考慮したことによって, レール内を伝わる縦波モードに対応した直線 a が得られている.

直線 a の存在以外は, 文献⁽⁷⁾ に示した直線レールの分散曲線と一致した. なお, 実際の軌道で設定されている他の幾つかの曲率半径 ($100 < R \leq 600\text{m}$) でも解析を行った結果, その範囲の曲率であれば分散特性に影響しないことがわかった.

Fig.3 において, 分散曲線の傾きが 0 となる箇所を A, B, C で分類する. これらの箇所は, 定在波モードに対応しており, レールに振動を加えたときは, これらのモードが卓越して現れるため, 測定しやすいモードを与える. そのため, 軸力測定にはこれらの振動モードを利用するのがよいと考えられる.

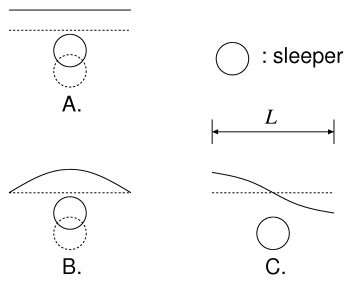


Fig. 4 Standing wave modes

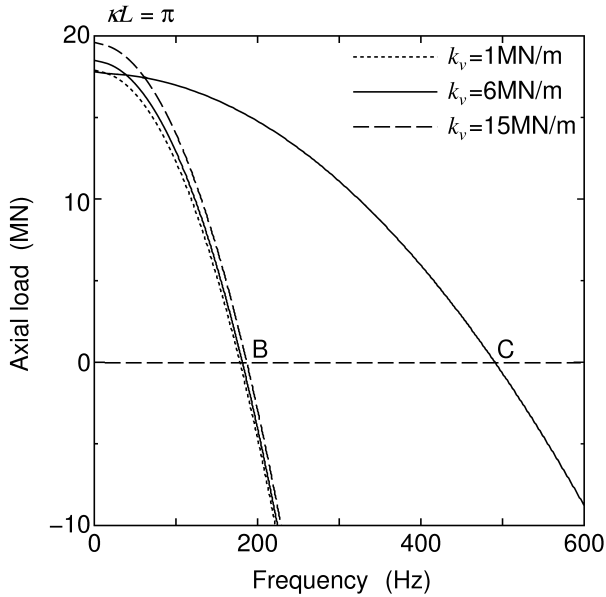


Fig. 5 Influence of stiffness of lateral resistance on relation between frequency and axial load (mode B, C)

各振動モードを Fig.4 に示す. A の振動モードはレールとまくらぎとが一体化してほとんどたわみ変形を伴わない振動である. B は波長 $2L$ で, まくらぎ位置を腹として振動するモードを与える. C は波長 $2L$ の下, まくらぎ位置を節として振動するモードであり, 通常 pinned-pinned resonance と呼ばれるものである.

2.5. 道床横抵抗力のバネ定数が分散特性に及ぼす影響

文献⁽⁷⁾では, レールたわみモード (C) が, まくらぎ位置を節とするものであるため, 道床横抵抗力が軸力-周波数関係に影響を及ぼさず, さらに軸力の変化に対する共振周波数の変動幅が比較的大きいため, 軸力測定に適しているとの結論を得た. そこで本研究においても, 曲線レールを対象に道床横抵抗力のバネ定数が共振モードに及ぼす影響をみるために, $k_v=1\text{MN/m}$, および $k_v=15\text{MN/m}$ とした場合の解析を行った.

B, C の振動モード ($\kappa L = \pi$) における周波数-軸力関係を Fig.5 に示す. なお, 前述の曲率半径の範囲においては, Fig.3 の分散曲線と同様に, いずれも直線軌道の場合と一致する結果を得た. Fig.4 に示した様に, B の振動モードはまくらぎ

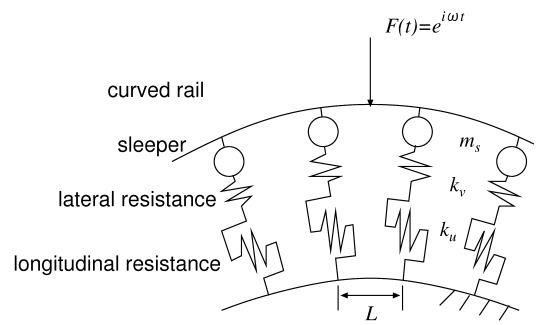


Fig. 6 Curved track model for horizontal vibration

位置が腹となるため, まくらぎ変位を伴う. よって, 道床横抵抗力のバネ定数の影響が周波数-軸力関係において認められる. 一方, C の振動モードは, まくらぎ位置が節となるためにバネ定数の影響を全く受けない. よって, 曲線レールにおいても C の振動モードが軸力測定に適していることが確認できる. なお, 軸力がゼロの付近においても, 上記のバネ定数の違いがモード B による軸力推定に及ぼす影響は 2MN 程であり, 比較的大きなものとなっている.

3. 軸力を受ける曲線レールの調和加振解析

2. では, 軸力を受ける無限長曲線レールの波動伝播モード解析を行い, 曲率の存在が分散関係に影響を及ぼさないことがわかった. しかし, その軌道モデルは, 一定な曲率半径をもった無限長曲線レールであり, 必ずしも実際の軌道を再現したものとはなっていない. 現実には, ある長さの一定曲率区間の前後に緩和曲線軌道が敷設され, さらにその先に直線軌道が接続している. また振動応答の測定は, レールを加振して行う方法が最も一般的であると考えられる. そこで, この様なより現実に近い曲線軌道モデルを対象に, 水平加振解析を行うことで, 本軸力測定法が実際の加振条件下で適用可能であるか否かについて検討する.

3.1. 軌道曲線部のモデル化

本解析では, 緩和曲線等, 曲率が一定でない区間を含むので, レールを全長に亘り直線はり要素で離散化する. その際に, レールは Fig.6 の様にモデル化する. 水平振動に対しレールとまくらぎは一体化しているものとし, 道床からの抵抗力はレール垂直方向に加えて, レールの軸方向成分も考慮し, それぞれの方向に線形バネを設定した. これらを $k_v(1+i\omega g)$ と $k_u(1+i\omega g)$ により複素剛性で与え, 減衰を導入した. なお, k_v と k_u はそれぞれ道床横抵抗力と道床縦抵抗力のバネ定数, g は減衰係数である.

以上の減衰設定の下で, 軌道を有限長で打ち切ったモデルを用いた. なお, レール端からの反射波の影響が十分小さくなる様に, 軌道長の異なる幾つかの解析結果に基づき, 軌道長を 240m と設定した.

3.2. 解析条件

道床横抵抗力のバネ定数は 2. での解析と同じく 6MN/m , 道床縦抵抗力のバネ定数は 550MN/m , 減衰係数 g は 0.05 と

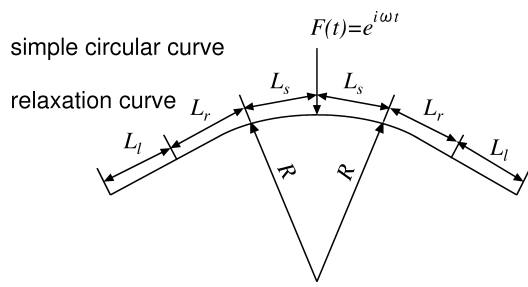


Fig. 7 Alignment of curved rail

Table 2 Analytical conditions of curved rails

	L_s	L_r	L_l	R (m)
rail a	120	0	0	600
rail b	60	30	30	600
rail c	120	0	0	100
rail d	60	30	30	100
rail e	120	0	0	∞

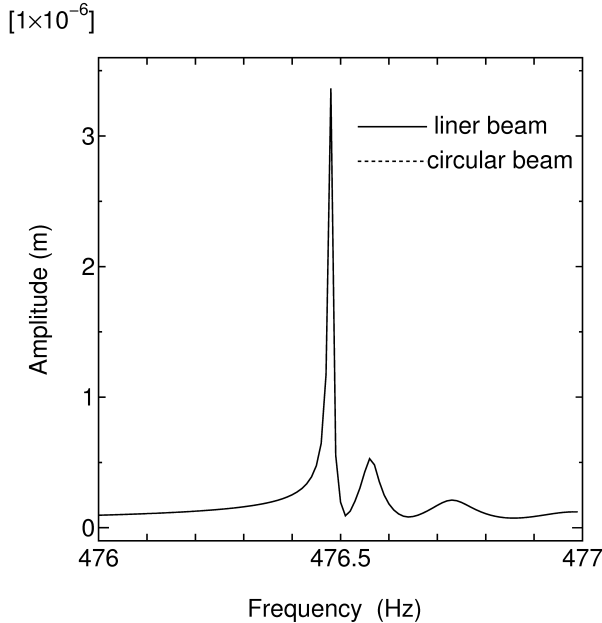


Fig. 8 Amplitude at the loading point

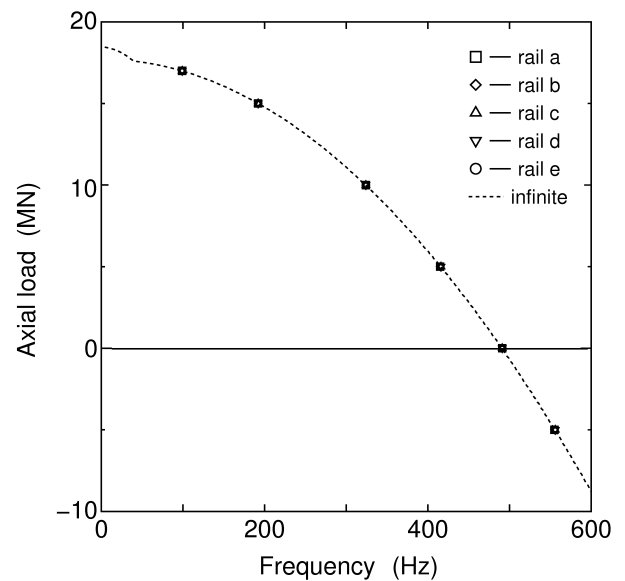


Fig. 9 Relation between frequency and axial load

した⁽¹⁴⁾。なお、道床縦抵抗力のバネ定数をほぼゼロに近い値に設定した解析も行ったが、結果には全く影響しなかった。まくらぎ間隔は $L=0.6\text{m}$ とし、レール一本当りのまくらぎ (1/2 本) 質量を 100kg と設定した。軌道線形は、Fig.7 に示すように、一定の曲率半径 R を有する弧長 $2L_s$ の単曲線の両側に、弧長 L_r の緩和曲線と、長さ L_l の直線区間が接合されている左右対称な曲線レールで与えた。

加振位置は、Fig.7 に示すように、単曲線の中央とし、当該位置がまくらぎ支持点間の中央となる様にまくらぎを配置した。その下で、加振力 $F(t) = e^{i\omega t}$ を半径方向に作用させた。

なおレールの離散化は、まくらぎ 1 区間を 12 要素で一様分割して与えた。

3.3. 直線はり要素を用いた曲線レールモデルの離散化の妥当性

2. の結果より、通常の軌道における曲率は、当該の動特性には影響を及ぼさず、実質的に直線軌道と見なしても差支えないものと思われる。このことより、直線はり要素を用いて曲線レールを離散化することが応答に及ぼす影響はほとんど無いと考えられる。ここでは、それを実際に確認するため

に、円弧はり要素を用いた場合と、直線はり要素を用いて円弧レールを離散近似した場合とで解析結果を比較する。軸力は $N = 1\text{MN}$ とし、曲率半径 $R=600\text{m}$ の長さ 240m の軌道モデルを解析対象とした。

レールの共振周波数付近における、加振位置での振幅の変化の様子を Fig.8 に示す。共振時の周波数や振幅はもとより、その前後の周波数での振幅の変動の様子も完全に一致しており、直線はり要素を用いて曲線レールを離散化しても、本結果には影響しないことが確認できる。

3.4. 曲線レールの軸力-周波数関係

曲線レールの軸力-共振周波数関係について、種々の軌道線形に対して解析を行った。具体的には Fig.7 の設定条件で Table 2 の 5 ケースを対象とした。

それぞれの解析において、軸力を $N=-5, 0, 5, 10, 15, 17\text{MN}$ とした場合の共振周波数をプロットしたものが Fig.9 である。破線は Fig.5 の無限軌道における振動モード C の軸力-周波数関係を示している。いずれのレール線形においても、共振周波数は一致しており、かつ C の振動モードの軸力-周波数

関係とも一致を示している。

以上により、本解析においても、実際のレールが有する範囲内の曲率半径は、軸力-周波数関係に影響しないことが確認できた。また、実際の軌道を想定し、単曲線の両側に緩和曲線と直線とが存在する場合の加振応答解析(レール b,d)も行ったが、それらが軸力-周波数関係に影響しないこともわかった。これらのことは、本研究で対象としたレール振動法による軸力測定が、レール線形に依らず適用可能であることを意味している。

4. おわりに

本研究では、軸力を受ける曲線レールの動的問題について解析し、レール曲率が、レールの共振周波数と軸力との関係に及ぼす影響について調べた。無限長曲線レールの分散解析から、実際のレールが有する範囲内の曲率は分散関係に影響せず、まくらぎ位置が節となるレールたわみモードにおいて、直線レールの場合と一致する軸力-周波数関係が得られることがわかった。

また、曲線レールの調和加振解析においては、一定な曲率半径を有する曲線レール区間の前後に緩和曲線および直線区間を設定した、より現実的な軌道モデルを用いた。その結果、線形によらず同じ軸力-周波数関係を得ることができた。以上のことより、一般的な線形形状のレールにおいて、レール加振に基づく軸力測定法が原理的に適用可能であることがわかった。

今後は、共同研究を通して軌道の加振実験を行い、解析と合わせ本測定手法についてさらに検討を進めるつもりである。

謝辞

本研究は科研費(21560499)の助成を受けたものである。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- (1) 高井秀之: 保線の常識!非常識? その31: レールの軸力は測れない!?, 新線路, 60.11, 36, 2006.
- (2) 佐藤吉彦: 向上法によるスラブ軌道レール軸力の測定, J-RAIL2002, 47-50, 2002.
- (3) 佐藤正男, 山本陽一: 軌道に敷設されたレールの軸力測定器の開発(第一報), 鉄道技術研究所速報, No.82-12, 1982.
- (4) 大宮孝夫 他: ロングレール内軸力に関する基礎的研究, 土木学会第60回年次学術講演概要集, IV-134, 267-268, 2005.
- (5) Weaver, R.: Vibration measurement of rail stress, Final Report for High-Speed Rail IDEA Project 48, 2006.
- (6) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛: まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, 10, 1029-1036, 2007.
- (7) 清水紗希, 阿部和久, 相川 明, 紅露一寛: 軸力を受けるレールの波動伝播解析, 計算数理工学論文集, Vol.9, 67-72, 2009.
- (8) 清水紗希, 阿部和久, 相川 明, 紅露一寛: 3次元はり要素を用いた軸力を受ける軌道系の波動伝播解析, 鉄道力学論文集, 第14号, 75-82, 2010.
- (9) 宮井 徹: エネルギー法による軌道座屈の数値解析, 鉄道技術研究報告, No.1271, 1984.
- (10) Sabir, A.B. and Lock, A.C.: Large deflexion, geometrically non-linear finite element analysis of circular arches, Int.J.Mech.Sci., 15, 37-47, 1973
- (11) Vermeulena, A.H. and Heppler, G.R.: Predicting and avoiding shear locking in beam vibration problems using the B-spline field approximation method, Comput.Meth.Appl.Mech.Eng., 158, 311-327, 1998.
- (12) Delph, T.J., Herrmann, G. and Kaul, R.K.: Harmonic wave propagation in a periodically layered, infinite elastic body : Antiplane strain, J.Appl.Mech., 45, 343-349, 1978.
- (13) 片岡宏夫, 柳川秀明, 高原正樹: 列車荷重を考慮したロングレールの座屈安定性解析, 鉄道総研報告, Vol.17, No.2, 5-10, 2003.
- (14) 佐成屋淳, 阿部和久, 紅露一寛: 走行車輪と軌道系の定常連成応答解析, 計算数理工学論文集, Vol.9, 61-66, 2009.